Google

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY

6m

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

157069

STANFORD LIBRARY

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Übersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXV Jahrgang 1905.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 13. Mai 1905.

Sitzung vom 3. Juni 1905.

Sitzung vom 1. Juli 1905.

Öffentliche Sitzung zur Feier des 146. Stiftungstages am 15. März 1905.

Sitzung vom 4. November 1905.

Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 18. November 1905.

Sitzung vom 2. Dezember 1905.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 7. Januar 1905.

1. Herr Karl v. Linde hält einen Vortrag: „Über die Feststellung der Dichte von gesättigten Wasserdämpfen und des thermischen Verhaltens von überhitzten Wasserdämpfen.“ Die Resultate der Untersuchung werden anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

Derselbe spricht über die Durchführung und die Ergebnisse von Versuchen, welche im Laboratorium der Technischen Hochschule für technische Physik die Feststellung der Dichte von gesättigten Wasserdämpfen und des thermischen Verhaltens von überhitzten Wasserdämpfen zum Gegenstande hatten. Von Interesse ist insbesondere die Bestätigung, daß bei konstantem Volumen die überhitzten Dämpfe bis dicht an die Sättigungsgrenze hin — in Übereinstimmung mit den Gesetzen für vollkommene Gase — Proportionalität zwischen Druck und Temperatur zeigen, daß dagegen mit abnehmendem spezifischen Volumen der Ausdehnungskoeffizient wächst und zwar so, daß sein reziproker Wert bei dem Sättigungsdrucke von zehn Atmosphären 173 ist (gegenüber 273 im Zustande eines vollkommenen Gases).

2. Herr Sebastian Finsterwalder macht eine Mitteilung über: „Der „gefährliche Ort“ beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel.“

Es ist dies eine Raumkurve 6. Ordnung, die durch die Ecken des Dreieckes der Festpunkte und dessen Polardreiecks

hindurchgeht, deren Zusammenhang mit der J. Steiner'schen Kurve 3. Klasse er bespricht.

3. Herr FERDINAND LINDEMANN legt eine Arbeit der Herren ARTHUR KORN und EDUARD STRAUSS: „Über eine Beziehung zwischen Wanderungsgeschwindigkeit und Form der Ionen" vor.

Durch seine Untersuchungen über die Theorie der Linienspektren war Prof. Lindemann zu der Hypothese geführt, daß sich die Atome der verschiedenen chemischen Elemente gleichmäßig aus einer Einheitsmaterie zusammensetzen und sich nur durch Form und Gestalt unterscheiden; insbesondere sind hiernach die Atome der Alkalien als verlängerte, die der Metalle als abgeplattete Rotationsellipsoide zu betrachten, während andere (z. B. Zink und Quecksilber) sich nahezu wie Kugeln verhalten, dem Wasserstoffatome aber nahezu die Gestalt einer kreisförmigen Platte zukommt.

Die Verfasser der vorliegenden Arbeit versuchen nun, die Achsenverhältniße der auftretenden Ellipsoide in einigen Fällen zu berechnen, und zwar auf Grund der Hypothese, daß die Verschiedenheit der elektrolytischen Wanderungs-Geschwindigkeit der Ionen ebenfalls auf Verschiedenheiten in der Form dieser Ionen (bezw. Atome) beruhen. Unter der Annahme, daß das Zink-Ion kugelförmig sei, ergibt sich das Verhältnis der Hauptachsen des Natrium-Ions gleich 0,92, dasjenige der Hauptachsen des Kalium-Ions gleich 0,60. Wollte man dagegen das Wasserstoff-Ion als kugelförmig voraussetzen, so würden sich die Zahlen 0,96 und 0,62 ergeben. Es ist zu hoffen, daß man auf Grund solcher Zahlen die Lindemann'sche Theorie auch numerisch genauer wird prüfen können.

4. Der Klassensekretär überreicht eine Abhandlung des korrespondierenden Mitgliedes der Akademie, Herrn Professor Dr. OTTO STOLZ in Innsbruck: „Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals."

Der „gefährliche Ort“ beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel.

Von S. Finsterwalder.

(Eingelaufen 7. Januar.)

Wenn bei der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden in der Ebene nach dem sogenannten Pothenot'schen Problem der Fall eintritt, daß der zu bestimmende Punkt mit den drei Festpunkten auf einem Kreise liegt, so wird das Ergebnis der Punktbestimmung insofern ungenügend, als jeder Punkt des Kreises den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Man spricht deshalb von dem „gefährlichen Kreis“ durch die drei Festpunkte, den man bei der pothenotischen Bestimmung zu vermeiden hat. Bei der Erweiterung des pothenotischen Problems auf die Kugel[1]) ist die Frage naheliegend, ob dabei auch noch ein Gegenstück zum „gefährlichen Kreis“ — wir wollen es „gefährlichen Ort“ nennen — zu beachten ist. Ein „gefährlicher Ort“ in dem Sinne, daß alle Punkte desselben den Bedingungen der Aufgabe genügen, ist nun von vornherein nicht zu erwarten; ein solcher pflegt in der Regel nur aufzutreten, wenn die Punktbestimmung wie beim Pothenot'schen Problem in der Ebene im allgemeinen eindeutig ist und im besonderen Falle dann unbestimmt wird. Wohl aber kann die Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden auf der Kugel, die im allgemeinen vierdeutig ist, dadurch unsicher

[1]) Vergl. S. Günther: Das Pothenot'sche Problem auf der Kugelfläche. Diese Berichte, Bd. 24, 1904, S. 115, wo auch die Geschichte des Problems berücksichtigt ist.

werden, daß für besondere Lagen des zu bestimmenden Punktes zwei von den vier Lösungen zusammenfallen, was dann die Wirkung hat, daß Abweichungen von den gegebenen Winkeln, die unendlichklein von der zweiten Ordnung sind, bereits eine Verschiebung des rückwärts eingeschnittenen Punktes um eine unendlichkleine Grösse erster Ordnung zur Folge haben. Der Ort der Punkte, für welche der genannte Fall eintritt, ist für die Praxis nicht weniger „gefährlich“ als der Umkreis der drei Festpunkte in der Ebene und er möge deshalb im folgenden gekennzeichnet werden.

Der nächstliegende Weg, die Diskriminante der Gleichung vierten Grades,[1]) von der die Lösung des Problems abhängt, zu bilden, führt zu ganz unübersichtlichen Formeln, mit denen kaum etwas anzufangen ist; dagegen kommt man mit einer kinematischen Betrachtung — ähnlich wie beim Problem des Rückwärtseinschneidens im Raum[2]) — auf verhältnismäßig einfache Weise zum Ziel.

Es seien ABC (Fig. 1) die drei Festpunkte auf der Kugel, P der zu bestimmende Punkt. Wenn P auf dem „gefährlichen Ort“ liegt, so muß das als starr vorausgesetzte Büschel (aus den drei Großkreisen PA, PB, PC bestehend) noch eine unendlichkleine Bewegung um die Punkte ABC zulassen. Das Momentanzentrum dieser Bewegung erhält man, indem man auf den Strahlen des Büschels in den Punkten A, B und C senkrechte Großkreise errichtet, die sich dann in einem Punkte Q (dem Momentanzentrum) schneiden müssen.

Fig. 1.

Ist umgekehrt ein solcher Schnittpunkt der drei Großkreise vorhanden, so ist eine unendlichkleine Drehung des Büschels der drei Großkreise durch P möglich, wobei sich diese nur um ein

[1]) Ebenda S. 122.

[2]) Vergl. S. Finsterwalder und W. Scheufele: Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Diese Berichte, Bd. 23, 1903, S. 597.

Unendlichkleines zweiter Ordnung von den Festpunkten A, B, C entfernen, während der Punkt P um ein Unendlichkleines erster Ordnung fortrückt. Offenbar ist dann aber auch der Punkt Q ein Punkt des gefährlichen Ortes, zu dem nun P als Momentanzentrum gehört.

Gestützt auf diese Eigenschaft läßt sich die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte P und Q leicht ableiten. Die Richtungkosinus der Kugelradien nach den Festpunkten $A\,B\,C$ seien mit $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$, $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$, jene nach P und Q mit $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ bezeichnet. Die Richtungskosinus der Ebene durch den Kugelmittelpunkt und $A\,P$ verhalten sich wie die Determinanten der Matrix $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{Vmatrix}$, jene der Ebene durch den Kugelmittelpunkt und $A\,Q$ verhalten sich wie die Determinanten der Matrix $\begin{Vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{Vmatrix}$. Die Bedingung des Senkrechtstehens beider Ebenen, welche jene für das Senkrechtstehen der Großkreise durch $A\,P$ und $A\,Q$ nach sich zieht, lautet nach $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ geordnet:

$$\alpha'[\alpha(\beta_1^2+\gamma_1^2)-\alpha_1(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)]+\beta'[\beta(\gamma_1^2+\alpha_1^2)-\beta_1(\gamma\gamma_1+\alpha\alpha_1)]$$
$$+\gamma'[\gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2)-\gamma_1(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)]=0$$

Dieser Gleichung schließen sich zwei weitere an, bei welchen an Stelle des Zeigers 1 der Zeiger 2 bezw. 3 tritt.

Aus diesen drei Gleichungen eliminiert man $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ und erhält die gewünschte Gleichung des geometrischen Ortes in Determinantenform, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} \alpha(\beta_1^2+\gamma_1^2)-\alpha_1(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1), & \beta(\gamma_1^2+\alpha_1^2)-\beta_1(\gamma\gamma_1+\alpha\alpha_1), & \gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2)-\gamma_1(\beta\beta_1+\gamma\gamma_1) \\ \alpha(\beta_2^2+\gamma_2^2)-\alpha_2(\beta\beta_2+\gamma\gamma_2), & \beta(\gamma_2^2+\alpha_2^2)-\beta_2(\gamma\gamma_2+\alpha\alpha_2), & \gamma(\alpha_2^2+\beta_2^2)-\gamma_2(\beta\beta_2+\gamma\gamma_2) \\ \alpha(\beta_3^2+\gamma_3^2)-\alpha_3(\beta\beta_3+\gamma\gamma_3), & \beta(\gamma_3^2+\alpha_3^2)-\beta_3(\gamma\gamma_3+\alpha\alpha_3), & \gamma(\alpha_3^2+\beta_3^2)-\gamma_3(\beta\beta_3+\gamma\gamma_3) \end{vmatrix}=0 \quad 1)$$

Aus dieser homogenen Gleichung dritten Grades in $\alpha\,\beta\,\gamma$ geht hervor, daß der gesuchte „gefährliche Ort" durch einen Kegel dritter Ordnung, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, ausgeschnitten wird, selber also eine Linie sechster Ordnung ist.

Ehe die Gleichung des Ortes auf eine einfachere Form gebracht wird, sollen auf kinematischem Wege noch einzelne Punkte desselben bestimmt werden. Fällt der Punkt P mit einem der Festpunkte, z. B. A zusammen, so besteht unendlich-kleine Beweglichkeit des Strahlenbüschels und das zugehörige Momentanzentrum A' ist der Schnitt der auf den Seiten AB und AC in B und C errichteten senkrechten Großkreise. Auch dieser Punkt liegt auf der Kurve. Bezeichnen wir den Pol der Seite AB des Dreiecks ABC mit C_1, jenen von BC mit A_1 und jenen von CA mit B_1, so ist A' der Schnitt der Großkreise durch BC_1 und CB_1. Ähnlich liegen B' als Schnitt von AC_1 und CA_1, sowie C' als Schnitt von BA_1 und AB_1 auf der Kurve. Aber auch die Punkte $A_1 B_1 C_1$ liegen auf dem gefährlichen Ort. Fällt P mit A_1 zusammen, so decken sich die zu PB und PC in B und C errichteten senkrechten Großkreise längs der Seite BC und als Momentanzentrum A_1' tritt dann der Schnitt des in A zu $A_1 A$ errichteten senkrechten Großkreises mit AB auf. $A_1 A$ ist die von A auf BC gefällte Höhe im sphärischen Dreieck und A_1' deren Pol. Der Umstand, daß sich die drei Höhen des sphärischen Dreiecks in einem Punkt schneiden, hat zur Folge, daß die ihnen entsprechenden Pole A_1', B_1', C_1', die als Punkte des gefährlichen Ortes erkannt wurden, auf einem Großkreise liegen. Wir wissen also von folgenden 12 Punkten, daß sie auf dem gefährlichen Ort liegen:

1. die Ecken des Dreiecks der drei Festpunkte A, B, C;
2. die Ecken des Polardreiecks hiezu A_1, B_1, C_1;
3. die Pole A_1', B_1', C_1' der Höhen des Dreiecks ABC, die gleichzeitig Höhen des Polardreiecks sind;
4. die Schnittpunkte A', B', C' der kreuzweisen Verbindungslinien der Ecken beider Dreiecke.

Die Punkte liegen ganz gleichartig zu beiden Dreiecken ABC und $A_1 B_1 C_1$.

Durch diese 12 Punkte ist der Kegel dritter Ordnung, welcher den gefährlichen Ort ausschneidet, mehr als bestimmt.

Er bleibt demnach ungeändert, wenn an Stelle des Dreiecks ABC das Polardreieck $A_1 B_1 C_1$ tritt. Es soll nun der Kegel mit einer passenden Ebene geschnitten und die Gleichung der Schnittkurve in Dreieckskoordinaten bestimmt werden. Als Schnittebene empfiehlt sich eine Parallele zur Polarebene des Höhenschnittpunktes im Dreieck der Festpunkte. Diese Schnittebene schneidet das Dreikant ABC und dessen Polardreikant $A_1 B_1 C_1$ nach ähnlichen Dreiecken, für welche der Höhenschnitt Ähnlichkeitszentrum ist. In Fig. 2 ist die Durchschnittsfigur mit der genannten Ebene dargestellt und zwar tragen die Punkte dieselbe Bezeichnung, wie jene auf der Kugel. Das ebene Dreieck ABC soll als Koordinatendreieck und der Höhenschnittpunkt H als Einheitspunkt gelten. Die Winkel dieses Dreiecks sind ebensogroß wie jene, welche die Höhen des sphärischen Dreiecks der Festpunkte im Höhenschnitt miteinander einschließen und können aus den sphärischen Dreieckswinkeln leicht berechnet werden; ihre Tangenten werden mit u, v, w bezeichnet. Die Gleichung der unendlichfernen Geraden, auf welcher die Punkte A_1', B_1', C_1' der Kurve liegen, ist dann $u x_1 + v x_2 + w x_3 = 0$. Da die Kurve außerdem durch die Ecken des Koordinatendreiecks geht, wird ihre Gleichung von der Form

Fig. 2.

$$x_1 x_2 x_3 + (u x_1 + v x_2 + w x_3)(\varkappa_1 x_2 x_3 + \varkappa_2 x_3 x_1 + \varkappa_3 x_1 x_2) = 0.$$

Wählt man die Gleichung der Linie $A_1 B_1$, die durch den Schnitt von $u x_1 + v x_2 + w x_3 = 0$ und $x_3 = 0$ geht, zu

$u x_1 + v x_2 + (w + \lambda) x_3 = 0$, so werden jene der Linien $B_1 C_1$ und $C_1 A_1$:

$$(u + \lambda) x_1 + v x_2 + w x_3 = 0 \text{ und } u x_1 + (v + \lambda) x_2 + w x_3 = 0.$$

Da nun die Kurve durch die Punkte A_1, B_1, C_1 gehen soll, müssen die Werte $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ entsprechend gewählt werden und die Gleichung erhält schließlich die folgende Form:

$$\lambda(u + v + w + 2\lambda) x_1 x_2 x_3 + (u x_1 + v x_2 + w x_3)[(u + v + \lambda) x_1 x_2 + (v + w + \lambda) x_2 x_3 + (w + u + \lambda) x_3 x_1] = 0. \quad 2)$$

Man überzeugt sich nun leicht, daß auch die Punkte A', B', C' auf der Kurve liegen.

A' hat z. B. die Koordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -1 : \frac{u + w + \lambda}{v} : \frac{u + v + \lambda}{w} \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung des imaginären Kegelschnitts, in welchem die mit der gegebenen Kugel konzentrische vom Radius Null die Schnittebene trifft, lautet:

$$(u x_1 + v x_2 + w x_3)^2 + \lambda (u x_1^2 + v x_2^2 + w x_3^2) = 0 \quad 3)$$

Mit Zugrundelegung dieses Kegelschnitts als Absolutem einer Maßbestimmung hätte sich die Gleichung der Kurve dritter Ordnung auch unmittelbar aus der Definition des gefährlichen Ortes ableiten lassen.

Von bemerkenswerten Einzelfällen sei zunächst jener erwähnt, bei welchem das sphärische Dreieck unendlichklein wird oder die Kugel in eine Ebene übergeht. Er entspricht dem Fall $\lambda = 0$, für den die Gleichung des geometrischen Ortes in die unendlichferne Gerade: $u x_1 + v x_2 + w x_3 = 0$ und in den Kegelschnitt: $(u + v) x_1 x_2 + (v + w) x_2 x_3 + (w + u) x_3 x_1 = 0$ zerfällt. Letzterer ist aber der Umkreis des Koordinatendreiecks, denn seine Gleichung kann auf die Form

$$(u x_1^2 + v x_2^2 + w x_3^2) - (u x_1 + v x_2 + w x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

gebracht werden. Hieraus geht hervor, daß der Kegelschnitt die unendlichferne Gerade $(u x_1 + v x_2 + w x_3) = 0$ in denselben

Punkten (den imaginären Kreispunkten) schneidet, wie der durch Gleichung 3 dargestellte Kreis. Man erhält also hier den „gefährlichen Kreis" des Pothenot'schen Problems der Ebene. Bei dieser Gelegenheit sei noch auf den eigentümlichen Unterschied hingewiesen, der zwischen den verwandten Örtern auf der Kugel und der Ebene besteht. Bei dem gefährlichen Ort auf der Kugel sind die Richtungen, in welchen eine Beweglichkeit des rückwärtsbestimmten Punktes besteht, verschieden von den Tangentenrichtungen an den gefährlichen Ort; bei dem gefährlichen Kreise der Ebene fallen sie zusammen.

Fällt im Dreieck der Festpunkte auf der Kugel eine Ecke auf den Pol der gegenüberliegenden Seite, was zur Folge hat, daß die anliegenden Seiten einem Rechten gleich werden, so spaltet sich von der Kurve dritter Ordnung jene Seite ab und der Rest wird ein Kegelschnitt.

In einem sphärischen Dreieck mit drei rechten Winkeln als Seiten zerfällt der gefährliche Ort in die drei Seiten des Dreiecks.

Liegen die Ecken des sphärischen Dreiecks auf einem Großkreise, so zerfällt der gefährliche Ort in jenen Großkreis und in einen Kreis vom Radius Null durch den Pol des Großkreises.

Die drei letztgenannten Einzelfälle werden am leichtesten aus Gleichung 1 entnommen; ebenso der Fall eines rechtwinkligen Festpunktdreiecks, der übrigens keine Besonderheit in Bezug auf den Verlauf des gefährlichen Ortes aufweist.

Zum Schlusse sei noch einer eigentümlichen Beziehung der untersuchten Kurve zur J. Steiner'schen ebenen Kurve dritter Klasse[1]) Erwähnung getan. Mit der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens auf der Kugel ist aufs engste die dualistische Aufgabe verwandt, welche verlangt, die Seiten eines

[1]) Jakob Steiner: Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierten Grades). Journal für reine und angew. Math., Bd. 53, S. 231; auch: Gesammelte Werke, 2. Bd., S. 641.

Dreiecks durch einen Großkreis so zu schneiden, daß die sphärischen Abstände der Schnittpunkte vorgegebene seien. Auch die Lösung dieser Aufgabe kann unsicher werden. Es ist unter Umständen eine unendlichkleine Verschiebung des schneidenden Großkreises möglich, welche keine vergleichbare Veränderung der Abstände der Schnittpunkte nach sich zieht. Die Lagen der Großkreise, die eine solche Verschiebung zulassen, umhüllen den gefährlichen Ort. Diese Lagen lassen sich ebenfalls durch kinematische Betrachtungen auffinden. (Fig. 3.) Sind A_1, B_1, C_1 die Ecken des Dreiecks, A, B, C die Pole seiner Seiten und schneide ein Großkreis die Seite $A_1 B_1$ in N, $B_1 C_1$ in L, $C_1 A_1$ in M, so erhält man das Momentanzentrum Q für die mögliche Bewegung des Großkreises im Schnitt der Lote in L, M, N auf die Seiten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$. Schneiden sich die drei Lote in einem Punkt Q, so ist Großkreis in der gefährlichen Lage. Der Ort der Momentanzentra Q hat die Eigenschaft, daß die von ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Lote Fußpunkte haben, die auf einem Großkreise liegen. So haben wir im Umhüllungsgebilde der ausgezeichneten Großkreise das sphärische Gegenstück zur J. Steiner'schen Kurve dritter Klasse und im Ort der Momentanzentra P das Gegenstück zum Umkreise des Dreiecks bei der Steiner'schen Konstruktion derselben, die bekanntermassen lautet: Von den Punkten des Umkreises eines ebenen Dreiecks werden Lote auf die Seiten desselben gefällt. Ihre Fußpunkte liegen auf Geraden, die eine Kurve dritter Klasse umhüllen, von welcher die Dreiecksseiten und Höhen Tangenten sind. Das Momentanzentrum Q kann auch dadurch gefunden werden, daß man die Punkte $L\,M\,N$ mit den Ecken A, B, C des Polardreiecks durch Großkreise verbindet. Errichtet man in den Punkten A, B, C Lote zu jenen Verbindungslinien, so schneiden sich dieselben in einem Punkte P, dem Pole des Großkreises durch $L\,M\,N$. Bei der unendlichkleinen Drehung um Q, bei welcher sich die

Fig. 3.

Abstände der Punkte LMN vergleichsweise nicht ändern, geschieht dasselbe auch mit den Winkeln der Großkreise des Büschels PA, PB, PC und P ist demnach ebenso wie Q ein Punkt des gefährlichen Ortes für das Rückwärtseinschneiden nach dem sphärischen Dreieck ABC. Letzterer ist aber von dem gefährlichen Ort für das Rückwärtseinschneiden nach dem Polardreieck $A_1 B_1 C_1$ nicht verschieden.

Zusammenfassend kann man sagen: Der „gefährliche Ort" beim Rückwärtseinschneiden nach einem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck ist eine durch die Ecken beider Dreiecke gehende Kurve, die von einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ausgeschnitten wird. Fällt man von einem Punkte dieser Kurve Lote auf die Seiten des Dreiecks oder seines Polardreiecks, so liegen die Fußpunkte auf je einem Großkreise und die Ebenen der letzteren umhüllen einen Kegel dritter Klasse, der die Seiten beider Dreiecke sowie ihre gemeinsamen Höhen berührt und polarreziprok zum Kegel dritter Ordnung liegt.

Von der großen Zahl metrischer Eigenschaften der J. Steiner'schen ebenen Kurve dritter Klasse überträgt sich keine auf das sphärische Gegenstück; sie sind nämlich wesentlich dadurch bedingt, daß die Steiner'sche Kurve eine Doppeltangente mit den imaginären Kreispunkten als Berührungspunkten besitzt, während der Kegel dritter Klasse beim sphärischen Gegenstück allgemeiner Art ist.

Über eine Beziehung zwischen Wanderungsgeschwindigkeit und Form der Ionen.

Von **A. Korn** und **E. Strauß.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Der Gedanke Lindemanns,[1]) die Spektra der Elemente aus der Form der Atome abzuleiten, hat uns auf die Frage geführt, ob man nicht auch aus der Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen gewisse Schlüsse auf deren Form ziehen kann.

Wir wollen im folgenden zwei einfache Voraussetzungen machen:

1. Die Ionen sind elastische feste Körper, welche in erster Annäherung einfache Formen haben, so daß wir z. B. von gewissen Ionen aussagen können, sie haben in erster Annäherung Kugelgestalt oder die Gestalt von verlängerten Rotationsellipsoiden oder dergl. Die Ionen bestehen aus einer Einheitsmaterie von bestimmter Dichte ϱ, die für alle Ionen dieselbe ist.

2. Der Widerstand, den ein als verlängertes Rotationsellipsoid gedachtes Ion bei seiner Bewegung in der Richtung der Rotationsachse erfährt, ist für jedes Flächenelement der normalen Komponente seiner Geschwindigkeit proportional und hat die Richtung der (inneren) Normalen.

Auf Grund dieser beiden Annahmen können wir zeigen, daß man aus dem Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten eines kugelförmig gedachten Ions und eines Ions von der Gestalt

[1]) F. Lindemann, Zur Theorie der Spektrallinien. (Sitzungsbericht d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., 31, S. 441–494, 33, S. 27–100.)

eines verlängerten Rotationsellipsoides das Achsenverhältnis dieses letzteren berechnen kann.

Wenn man z. B. mit Lindemann dem Zink-Ion die Kugelgestalt, dem Natrium- und Kalium-Ion die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides zuschreibt, so wird man aus dem Verhältnis:

$$\frac{\text{Ionengeschwindigkeit des Zn.-Ions}}{\text{Ionengeschwindigkeit des Na.-Ions}}$$

das Achsenverhältnis für das Na.-Ion, aus dem Verhältnis:

$$\frac{\text{Ionengeschwindigkeit des Zn.-Ions}}{\text{Ionengeschwindigkeit des K.-Ions}}$$

das Achsenverhältnis für das K.-Ion bestimmen können.

Würde man — in diesem Punkte von der Lindemann'-schen Theorie abweichend — z. B. dem Wasserstoff-Ion Kugelform zusprechen, für das Kalium- und Natrium-Ion aber die erwähnte Voraussetzung beibehalten, daß sie die Gestalt von verlängerten Rotationsellipsoiden besitzen, so werden wir wieder aus den Verhältnissen der Ionengeschwindigkeiten Werte für die Achsenverhältnisse der K.- und Na.-Ionen berechnen können, die von den auf die erste Art berechneten Werten verschieden sein werden.

Wir werden die Berechnung für jede dieser beiden Voraussetzungen ausführen, und es werden sich bei der ersten Voraussetzung (Zn.-Ion kugelförmig gedacht) die Verhältnisse der kleinen zur großen Achse, wie folgt, ergeben:

für K.: 0,58,
für Na.: 0,92.

Auf Grund der zweiten Voraussetzung (H.-Ion kugelförmig gedacht) ergibt die Berechnung dieses Achsenverhältnisses:

für K.: 0,62,
für Na.: 0,96.

Wir teilen diese Resultate in der Hoffnung mit, daß durch die Einsetzung dieser Werte in die für die Spektrallinien von

verlängerten Rotationsellipsoiden nach Lindemann geltenden Gleichungen die numerische Berechnung der den Spektrallinien entsprechenden Wellenlängen ermöglicht und ein Vergleich mit der Erfahrung vorgenommen werden kann.

a) Der Widerstand, den ein Ion von der Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides bei der Bewegung in der Richtung der Rotationsachse erleidet.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Ellipsoides zum Anfangspunkte, die Rotationsachse zur x-Achse, a sei die große, b die kleine Halbachse des Ellipsoides, dann ist bei unseren Voraussetzungen der Widerstand, den das Ellipsoid bei einer Bewegung mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse erfährt:

$$W = \text{const.}\, v \cdot \int_0^a \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \cdot y\, ds,$$

wenn wir unter ds ein Bogenelement der Meridiankurve verstehen, oder:

$$W = \text{const.}\, v \cdot \int_0^a \frac{y\, y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\, dx,$$

wobei wir

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

zu setzen haben. Nun ist:

$$y' = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}{a^2 - x^2}},$$

somit:

$$W = \text{const.}\, v \cdot \frac{b^3}{a^2}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}}\, dx,$$

wenn wir noch die Abkürzung:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

einführen.

Das Integral ist leicht auszuwerten; es ist das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}}\, d x = \frac{1}{2}\frac{a^4}{e^3} \arcsin \frac{e x}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{x}{e^2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \text{const.},$$

somit:

$$W = \text{const.}\ v \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{b^2 a^2}{e^3} \arcsin \frac{e}{a} - \frac{b^4}{e^2}\right].$$

Der Fall:

$$e = 0, \quad b = a,$$

d. i. der Fall der Kugel, bedarf einer besonderen Behandlung, es folgt in diesem Falle:

$$W = \text{const.}\ v \cdot \frac{b^2}{a^2}\int_0^a \frac{x^2}{a^2}\, d x = \text{const.}\ v \cdot \frac{1}{3}\, a^2.$$

b) Berechnung von Achsenverhältnissen mit Hilfe der Kenntnis der Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen und der Äquivalentgewichte.

Wir werden jetzt zwei Ionen vergleichen unter der Voraussetzung, daß das eine Ion die Gestalt einer Kugel, das andere die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides hat. Die Kugel habe den unbekannten Radius a_0, das Rotationsellipsoid die Halbachsen a und b $(a > b)$; die Wanderungsgeschwindigkeit des kugelförmigen Ions sei: I_0, die des anderen Ions: I; das dem kugelförmigen Ion entsprechende Äquivalentgewicht sei: G_0, das dem anderen Ion entsprechende Äquivalentgewicht: G. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{W}{W_0} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a_0^2}\left[\frac{b^2}{e^3} \arcsin \frac{e}{a} - \frac{b^4}{a^2 e^2}\right],$$

$$\frac{G_0}{G} = \frac{a_0^3}{a^2 b}.$$

Es ergibt sich somit durch Elimination des unbekannten Kugel-Radius a_0:

$$\left(\frac{I_0}{I}\right)^3 \cdot \left(\frac{G_0}{G}\right)^2 = \frac{27}{8}\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{b^2}{e^3} \arcsin \frac{e}{a} - \frac{b^4}{a^2 e^2}\right]^3 = \psi\left(\frac{b}{a}\right).$$

Auf der rechten Seite steht eine bloße Funktion von $\frac{b}{a}$, auf der linken Seite eine experimentell bestimmbare Zahl, wir können somit aus dieser Gleichung die Unbekannte $\frac{b}{a}$ für ein Ion berechnen, dem wir die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides beilegen, indem wir es mit einem Ion vergleichen, dem wir Kugelgestalt zuerteilen.

Wir werden jetzt zunächst, einer Vermutung Lindemanns folgend, das Zn.-Ion als Kugel annehmen und dem Na.-Ion die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides beilegen.

Dann ist:[1])

$$\frac{I_0}{I} = \frac{26}{38,3}, \qquad \frac{G_0}{G} = \frac{32,7}{23,05},$$

$$1. \quad \psi\left(\frac{b}{a}\right) = 0,630.$$

Indem wir in gleicher Weise das K.-Ion als verlängertes Rotationsellipsoid annehmen und mit dem Zn.-Ion vergleichen, haben wir:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{26}{60,7}, \qquad \frac{G_0}{G} = \frac{32,7}{39,15},$$

$$2. \quad \psi\left(\frac{b}{a}\right) = 0,0548.$$

Nehmen wir dagegen das Wasserstoff-Ion als Kugel an und vergleichen mit ihm das als verlängertes Rotationsellipsoid vorausgesetzte Na.-Ion, so folgt:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{293}{38,3}, \qquad \frac{G_0}{G} = \frac{1}{23,05},$$

$$3. \quad \psi\left(\frac{b}{a}\right) = 0,843,$$

[1]) Wir entnehmen die Zahlen den „Grundzügen der Elektrochemie“ von R. Lüpke (S. 62).

und wenn wir mit dem Wasserstoff-Ion das K.-Ion vergleichen, so erhalten wir:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{293}{60{,}7}, \qquad \frac{G_0}{G} = \frac{1}{39{,}15},$$

$$4. \quad \psi\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}0734.$$

Wir haben für eine Anzahl von Werten $\frac{b}{a}$ die zugehörigen ψ Werte berechnet, und man kann aus der nachfolgenden Tabelle leicht die den ψ Werten 1.—4. entsprechenden Werte von $\frac{b}{a}$ berechnen.

Es folgt, wenn wir das Zn.-Ion als Kugel zu Grunde legen:

$$\text{für Na.:} \quad \frac{b}{a} = 0{,}92,$$

$$\text{für K.:} \quad \frac{b}{a} = 0{,}58,$$

wenn wir das Wasserstoff-Ion als Kugel zu Grunde legen:

$$\text{für Na.:} \quad \frac{b}{a} = 0{,}96,$$

$$\text{für K.:} \quad \frac{b}{a} = 0{,}62.$$

Wenn wir bedenken, daß die Angaben für die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen, wie sie experimentell bestimmt worden sind, leicht Fehler von einigen Prozent enthalten können, dürfen wir mit einiger Sicherheit sagen, daß bei unseren Voraussetzungen für Na. auf ein Achsenverhältnis:

$$\frac{b}{a} = 0{,}92, \qquad \frac{e}{a} = \frac{2}{5},$$

für K. auf ein Achsenverhältnis:

$$\frac{b}{a} = 0{,}60, \qquad \frac{e}{a} = \frac{4}{5}$$

geschlossen werden kann.

Tabelle der ψ Werte.

$\frac{b}{a}$	$\frac{e}{a}$	$\psi\left(\frac{b}{a}\right)$
0	1	0
$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,0223
$\frac{9}{16} = 0,5625$	$\frac{5}{16}\sqrt{7}$	0,0450
$\frac{2}{11}\sqrt{10} = 0,575$	$\frac{9}{11}$	0,0495
$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{4}{5}$	0,0630
$\frac{5}{8} = 0,625$	$\frac{1}{8}\sqrt{39}$	0,0793
$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{1}{4}\sqrt{7}$	0,2177
$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8}\sqrt{15}$	0,4816
$\frac{9}{10} = 0,9$	$\frac{1}{10}\sqrt{19}$	0,5790
$\frac{1}{5}\sqrt{21} = 0,916$	$\frac{2}{5}$	0,6322
$\frac{1}{4}\sqrt{15} = 0,968$	$\frac{1}{4}$	0,8570
1	0	1

Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals.

Von **Otto Stolz.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

1. Bezeichnet $g(\tau)$ eine komplexe Funktion der reellen Veränderlichen τ, welche für jeden Wert des endlichen Intervalles (α, β) mit Einschluß von $\tau = \alpha$ und $\tau = \beta$ stetig ist, so stellt die Gleichung

$$x = g(\tau) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{1}$$

in der x-Ebene eine ganz im Endlichen liegende, stetige Linie $\mathfrak{w}$ dar, welche die Punkte $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$ verbindet. Ferner sei für jeden Punkt x in $\mathfrak{w}$ eine Funktion $f(x)$ eindeutig erklärt und zwar sei sie in $\mathfrak{w}$ endlich d. h. es gebe eine positive Konstante Γ derart, daß der absolute Betrag von $f(x)$ für jedes solche x kleiner als Γ ist. Alsdann versteht man unter dem Integral der Funktion $f(x)$ längs des Weges $\mathfrak{w}$

$$\int_{a\,(\mathfrak{w})}^{b} f(x)\, dx \tag{2}$$

die der nachstehenden Bedingung genügende Zahl J. Wir teilen das Intervall $\beta - \alpha$ in beliebig viele (n) Teile $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_n$, so daß

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = \beta - \alpha$$

ist, und setzen

$$\alpha = \alpha_0 \qquad \alpha + \delta_1 = \alpha_1 \quad \alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2 \; \ldots\ldots \; \alpha_{n-1} + \delta_n = \alpha_n = \beta$$

$$g(\alpha_0) = a_0 = a \quad g(\alpha_1) = a_1 \quad g(\alpha_2) = a_2 \quad g(\alpha_{n-1}) \; \cdots \; g(\alpha_n) = a_n = b.$$

Endlich sei τ_r ein im Intervalle $(a_{n-1}, a_r) \cdot (r = 1, 2 \ldots n)$ beliebig gewählter Wert von τ und $x_r = g(\tau_r)$. Dann soll jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ so entsprechen, daß, wenn nur jeden der Teile $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$, deren Summe $\beta - a$ ist, kleiner als δ ist, stets

$$\left| \sum_1^n {}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}) - J \right| < \varepsilon \tag{3}$$

ist. Darin besteht die arithmetische Bedeutung der Formel

$$J = \lim_{\delta_r = 0} \sum_1^n {}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}). \tag{4}$$

Nun besteht bekanntlich der Satz: „Wenn der Weg $\mathfrak{w}$ regulär ist (d. h. wenn entweder der Differentialquotient $g'(\tau)$ im Intervalle (a, β) überall d. i. für $a \leqq \tau < \beta$ stetig ist oder das Intervall (a, β) sich so in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen lässt, daß $g'(\tau)$ in jedem Teil-Intervalle überall stetig ist) und wenn das Integral

$$\int_a^\beta f(g(\tau))\, g'(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

einen Sinn hat, so ist das komplexe Integral (2) vorhanden und zwar ist es dem soeben erwähnten Integral (5) gleich."

Diesen Satz habe ich für den Fall, daß $g'(\tau)$ im Intervalle (a, β) durchaus stetig ist, in meinen „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung" II, S. 174 bewiesen. Im zweiten der hinsichtlich des Verhaltens von $g'(\tau)$ soeben unterschiedenen Falle wurde der Satz a. a. O. nicht sichergestellt.[1])

[1]) Vergl. Monatshefte für Mathematik und Physik, XI, S. 64. Der Beweis, welcher an dieser Stelle von mir für den i. J. angeführten Satz in dem in Nr. 2 behandelten Falle gegeben ist, kann nicht völlig befriedigen, wie ich im 3. Bande der Transactions of the American math. Soc. S. 33 bemerkt habe. Daselbst habe ich den genannten Satz zurückgeführt auf den von C. Jordan (Cours d'Analyse 2, éd. I, Nr. 193) aufgestellten Satz, daß eine in allen Punkten des Weges $\mathfrak{w}$ eindeutige und stetige Funktion $f(x)$ auf ihm integrierbar ist, wenn dieser Weg rektifizierbar ist.

Ich gebe daher hier einen einfachen Beweis desselben für den genannten Fall. Er stützt sich darauf, daß der Satz für den ersten Fall bereits erwiesen ist.

2. Durch Einschaltung von h steigenden Werten $\gamma_1\,\gamma_2\ldots\gamma_h$ zwischen α und β werde das Intervall (α, β) in die $h+1$ Teile $(\alpha, \gamma_1), (\gamma_1, \gamma_2)\ldots(\gamma_h, \beta)$ zerlegt, in deren jedem $g'(\tau)$ ausnahmslos d. i. mit Einschluß der Grenzen desselben stetig sei. Setzen wir $g(\gamma_s) = c_s$ $(s = 1 \ldots h)$ und bezeichnen die den soeben erwähnten Teil-Intervallen (α, γ_1) u. s. w. entsprechenden Stücke von $\mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{w}_0 \cdots \mathfrak{w}_h$, so erhalten wir durch Anwendung des obigen Satzes für den ersten Fall die $(h+1)$ Formeln

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a(\mathfrak{w}_0)}^{c_1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma_1} f(g(\tau))g'(\tau)d\tau \quad \int_{c_h(\mathfrak{w}_h)}^{b} f(x)dx = \int_{\gamma_h}^{\beta} f(g(\tau))g'(\tau)d\tau \\ &\int_{c_s(\mathfrak{w}_s)}^{c_{s+1}} f(x)dx = \int_{\gamma_s}^{\gamma_{s+1}} f\{g(\tau)\}g'(\tau)d\tau \cdot (s = 1, 2 \ldots h-1).\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Mit Hilfe derselben werde ich zeigen, daß die Summe der rechten Seiten der Gleichungen (6) d. i. das Integral (5) für J in die Ungleichung (3) eintreten darf. Der Beweis dafür wird indirekt geführt.

Angenommen, es gebe zu ε kein solches δ, daß, wenn nur ein jedes $\delta_r < \delta$ ist, die Ungleichung (3) Gültigkeit besitzt, so müßte zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl δ mindestens eine Schar von Teilen $\delta_1 \ldots \delta_n$, jeder kleiner als δ, die zusammen $\beta - \alpha$ ausmachen, und zu den einzelnen Teilen mindestens je eine Zahl τ_r so gehören, daß

$$\left|\sum_1^n{}_r f(x_r)(a_r - a_{r-1}) - J\right| > \varepsilon \quad (7)$$

ist. Ich bezeichne also im folgenden mit $\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_n$ bestimmte Teile von $\beta - \alpha$ und ebenso mit τ_r $(r = 1, 2 \ldots n)$ eine bestimmte Zahl im Intervalle (α_{r-1}, α_r).

Die Zahl γ_s falle in das Intervall $(\alpha_{i_s-1}, \alpha_{i_s})$ von der Länge δ_{i_s} und zwar sei

$$\gamma_s - \alpha_{i_s-1} = \varepsilon_s,\; \alpha_{i_s} - \gamma_s = \zeta_s, \text{ mithin } \delta_{i_s} = \varepsilon_s + \zeta_s.$$

Ist eine der Zahlen $\varepsilon_s\,\zeta_s$ Null, so ist die andere gleich δ_{i_s} selbst. Dies soll gelten für alle Werte $s = 1, 2 \ldots h$. Ist dann χ_s ein willkürlicher Wert des Intervalles (a_{i_s-1}, γ_s), w_s ein solcher des Intervalles (γ_s, a_{i_s}) und ist $g(\chi_s) = y_s\; g(w_s) = z_s$, so setze man

$$f(z_s)(a_{i_s} - c_s) + \sum_{i_s+1}^{i_{s+1}-1}{}^{r} f(x_r)(a_r - a_{r-1}) + f(y_{s+1})(c_{s+1} - a_{i_{s+1}-1}) = S_s. \quad (8)$$

Hier soll s außer den Werten $1 \ldots h$ auch den Wert 0 annehmen. Dabei sei $i_0 = 0 \quad i_{h+1} = n+1$, $c_0 = a \quad c_{h+1} = b$. Ferner sei

$$f(x_{i_s})(a_{i_s} - a_{i_s-1}) - f(y_s)(c_s - a_{i_s-1}) - f(x_s)(a_{i_s} - c_s) = d_s (s = 1, 2 \ldots h). \quad (9)$$

Schreiben wir für die rechten Seiten der Gleichungen (6) nacheinander $J_0\, J_h,\; J_1 \ldots J_{h-1}$ und lassen

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_{h-1} + J_h = \int_\alpha^\beta f\{g(\tau)\}\, g'(\tau)\, d\tau = J$$

sein, so finden wir

$$\sum_1^n{}^r f(x_r)(a_r - a_{r-1}) - J = \sum_0^h{}^s (S_s - J_s) + \sum_1^h{}^s d_s. \quad (10)$$

Da

$$\sum_0^h{}^s |S_s - J_s| + \sum_1^h{}^s |d_s| > \left| \sum_0^h{}^s (S_s - J_s) + \sum_1^h{}^s d_s \right|$$

ist, so ergibt sich aus der Gleichung (10) und der Beziehung (7), daß

$$\sum_0^h{}^s |S_s - J_s| + \sum_1^h{}^s |d_s| > \varepsilon$$

sein müßte. Bezeichnen wir mit $|d_t|$ die größte unter den h Zahlen $|d_s|$, so müßte demnach

$$h\,|d_t| \geq \varepsilon - \sum_0^h{}^s |S_s - J_s| \quad (11)$$

sein.

Wählen wir nun die positive Zahl λ kleiner als ε und ferner die positive Zahl $\varkappa$ so, daß

$$\varepsilon - (h+1)\varkappa > \lambda \text{ ist, also } \varkappa < (\varepsilon - \lambda) : (h+1). \qquad (12)$$

Zufolge des obigen Satzes (S. 22) für den ersten Fall entspricht der Zahl $\varkappa$ eine positive Zahl Δ_s in der Art, daß, wenn wir den Unterschied $\gamma_{s+1} - \gamma_s$ in Teile $\delta_{s,r}$ $(r = 1, 2 \ldots n_s)$ zerlegen und einen jeden von ihnen kleiner als Δ_s nehmen, alsdann

$$\left| \sum_1^{n_s} r\, f(x_{s,r})(a_{s,r} - a_{s,r-1}) - J_s \right| < \varkappa \qquad (13)$$

ist. Hierbei ist mithin

$$\gamma_{s+1} - \gamma_s = \delta_{s,1} + \delta_{s,2} + \ldots + \delta_{s,n_s}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{s,r} = a_{s,r-1} + \delta_{s,r} \\ a_{s,r-1} < \tau_{s,r} < a_{s,r} \\ g(a_{s,r}) = a_{s,r},\ g(\tau_{s,r}) = x_{s,r} \end{array}\right\} (r = 1, 2 \ldots n_s)$$

$$a_{s0} = \gamma_{s-1} \quad a_{s,n_s} = \gamma_s, \quad a_{s0} = c_{s-1} \quad a_{s,n_s} = c_s.$$

s selbst durchläuft die ganzen Zahlen von 0 bis h, wobei $\gamma_0 = \alpha$ $\gamma_{h+1} = \beta$ zu denken ist. Unter den Zahlen $\Delta_0 \ldots \Delta_h$ sei Δ die kleinste.

Stellen wir uns unter dem bisher willkürlichen δ irgend eine bestimmte Zahl, welche kleiner als Δ ist, vor, so könnte jedes der ihr entsprechenden $(h+1)$ Systeme von Zahlen ζ_s, $\delta_{i_s} \ldots \delta_{i_{s+1}-1}$, ε_{s+1} an die Stelle des mit dem nämlichen Zeiger s versehenen Systemes $\delta_{s,1} \ldots \delta_{s,n_s}$ treten. Daher hätten wir vermöge der Ungleichung (13) die $(h+1)$ Ungleichungen

$$|S_s - J_s| < \varkappa \qquad (s = 0, 1 \ldots h).$$

Somit wäre nach den Formeln (11) und (12)

$$h\,|d_\iota| > \varepsilon - (h+1)\varkappa > \lambda \text{ d. i. } |d_\iota| > \lambda : h. \qquad (13^*)$$

Bringen wir den Ausdruck (9) auf die Form

$$d_s = [f(x_{i_s}) - f(z_s)](a_{i_s} - c_s) + [f(x_{i_s}) - f(y_s)](c_s - a_{i_s-1})$$

und bemerken wir, daß für jeden Punkt x des Weges $\mathfrak{w}$ $|f(x)| < \Gamma$, somit für irgend zwei Punkte $x\,x'$ desselben $|f(x') - f(x)| < 2\,\Gamma$ ist, so finden wir, daß

$$|d_s| < 2\,\Gamma\{|a_{i_s} - c_s| + |c_s - a_{i_s-1}|\}$$

ist. Nehmen wir hier $s = \iota$ und beachten dann die Ungleichung (13*), so erkennen wir, daß

$$\lambda : h < 2\,\Gamma\{|a_{i_\iota} - c_\iota| + |c_\iota - a_{i_\iota-1}|\},$$

folglich

$$\lambda : 2\,h\,\Gamma < |a_{i_\iota} - c_\iota| + |c_\iota - a_{i_\iota-1}|$$

sein müßte. Demnach soll mindestens eine der Zahlen

$$|a_{i_\iota} - c_\iota|, \ |c_\iota - a_{i_\iota-1}|$$

größer als $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ sein. Das Ergebnis dieser Erörterung besteht also darin, daß wie klein man sich die Zahl δ auch denken mag, es mindestens ein vom Werte $\tau = \gamma_\iota$ ausgehendes Intervall, dessen Länge (ε_ι oder ζ_ι) kleiner als δ ist, geben würde, wofür die Differenz

$$a_{i_\iota} - c_\iota = g(a_{i_\iota}) - g(\gamma_\iota) \text{ bezw. } a_{i_\iota-1} - c_\iota = g(a_{i_\iota-1}) - g(\gamma_\iota)$$

dem Betrage nach größer als $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ ist. Das ist unmöglich. Denn aus der Stetigkeit der Funktion $g(\tau)$ bei $\tau = \gamma_\iota$ folgt, daß der Zahl $\lambda : 4\,h\,\Gamma$ eine positive Zahl μ so entspricht, daß, wenn nur

$$|\tau - \gamma_\iota| < \mu \text{ ist, dann } |g(\tau) - g(\gamma_\iota)| < \lambda : 4\,h\,\Gamma$$

ist.

Da sich mithin die S. 23 gemachte Annahme als unhaltbar erwiesen hat, so muß ihr Gegenteil zutreffen. Demnach läßt sich jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, daß die Ungleichung (3) besteht, wenn für J die Summe $J_0 + J_1 + \ldots + J_k$ gesetzt wird und jeder der Teile $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, welche zusammen $\beta - \alpha$ geben, kleiner als δ genommen wird.

3. Das Verfahren, durch welches in Nr. 2 ein indirekter Beweis zustande gebracht wurde, läßt sich auch bei anderen ähnlichen Anlässen verwenden z. B. um nachzuweisen, daß

eine jede reguläre Kurve (S. 22) rektifizierbar sei. Als solche möge eine Kurve

$$\xi = \varphi(\tau) \qquad \eta = \psi(\tau) \qquad (\alpha \leq \tau \leq \beta) \tag{14}$$

bezeichnet werden, wenn die Funktionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ für jeden Wert des Intervalles (α, β) stetig sind nnd wenn entweder das Nämliche für die beiden Differentialquotienten $\varphi'(\tau)\,\psi'(\tau)$ gilt oder das Intervall (α, β) so in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt werden kann, daß in jedem von ihnen $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ überall d. i. mit Einschluß der Grenzen desselben stetig sind. Setzt man

$$\xi + \eta i = x \qquad \varphi(\tau) + \psi(\tau) i = g(\tau),$$

so tritt an Stelle der zwei Gleichungen (14) die eine Gleichung (1).

Unter der Länge des durch die Gleichungen (14) dargestellten Bogens $a\,b$ versteht man die positive Zahl λ, welche die Forderung erfüllt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ in der Art gehört, daß stets

$$0 < \lambda - \sum_{1}^{n}{}_{r} \, | \, a_{r-1}\, a_r \, | < \varepsilon \tag{15}$$

ist, wenn nur ein jeder der zusammen $\beta - \alpha$ ausmachenden Teile $\delta_1 \ldots \delta_n$ kleiner als δ ist. Dabei bedeutet a_r $(r = 0, 1 \ldots n)$ wie S. 21 den zum Werte $\tau = \alpha_r$ gehörigen Punkt der Kurve (14).

Daß im Falle, daß $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ für jeden Wert von τ im Intervalle (α, β) stetig sind,

$$\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\, d\tau \tag{16}$$

habe ich a. a. O. B. II, S. 314 gezeigt.[1])

Liegt der zweite Fall vor, daß $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ nicht bei jedem Werte von τ im Intervalle (α, β) beide stetig sind, dieses Intervall jedoch so in $h + 1$ Teile (α, γ_1), $(\gamma_1, \gamma_2) \cdots (\gamma_h, \beta)$

[1]) Der dort vorgeführte Beweis läßt sich mit Hilfe einer von C. Jordan a. a. O. Nr. 111 gegebenen Formel etwas vereinfachen.

zerlegt werden kann, daß in jedem die beiden Funktionen $\varphi'(\tau)\,\psi'(\tau)$ ausnahmslos stetig sind, so darf man

$$\lambda = \sum_0^h {}_s \int_{\gamma_s}^{\gamma_s+1} \sqrt{\varphi'(\tau)^2 + \psi'(\tau)^2}\, d\tau \tag{17}$$

setzen. Und zwar weist man durch einen dem in Nr. 2 vorgeführten indirekten Beweise ganz ähnlichen nach, daß die soeben erwähnte Zahl λ die oben bei Ungleichung (15) aufgestellte Forderung erfüllt.[1]) Zufolge der Formel (17) besteht also auch in diesem Falle die Gleichung (16).

[1]) Auf eine andere Art habe ich die Formel (17) in den Transact. of the American math. Soc. III, S. 33 bewiesen und a. a. O. S. 303 auch aus der C. Jordan'schen Darstellung der Rektifikation der Kurven abgeleitet.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 4. Februar 1905.

1. Herr SIEGMUND GÜNTHER legt eine Abhandlung des Herrn Dr. JOSEPH REINDL: „Ergänzungen und Nachträge zu W. v. Gümbels bayerischem Erdbebenkatalog“ vor.

Dieser Katalog ist enthalten in den Jahrgängen 1889 und 1898 der „Sitzungsberichte“. Absolute Vollständigkeit wurde darin nicht angestrebt, vielmehr ausdrücklich betont, es soll nur ein „Rahmen“ für weitere Arbeit geschaffen werden. In diesem Sinne wurde nunmehr eine weitere Durchsuchung der zeitgenössischen Literatur vorgenommen und einerseits manch völlig Neues ermittelt, andererseits von Ereignissen, die v. Gümbel nur kurz namhaft zu machen in der Lage gewesen war, eine eingehende Schilderung ermöglicht. Dies gilt insbesondere von dem merkwürdigen Einsturzbeben bei Ebermannstadt (1625) und von dem ausgedehnten Riesbeben (1769). Die Liste der in Bayern wahrgenommenen Erderschütterungen wurde bis zur Gegenwart fortgeführt.

2. Herr HUGO v. SEELIGER überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. J. B. MESSERSCHMITT über: „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.“

Die vorliegenden, mit besonderer Unterstützung der K. Akademie ausgeführten Messungen bilden die Vorarbeiten zu einer magnetischen Landesaufnahme. Ein Vergleich mit den vor mehr als 50 Jahren von Lamont gemachten Beobachtungen hat das interessante Resultat ergeben, daß sich die magnetischen Elemente in den verschiedenen Teilen des Landes zwar

verschieden, aber systematisch geändert haben, so zwar, daß die magnetischen Kurven sich nicht nur verschoben, sondern dabei auch eine Drehung ausgeführt haben. Das genaue Gesetz dieser Änderung läßt sich jedoch erst nach Vollendung der ganzen Vermessung ableiten.

3. Herr August Rothpletz legt eine Arbeit von Professor Dr. Felix in Leipzig: „Über einige fossile Korallen auf Columbien“ vor.

Diese Korallen sind seinerzeit von Ihrer Kgl. Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern gesammelt worden und jetzt hat sich ergeben, daß eine neue Art darunter ist, die Professor Felix als Orbicella Theresiana beschrieben hat, und daß außerdem diese Korallen auf ein tertiäres Alter der Ablagerungen schließen lassen.

4. Herr August Rothpletz erstattet einen Bericht über die unter Aufsicht des Kustos Dr. Broili mit Unterstützung der Akademie veranstalteten Aufsammlungen permischer Fossilien aus Texas, deren wissenschaftliche Bearbeitung durch Herrn Dr. Broili jetzt abgeschlossen worden ist.

Es haben sich dadurch nicht nur eine Anzahl neuer Genera und Arten, sondern auch sehr interessante allgemeine Schlußfolgerungen über die Abstammung der Reptilien ergeben, die wahrscheinlich eine diphyletische ist.

Ergänzungen und Nachträge zu v. Gümbels Erdbebenkatalog.

Von Dr. **Joseph Reindl.**

(*Eingelaufen 4. Februar.*)

(Mit Tafel I.)

Den Anfang zu einem Erdbebenkatalog für Bayern gemacht zu haben, ist bleibendes Verdienst des nun verstorbenen Oberbergdirektors W. v. Gümbel.[1]) Daß dieser Katalog noch der Nachträge und Ergänzungen bedurfte, wußte v. Gümbel selbst nur zu gut, denn er schrieb: „Nicht als ob eine solche Liste irgend Anspruch auf auch nur annähernde Vollständigkeit erheben wollte, kann sie doch als weiter Rahmen dazu dienen, nach und nach die hier noch fehlenden Beobachtungen nachzutragen."

Wie v. Gümbel recht hatte, bestätigt wohl folgende Abhandlung, obwohl auch hier gleich wieder angefügt werden muß, daß weitere Nachträge nicht unausbleiblich sein dürften.

Nicht unerwähnt soll hier auch bleiben, daß mehrere, bereits schon erschienene Erdbebenarbeiten von Prof. S. Günther und dem Verf. als Beiträge zum Gümbel'schen Erdbebenkatalog aufzufassen sind.[2])[3])

---

[1]) v. Gümbel, Das Erdbeben am 2. Februar 1889 in der Umgegend von Neuburg a/D. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. XIX, Jahrg. 1889. — v. Gümbel, Über die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben. Sitzungsberichte etc., 1898, Bd. XXVIII.

[2]) S. Günther, Das bayer.-böhmische Erdbeben, 1329. Jahresbericht der Geogr. Gesellschaft in München, 1898, S. 76 ff. — S. Günther, Mün-

786.

Großes Erdbeben in Regensburg.[1])

849.

Erdbeben im ganzen Bodenseegebiet, namentlich zu Konstanz und auf der Insel Reichenau.[2])

1062.

Starke Erdstöße zu Regensburg.[3]) Dortselbst fielen infolge dieser Katastrophe viele Häuser ein.[3]) (Wahrscheinlich war dies dasselbe Beben, das am 8. Februar 1062 in Konstanz, Neuchâtel, Basel und anderen Orten der Schweiz verspürt wurde.)[4])

---

chener Erdbeben und Prodigienliteratur in älterer Zeit. Jahrbuch für Münchener Geschichte, 1890, S. 233 ff. — S. Günther und J. Reindl, Seismologische Untersuchungen. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIII, Heft 2, S. 631–669.

[3]) J. Reindl, „Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern". Sitzungsberichte der Münchener Akademie, math.-phys. Klasse, Bd. XXXIII, 1903, Heft 1, S. 171—204. — J. Reindl, „Die Erdbeben Bayerns in der geschichtlichen Zeit", Erdbebenwarte von Belar, 1903, Nr. 11 u. 12, 2. Jahrgang, 1903, S. 1–8. — J. Reindl, „Das Erdbeben am 5. und 6. März 1903 im Erz- und Fichtelgebirge mit Böhmerwalde, und das Erdbeben am 22. März 1903 in der Rheinpfalz". Geognostische Jahreshefte 1903, 16. Jahrg., München, S. 1–24, mit 2 Karten. — J. Reindl, „Die Erdbeben Bayerns im Jahre 1903". Geognost. Jahreshefte 1903, 16. Jahrg., S. 69—80. — S. Günther u. J. Reindl, „Seismologische Untersuchungen", siehe ad II. — Reindl, „Die Erdbeben Nordbayerns". Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft in Nürnberg, 1905.

[1]) Lang, Chronik von Regensburg, 1729, S. 320. v. Gümbel gibt nur allgemein an, daß in Bayern ein Erdbeben stattfand.

[2]) O. Volger, Untersuchungen über das Phänomen der Erdbeben in der Schweiz, I. Teil, Gotha 1857, S. 38. — Perrey, Mémoire sur les tremblements de terre ressentis dans le bassin du Rhône (in den Annales des sciences physiques et naturelles, d'agriculture et d'industrie publiées par la Société r. Agriculture etc. de Lyon 1845, p. 270 zit. Collection des Gaules par Dom. Bouquet VII, :p. 65, 207, 235, 272. — Dieses Beben wurde auch in der Schweiz wahrgenommen.

[3]) Chronik von Regensburg, 1729, S. 320.

[4]) Siehe Langenbeck, „Die Erdbebenerscheinungen in der ober-

1092.

Am 8. Februar Erdbeben in Konstanz und an den Ufern des Bodensees.[1]) (Vielleicht eine Verwechslung mit der Erschütterung vom 8. Februar 1062?)

1295.

Ende August oder Anfang September Erdbeben zu Kempten;[2]) dann im Bodenseegebiet, namentlich zu Konstanz.[3])

In diesem Jahre fanden mehrere heftige Erdstöße in den Rhätischen Alpen statt, welche sich nach Baden und in das Elsaß fortpflanzten. Daß dadurch auch das Bodensee- und Algäugebiet betroffen wurde, ist leicht erklärlich. Nur über die genaueren Daten herrscht große Unsicherheit. v. Hoff[4]) gibt an: „Ende August oder Anfang September Erdbeben in Konstanz, im Thuroner Bistum und in den Rhätischen Alpen. In Rhätien sollen 15 Schlösser zerstört worden sein.“ Volger[5]) berichtet dagegen von zwei Erdbeben in den Rhätischen Alpen, von denen das erste im April, das zweite Ende August oder Anfang September stattgefunden haben soll. Nach Langenbecks[6]) Untersuchungen ist es nun wahrscheinlich, daß ein Erdbeben hievon (das im April) im Elsaß und Breisgau, das andere (im August oder September) in Rhätien und Wallis seinen Ursprung hatte.

1348 und 1356.

Die beiden, in diesen Jahren stattgefundenen Beben, wurden eingehend behandelt von dem Verf. und Prof. S. Günther. Siehe: S. Günther und J. Reindl, „Die beiden großen Erdbeben des XIV. Jahrhunderts“, Seismologische Untersuchungen. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissen-

rheinischen Tiefebene“. Geogr. Abhandlungen aus den Reichslanden Elsaß-Lothringen von G. Gerland, I. Heft, S. 10, Stuttgart 1892.

[1]) Langenbeck, a. a. O., S. 10.

[2]) Kemptner Chronik von Schwarz.

[3]) A. v. Hoff, „Chronik d. Erdbeben u. Vulkanausbrüche“. Gotha 1840.

[4]) Ebenda.

[5]) Volger, a. a. O.

[6]) Langenbeck, a. a. O., S. 11.

schaften, Bd. XXXIII, 1903, Heft IV. Mit 2 Tafeln. München 1904. — Siehe ferner: J. Reindl, „Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern". Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie vom 7. März 1903, S. 171 ff.

1384.

Erdstöße zu Regensburg.[1])

1478.

Erdstöße zu Kempten vom 24. Februar 1473. Die Glocken auf den Türmen ertönten von selbst.[2])

1496.

Erdstöße zu Donauwörth und Ulm. Nach der Donauwörther Chronik vom Jahre 1802 soll das Beben seinen Ursprung zu Basel gehabt haben. Wahrscheinlich dürfte jedoch dieses Beben identisch mit jenem am 10. November 1498 zu Basel sein, denn sämtliche Erdbebenkataloge verzeichnen für das Jahr 1496 kein Erdbeben zu Basel. Selbst das letztere wird angestritten (siehe Langenbeck, a. a. O. S. 19), und wir behandeln also dieses Beben mit einiger Reserve. Die Möglichkeit ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß im Donaubruch selbst der Herd dieser Erschütterung lag, vielleicht bei Donauwörth, das am Kreuzungspunkt der Ries- und Donauspalte liegt und von jeher ein von Erdbeben oft heimgesuchter Ort ist.

1511.

In diesem Jahre fand eine starke Erderschütterung zu Burghausen[3]) in Oberbayern statt. „Hier hat ein starkes Erdbeben am 26. März die Stadt erschüttert." Wie viel oder wenig es indes geschadet hat, erzält Aventin, der damals mit den Prinzen Ernst und Ludwig und ihrer Mutter Herzogin Kunigunde in Burghausen anwesend war und uns den Vorgang folgendermaßen beschreibt: „Anno salütis 1511, VII.

[1]) „Der Sammler" (Augsburger Abendztg.) Nr. 44, S. 8.

[2]) Karrer, Beschreibung der Altstadt Kempten, 1828, S. 502.

[3]) J. G. B. Huber, Geschichte der Stadt Burghausen in Oberbayern. Burghausen 1862.

cal. aprilis, qui erat dies mercũrii ante laetare infra tertiam et quartam post mevidiem terremotũ sũbito et terribili hec corruerunt."[1])

„Ober Zili ganz zuerissen vnd ainstails nidergeworffen, daß man zue dem niedern Slos nit wonen mag."[2])

„In der andern burg alle gemach zerissen, an ainem ort nach dem Wasser in ainer stube ain außladung gantz hinabgeworffen. Das Capellel vor vnser stuben[3]) gantz zerissen, das gemeur zwischen der stuben vnd Capellen obn das gemeur von einander gerissen, daß die tramen an den Seilnpoden ain tail herabfallen welln. Im Kloster[4]) vnd an der Kirchen grossen schaden gethan. Der schepachin ir Haus gantz zerrissen ainßtheils vmbgeworfen. Hañß scheuchen seine gewelb zuerrissen. vil schaden den leuten an heuser allenthalben gethan, den leuten ain merklichs schaden gethan, dan zu Zeit hat ain stain etwans ainß troffen von den meurn die dan allenthalben zuerissen sein. Hat nyemant vor forcht jm schlos pleiben wellen, die Hertzogin iß zvo nacht herauf in des statrichters haus gelegen, man hat gemeint die welt wol zergern oder das ort da ein ytlichs gewesen ist. Die paurn vnd volk zur vil ende auff das veld vnd vil ende den pergen zuegelauffen."[5])

Nach v. Gümbel fand am 27. März 1511 zu Nördlingen und an anderen Riesorten ein Erdbeben statt. Auch die Erdstöße zu Burghausen dürften am 27. März stattgefunden und ihren Herd wohl in Kärnten gehabt haben; denn nach Höfer[6]) bebte am 27. März die Erde heftig in Kärnten, Görz

---

[1]) Zu Deutsch: Im Jahre des Heiles 1511 am 26. März, welcher der Mittwoch vor Lätare war, stürzte zwischen 3 und 4 Uhr nachmittags plötzlich durch ein schreckliches Erdbeben folgendes zusammen.

[2]) Unverständlich. Es ist nur klar, daß ein Teil der Burg gemeint ist.

[3]) Die Fürstenzimmer gemeint.

[4]) Raitenhaslach? In der Stadt war noch kein Kloster.

[5]) Wiedemann, Dr. Theod. Johann Thurmair. Freising, Datterer, [illegible], S. 349—50.

[6]) Höfer, Die Erdbeben Kärntens und deren Stoßlinien. Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, math.-naturw. Klasse, 42. Band (1880), S. 10 ff.

und Gradisca, im Friaul (Gemona) und im Triester Küstenlande (Muggia); in Tolmein brachen zwei befestigte Schlösser zusammen.

1542.

Nach Schwarz fanden in diesem Jahre zwei Erdbeben zu Kempten statt: „diß Jahrs waren alhie 2 Erdbiden der 1. und 3. Hornung zwischen 10 und 11 Uhr nachts, der 2. den 8. Novembris vmb 9 Uhr vormittag".[1]) Zorn verzeichnet dagegen nur eines. „1542 wurde zu Kempten eine starke Erderschütterung verspürt."[2]) Diese Beben scheinen keine große Ausdehnung gehabt zu haben, da hierüber aus anderen Gebieten Europas keine Nachrichten vorliegen.

1600.

„Am 11. November 1600 wurde zu Kempten eine starke Erderschütterung verspürt, welche ohne Schaden vorüberging."[3]) Auch dieses Beben scheint lokaler Natur gewesen zu sein.

1625.

v. Gümbel bezeichnet nach v. Hoff[4]) ohne nähere Datumsangabe für dieses Jahr zu Ebermannstadt ein Erdbeben. (Siehe auch „Dreßdnische Gelehrte Anzeigen", 1756, Nr. 2, S. 25.)

Weitere Forschungen ergaben hierüber ein sehr interessantes Resultat. Im Besitze des Herrn Antiquars Ludwig Rosenthal in München fand sich ein sehr wertvolles Flugblatt, das jene Katastrophe vom 22. Februar 1625 (richtig ist 4. März 1625) veranschaulicht, und das wir für diese Abhandlung reproduzieren ließen.[5]) (Siehe Abbildung.) Dem Flugblatt war eine

[1]) Städtische Chronik von Kempten von Schwarz.

[2]) Johann Zorn, Sammlung der merkwürdigsten Ereignisse in der ehemaligen Reichsstadt Kempten. Kempten 1820, S. 50.

[3]) Ebenda S. 57.

[4]) Dieses Originalblatt bleibt im Besitze des Herrn Rosenthal.

[5]) v. Hoff, Chronik der Erdbeben (Geschichte der natürlichen Veränderung der Erdoberfläche, IV. Teil, 1840), S. 282; v. Gümbel, Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften, XIX. 1889, S. 92.

kurze Erläuterung angefügt, die wir hier wiederholen wollen. Sie lautet:

„Demnach dieser Wunderberg, so im Bisthumb Bam-
„berg / zwischen Ebermañstatt vnd Gaiseldorff / auff der
„lincken Hand ligt / vnd die Trudenleiden genañt wird /
„hiervor Dienstags den 22. Februarii, dieses instehenden
„1625 Jahrs / zwischen 10 vnd 11 vhr vormittags durch
„sonderliche Wirkung sich mit schrecklichem Krachen
„vnd geprassel auffgethan vnd von einander gerissen hat /
„also daß die vmbwohnenden solches mit großer forcht
„vnd schrecken / angehört und gesehen / wie dañ die täg-
„liche Erfahrung mit sich bringt / daß sich derselbe
„noch immer vnd augenscheinlich von oben herab sencken /
„vnd fort schieben thut / vnd auch gegen Thal die Felder /
„so er antrifft in die höhe hebt / vnd gleichsam auss
„der Ebnen Berg vnd Hügel macht / wie dañ auß bey-
„gedruckter Figur mit mehrem vmbständig zu sehen ist.
„Es haben sich auch allbereit auff bemeldtem beweg-
„lichem theil des Bergs / so bey die 20. Morgen oder
„Jauchert in dem Vmbkreiß helt / vnd begreifft / bey
„200 Baumen von geschlachten vnd wilden Obssfrüchten
„versenkt / Zu Boden gerissen / vnd gar verschüttet.
„Derohalben dieser Berg / so vorhin mit Menschen vnd
„Vieh ohne gefahr besucht vnd genossen worden / nicht
„mehr wegen der erschröcklichen felsrissen / Klüften vñ
„Steinritzen kan betryben werden."

Zur Erklärung der Abbildung (paßt selbstverständlich auch auf unser Bild) ist dem Flugblatt folgende Notiz beigefügt:

A. Der noch stehende theil deß Berges / so eben ein grosse Ebne / hoch vnd lang hindurchsich hat / welcher vornen nach langst der Klufft in gestalt einer auffgesetzten Mawren anzusehen ist / als die von grossen harten Marbel oder Kalksteinen zugericht were / vnd sich auff 1000 Werckschuh in die läng erstrecken thut.

B. Das ander theil dess Bergs / so sich abgerissen vnd in̄ die 50.—60. biss auf 70 Werckschuh weit von dan̄en gegen dem Thal hinab geschoben / vnd diese grosse Klufft eröffnet hat.

C. Semdhauffen grosser auffeinanderstehender stuck Steinen / in gestalt zerfallener Gemäwer / so in erstbemeldeter grosser Klufft absonderlich ledig vnd frey stehen.

D. Drey Kirschbaum / welche gleichsam des Berges warzeichen sind, stehen oben an der schärff der Klufft.

E. Viel hundert vnterschiedliche tieffe Erdklüften / so in dem gesenckten theil des Berges / hin vnd wider gesehen werden.

F. Flachsrösten / so mit Wasser angefüllt / vnd doch von dem Berg (vngeacht sie fast mitten inliegen) mit fort geschoben / vnd doch nicht verschütt oder vmbkehrt werden.

G. Ist das vnterste theil deß Bergs / der sich noch täglich über die Felder fortscheubt / vnd dieselben bedecken thut.

H. Der Gehnsteig von Gaiseldorf nach Ebermanstatt / so vom Berg verschütt worden.

J. (I) Ein tieffer Holweg / darvon der schiebende Berg unfern gelegen / vnd künfftig denselben auch erreichen mögte.

K. Ebermanstatt.

L. Gaiseldorff (Gasseldorf).

M. Rotenbühl / am Kreusenberg.

N. Ein hoher felsiger Berg / so nebst an Gaiseldorff gelegen.

Das Flugblatt ist in Nürnberg bei Hans̄ Philipp Walch erschienen.

Eine nähere Betrachtung des Bildes zeigt, daß man es hier ohne Zweifel mit einer ganz ansehnlichen Geländeverschiebung zu tun hat. Vielleicht durch unterirdische Auslaugung, wie es in diesen Kalkgegenden sehr häufig

vorkommt, entstand eine über 300 m lange und bis zu 10 bis 12 m tiefe Erdspalte. Damit verbunden und hervorgerufen wurde ein sogenannter Bergsturz oder Bergschlipf,[1]) indem der lockere, auf den festen Gesteinsmassen aufliegende Boden aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und abwärts getrieben wurde. Diese Abwärtsbewegung dauerte, wie aus der beigefügten Erläuterung des Flugblattes zu ersehen ist, noch Tage lang fort, ein Zeichen, daß unsere Annahme für einen Bergschlipf wohl stichhaltig sein dürfte.

Dafür, daß wir es hier gleichzeitig auch wohl mit einem Einsturzbeben zu tun haben, spricht der Umstand, daß sich zahlreichere kleinere Spalten und Gruben, die sich bei der Katastrophe bildeten, mit Wasser füllten, welch letzteres nur aus einem unterirdischen Behälter herrühren konnte, da zu jener Zeit kein Regentag war.

Auch Herr Oberbergrat Dr. Ludwig v. Ammon ist unserer Ansicht, und schon in seinem älteren Werkchen „Kleiner geologischer Führer durch einige Teile der fränkischen Alb“ (Exkursion von Mitgliedern der Deutschen geologischen Gesellschaft in den Frankenjura, Septbr. 1899) berichtet er hierüber: „In der Literatur wird von einer Erderschütterung berichtet, die sich im Jahre 1625 in Ebermannstadt begeben haben soll. Diese Angabe wäre, wenn ein eigentliches Erdbeben vorläge, von Interesse, da der ganze mittlere und nödliche Teil des fränkischen Juragebirges von einigermassen bemerkbaren Erdbewegungen in historischer Zeit fast völlig unberührt geblieben ist. Am Südrande des Jurazuges, insbesondere im Riesgebiet und in der Donauwörther Gegend, sowie in dem Striche östlich davon entlang der Donau, kamen dagegen öfters Erderschütterungen und zwar manchmal nicht so unbedeutende, wie dies verbürgte Nachrichten beweisen, vor. Jene Angabe über Ebermannstadt aber ist offenbar auf den großen Bergrutsch zu

---

[1]) Hiefür vgl. Penck, „Morphologie der Erdoberfläche“, I. Bd., Stuttgart. — Ferner S. Günther, „Bergstürze und Bergschlipfe“, Geophysik, II. Teil, Stuttgart 1897.

beziehen, der am 4. März 1625 bei Gasseldorf sich ereignet hat. Auf dem Ornatenton sind die schweren Bergmassen abgerutscht."

Da dieses Einsturzbeben (selbstverständlich ist an kein tektonisches Beben zu denken!), begleitet von einem gewaltigen Bergsturze, in der Nähe von Gasseldorf sich ereignete, kann dieses Beben auch „Gasseldorfer-Beben" genannt werden; jedoch ist auch die Bezeichnung „Erdbeben bei Ebermannstadt" nicht unrichtig, weil letzterer Ort doch der größte der Umgegend ist und das Beben ferner in der alten Literatur auch als solches bezeichnet ist.

Interessant über jenes Einsturzbeben und den davon hervorgerufenen Bergsturz ist auch folgende alte Flugschrift:

„M Zachariae Theobaldi, Einfältiges Bedenken, „was von dem Bergfall zu halten, welcher sich in vn-„serer Nachtbarschaft an den Berg (die Trutleiden ge-„nandt) zwischen Ebermanstadt vnnd Gayseldorff, Bam-„bergischen Gebietes, gelegen, anfänglich den (22. Febr.) „4 Martii, zwischen 10. vnd 11. Vhr, vormittag, dieses „1625. Jahrs, begeben, vnd noch ferners continuiret. „Nürnberg, Gedruckt bei Simon Halbmayern."

1652.

Am 4. Februar fand ein ziemlich heftiges Erdbeben in den Kantonen Basel, Zürich und Schaffhausen statt. Dieses Beben wurde auch in Lindau im Bodensee wahrgenommen.[1])

1666.

Am 1. September Erdstöße im Bodenseegebiet (Volger, a. a. O., S. 103). Langenbeck schreibt hierüber: „Am 1. September fand zu Arbon am Bodensee ein Erdbeben statt, infolgedessen der See 25—30 Fuß über seine Ufer trat, sich aber rasch wieder zurückzog." (Langenbeck, a. a. O., S. 26.)

---

[1]) Langenbeck, a. a. O., S. 25. — Chronik von Lindau, 1798, S. 58.

1667.

Am 30. Juni zwei leichte Erdstöße zu Salzburg und Reichenhall.[1])

1669.

Am 30. September leichter Erdstoß zu Kissingen, Würzburg und Aschaffenburg.[2])

1670.

Am 7. Juli 1670 fand in den Alpenländern (Schweiz und Tirol)[3]) ein heftiges Beben statt, das auch in ganz Bayern wahrgenommen wurde. Hierüber liegen folgende Nachrichten vor:

1. „Die im Jahre 1670 zu Augsburg verspürte, von Innsbruck herkommende Erderschütterung machte sich am 7. Juli um 2 Uhr nachts auch in Regensburg stark bemerkbar und setzte die Einwohnerschaft in Schrecken, doch ist kein Schaden an den Gebäuden geschehen." [4]) [5])

2. In Donauwörth schlugen die Hausglocken an.[6])

3. Am 5. (?) Juli (wahrscheinlich 7. Juli) 1670 zwischen 2 und 3 Uhr wurde in Kempten eine starke Erderschütterung verspürt.[7])

4. Ferner liegen über diese Erschütterung Nachrichten vor von Nürnberg, Lindau, Memmingen, München, Nördlingen.[8])

1687.

„Anno 1687 hat man abends um 6 Uhr den 8. Oktober in Regensburg ein Erdbeben vermerkt." [9])

[1]) v. Gümbel, Sitzungsberichte vom 2. März 1889, S. 92. — Chronik von Reichenhall.

[2]) Mülb, Merkwürdigkeiten Nürnbergs, 1756.

[3]) Volger, S. 104 u. 105.

[4]) „Der Sammler", Nr. 44, S. 8 der Augsburger Abendztg.

[5]) Chronik von Regensburg, 1729, S. 321.

[6]) Volger, S. 105.

[7]) Zorn, Chronik von Kempten, S. 82.

[8]) Volger, a. a. O. — S. Günther und J. Reindl, Seismologische Untersuchungen, S. 644. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, München 1904.

[9]) Chronik von Regensburg, 1729, S. 322.

1690.

Am 4. und 5. Dezember (24. November alten Stils) wurden ausgedehnte Gebiete der Alpen, Süd- und Mitteldeutschlands von bedeutenden Erderschütterungen betroffen.[1] In Bayern wurden folgende Orte davon berührt:

Zu Kempten war das Beben so heftig, daß die Glocken auf den Türmen ertönten.[2] Ferner wurde es gespürt zu Gunzenhausen, Nördlingen, Rothenburg o. T., Bayreuth, Bamberg, Nürnberg, Regensburg, Straubing, Augsburg, München, Kulmbach, Passau.[3]

1703.

Am 6. Mai leichtes Erdbeben in Nördlingen, Frankfurt a/M. und Hanau.[4]

1720.

Am 20. Dezember 5 Uhr 30 Min. morgens wurde die nordöstliche Schweiz und die Umgebung des Bodensees von einem ziemlich heftigen Erdbeben betroffen. Besonders fühlbar war dasselbe in St. Gallen, Thurgau, Appenzell, Konstanz, Reinegg, Lindau. In den beiden letzteren Orten stürzten mehrere Häuser ein. Auch in Kempten wurde die Erschütterung noch gespürt.[5]

1728.

Am 3. August 1728 abends 5 Uhr wurde zu Kempten eine starke Erderschütterung wahrgenommen.[6]

[1] Siehe Langenbeck, a. a. O., S. 29 u. ff. Höfer, Die Erdbeben Kärntens und deren Stoßlinien. Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, math.-naturw. Klasse, 42. Bd. (1880).

[2] Karrer, Beschreibung und Geschichte der Altstadt Kempten. Kempten 1828.

[3] Volger, S. 118, 119. Chronik von Regensburg, 1729, S. 321. — Wolf, Urkundliche Chronik von München, 1854. — Ebner, Sammelblätter zur Geschichte der Stadt Straubing, Nr. 164, 166. — J. Reindl, Die Erdbeben Bayerns, Erdbebenwarte Nr. 11 u. 12, II. Jahrg., Laibach 1903.

[4] Michel, Beiträge zur Öttingischen politischen, kirchlichen und gelehrten Geschichte, I. Teil. Öttingen 1779. — Langenbeck, S. 32.

[5] Langenbeck, S. 32. — Volger, S. 136. — Zorn, Chronik von Kempten, 1820, S. 98.

[6] Zorn, a. a. O., S. 100.

An diesem Tage wurde die ganze oberrheinische Tiefebene und ein Teil der Schweiz erschüttert. Auch von den bayerischen Orten Speyer, Aschaffenburg und Nördlingen liegen Nachrichten vor.[1])

1733.

Am 18. Mai 2 h. p. fanden zu Würzburg, Aschaffenburg, Frankfurt a/M., Mainz, Offenbach, Hanau, Gießen, Butzbach und benachbarten Orten drei Erdstöße statt. Die Erschütterung war stark genug, um in den oberen Stockwerken der Häuser freistehende Gerätschaften zu bewegen und die Balken krachen zu machen. In Mainz war sie am stärksten, so daß die Glocken anschlugen und mehrere Schornsteine umfielen.[2])

1752.

Am 21. Januar 1752 war ein großes Erdbeben in Mittelberg und im Walsertal (Algäu).[3])

1755.

Das Erdbeben zu Lissabon vom 1. November 1755 wurde auch in München wahrgenommen. Der „Patriot“, eine Wochenschrift, gibt eine genaue Darstellung hierüber. „Es war im späteren Herbste“, schreibt er, „an einem sehr heiteren und windstillen Tage, als im Augenblicke ein so gewaltiger Stoß geschah, daß davon in vielen Häusern die Fenster geöffnet wurden. Die Erschütterung dauerte nicht viel über eine Sekunde. Die lange Gartenmauer zwischen dem sogenannten Augustinerstocke und der Augustinerkirche war dadurch umgeworfen, doch so, daß sie fast unzerbrochen, so wie sie gestanden, da lag, und gleichsam von der Kirche und dem angebauten Hause abgeschnitten schien. Das Kupferdach von

---

[1]) S. Günther und J. Reindl, Seismologische Untersuchungen, S. 645. — Langenbeck, S. 33 und J. Boegner, Das Erdbeben und seine Erscheinungen. Frankfurt a/M. 1847, S. 109.

[2]) Langenbeck, S. 34. — Steuber, Chronik von Würzburg, 1801. S. 163.

[3]) Aus dem Buche „Der Mittelberg von Fink und Klenze“.

der gerade gegenüberstehenden St. Michaelskirche war auf einer Seite ganz zusammengerollt, und nach ein paar Tagen äußerte sich nochmal früh nach 7 Uhr eine starke Erschütterung in dem Gymnasium bey den Herren P. P. Jesuiten, welche unter den in der hl. Messe versammelten Studenten Schrecken und Unordnung erregte". (Siehe: Der „Patriot in Bayern", eine Wochenschrift, München 1769, S. 97, 7 Stück. „Gedanken über die in München und ganz Bayern den 4. August verspürte Erderschütterung, und über das Erdbeben überhaupt.")

Das Riesbeben im Jahre 1769.

(Siehe Abbildung.)

Wir haben es hier mit einem Beben zu tun, das ohne Zweifel sein Epizentrum im Ries hatte. Dieser Umstand, sowie die eingehenden Berichte aus damaliger Zeit über diese Erschütterung veranlassen uns, eine zusammenfassende Darstellung darüber zu geben. Interessant sind die Nachrichten, die der „Patriot", eine Wochenschrift aus dem Jahre 1769, brachte. Er schrieb:[1])

„Die Erderschütterung in München am 4. August 1769 war so gefährlich wie die vor 15 oder 16 Jahren in hiesiger Hauptstadt.[2]) Ihre Dauer (die Erschütterung am 4. August 1669) war hier in München 1½ Sekunden, nachmittags zwischen 4 und 5 Uhr. Der Himmel war heiter, das Wetter sehr heiß, und es herrschte eine ziemliche Windstille vor und nach der Erschütterung. Die Stöße waren sehr fühlbar, und man soll dieses Erdbeben, welches von Westen hergekommen, weit im Lande herum gemerkt haben. Erst den 5. in der Nacht änderte sich der Himmel, und es ließ sich ein Donnerwetter mit unschädlichen Blitzen merken, das von einem heftigen Winde und starkem Regen begleitet wurde."

---

[1]) Der „Patriot in Bayern". Eine Wochenschrift, München 1769, S. 97, 7. Stück. „Gedanken über die in München und ganz Bayern den 4. August verspürte Erderschütterung und über das Erdbeben überhaupt."

[2]) Der „Patriot" erinnert hier wohl an das große Lissaboner Beben vom 1. November 1755. Wie sich diese Erschütterung in München bemerkbar machte, haben wir oben bereits dargelegt.

„In Donauwörth haben wir nach der Hand folgende wichtige Nachricht in einem Briefe erhalten. Die Stöße waren daselbst ungemein stark. Das Erdbeben dauerte beiläufig 10 Sekunden. Verschiedene Häuser bekamen Ritze, zwey Häuser wurden gespalten, die Ziegel von vielen Dächern herabgeworfen, und 3 Kamine eingestürzt. Einen Augenblick vor der Erschütterung hörte man ein Donnern, und während demselben war das unterirdische Getöse sehr deutlich zu vernehmen. Die Luft war den Tag über ruhig, nur eine Stunde vorher strich ein Wind von Westen gegen Osten, und von daher schien auch das Erdbeben zu kommen. Am Himmel waren zerstreute Wetterwolken. Unmittelbar nach dem Beben war die Höhe des branderischen Universalthermometers 13 ½ Grade über den Punkt des temperierten Wetters."

Vom Kloster Indersdorf stammt folgende Kunde:[1])

„Im hiesigen Kloster war am 4. August, 10 Minuten nach 4 Uhr nachmittags eine zweyfache gegen 10 Sekunden dauernde Erschütterung so heftig, daß ein großer Marmor zersprang, die Brunnquellen einige Stunden zurückblieben, und die zum morgigen Gottesdienste bestimmten musikalischen Instrumente ihren natürlichen Ton verloren, ja schon jeder wegen des entsetzlichen Getöses glaubte, sein Grab unter dem Schutte zu finden. In 3 Hofmarchen wurde zwar nur ein, aber so gewaltiger Stoß verspürt, daß bei einigen Einwohnern die Tische und Bänke bewegt, die Küche und Kellergeschürre wohl merklich gerührt, und die offenen Fenster mit Gewalt zugestossen wurden; ja sogar die Schnitter auf dem Felde, welche eben zum Abendbrote ganz ruhig sassen, hob das Beben empor, und warf selbe unter sich. Unsere Wohnung war so stark erschüttert, daß die in einem gläsernen Kasten verwahrten Tischzeug-Schalen, Thee, dann andere theils gläserne, theils porcellannene Trinkgeschürre einen dem Glockenspiele ähnlichen Ton hören ließen. 3 Handwerker in verschiedenen Orten liefen für Schrecken aus ihren Häusern; denn selbe zitterten solcher-

---

[1]) Der „Patriot", Stück 8, S. 123.

gestalten, daß bei einem der Arbeitszeug von der Werkstatt fiel, bey dem andern das Wasser aus dem im Zimmer gestandenen Schäffl heraus schwankte, und bey dem dritten (er war ein Schlosser) der schwere Ambos sichtbare Bewegung machte. In einem ohnweit entlegenen Schlosse spielte man, und die Marken hüpften auf dem Tische so wunderlich durcheinander, daß die Spielenden gleich das Lusthaus verließen. In dem bekannten Kloster Taxa tönten die Glocken, die Bücher der Bibliothek fielen aus ihren Stellen, und alle leichten Geschürre stürzten zusammen, die Ordensgeistlichen aber ergriffen die Forcht und Flucht. Ohngeachtet der damaligen Windstille fielen die in sogenannte Mändl aufestellte Garben zu Boden, und die hier vorbeylaufend 2 kleinen Flüsse warfen die größten Fluthen, und Fische von sich. Die Blumentöpfe in den Gärten stürzten zusammen, und die Springbrunnen trieben das Wasser über ihren ordentlichen Lauf höher. Bey einem Wirt zersprangen 2 Fässer weißen Biers, und ein Weber von 30 Jahren, der zur Arbeit saß, fühlte in seinem Munde einen solchen Stoß, daß er glaubte, alle seine wohlgesetzten Zähne auf einmal verloren zu haben. Andere, sonderlich stehend- oder fahrende Personen, die diese Bewegung nicht achteten, überfiel eine fast sterblich- aber sehr kurze Bewegungsohnmacht, also zwar, daß viele darnieder sanken. An dem hiesigen Magneten hat man beobachtet, daß selber sein gewöhnliches Gewicht von 12 Pfunden entlassen, und die Barometer auf den höchsten Grad gestiegen, auch die zur Elektricität dienliche Glocken einige Zeit nach dem Erdbeben in Bewegung gestanden. An einigen Orten hörte man ein unbeschreibliches Brausen, wobey Feuer zum Vorscheine kam. Die Wälder weisen viele abgesprengte Bäume, doch sind nirgends einige Häuser außerordentlich beschädigt worden. Das Wunderlichste ist, daß man diese Erschütterung nicht an allen Orten, auch nicht überall gleich, ja sogar, wer unter einem Dache wohnte, stärker, leichter, oder gar nicht bemerkte." . . . .

Nach den Aufzeichnungen des Pfarrers in Schöffelding bei Landsberg am Lech wurde auch dort die Erschütterung

wahrgenommen. Dieser schrieb in sein Kirchenbuch: „Anno 1769, den 4. August wurde allhier ein Erdbeben gespüret. Die Häuser wurden erschüttert und kracheten. An einigen Orten scheinete es, als schießete man. Einige Leute laufeten aus den Häusern. Viele verstunden nicht, was dies wäre, die Erde thäte sich bewegen, wie ein Wiegen. Die zweyte Erschütterung, welche man befürchtete, erfolgte nicht mehr."[1])

Am 4. August 1769 nachmittags 4 Uhr wurde auch in Kempten eine heftige Erderschütterung verspürt, die 14 Sekunden anhielt.[2])

Für das Ries, dem eigentlichen Herd der Erschütterung, entnehmen wir aus Michel,[3]) Beiträge zur Öttingischen politischen, kirchlichen und gelehrten Geschichte, I. Teil, Öttingen 1779, S. 75 ff., folgenden interessanten Bericht: „1769 ♀ den 4. August Nachmittag gleich nach 4 um ein Viertel auf 5 Uhr verspürte man in unsern Gegenden abermalen ein Erdbeben. Der Stoß erschütterte fast die ganze Stadt Öttingen, daß viele Leute taumelnd aus den Häusern gelaufen, das Geflügel in einigen Höfen in die Höhe geflogen, auf dem Rathhaus die Glocken anschlugen u. s. f., wobey besonders auf dem Hauptthurm der Stadt, auf dem Thurm bei St. Jakob, nicht das mindeste davon bemerkt worden, da es doch rings umher das fürstl. Schloß und übrige Häuser merklich erschütterte. — In Harburg war das Erdbeben noch fühlbar, und bemerkte man das Getöse sowohl vor als während der Erschütterung weit stärker, als in Öttingen, wie es auch gegen 9 Sekunden, fast ein paar Sekunden länger gedauert hat. Zu Donauwörth verspürte man mehrere Stöße, und eine Andauer von 10 Sekunden. Verschiedene Häuser bekamen Ritze, und 2 Häuser wurden gespalten, die Ziegel von vielen Dächern herabgeworfen,

[1]) Bayerland, 1893, S. 131.

[2]) Aus dem Buche „Der Mittelberg von Fink und Klenze". Gütige Mitteilung von Seite des Herrn Prof. Max Förderreuther aus Kempten.

[3]) Michel, Beiträge zur Öttingischen politischen, kirchlichen und gelehrten Geschichte, I. Teil, Öttingen 1779, S. 79 ff.

und 3 Kamine eingestürzt. Einen Augenblick vor der Erschütterung hörte man einen Donner, und während demselben war das unterirdische Getöse sehr deutlich zu vernehmen."

Aus den „Nördlingischen Wöchentlichen Nachrichten von 1769" war ersichtlich: „Den 4. August war Morgens um 8 Uhr die Wärme 14. Grade, die Höhe des Barometers bis an den Mittag 26' 11" und der Himmel im dritten Grade heiter. Bis gegen 4 Uhr Nachmittag fiel der Merkur im Barometer 1 Linie. Bald nach 4 Uhr führten mich Geschäfte durch einige Straßen. Dazumal bemerkte ich zwischen dem Westlichen Horizont und dem Zenith eine gleich ausgebreitete schwarzgraue Wolke, welche mich an die von P. Bina beschriebene Wolke erinnerte, die man kurz vor dem Erdbeben so oft beobachtet hat, unerachtet ich erst nach 7 Uhr erfuhr, daß man eine Bewegung der Erde wahrgenommen habe. Die Luft war dazumal nicht ganz stille, aber auch nicht sehr merklich in Bewegung. Das Barometer fand ich um halb 5 Uhr wie zuvor 26 Zoll 10 Linien hoch. Das Erdbeben wurde bekanntlich gegen $^1/_2$5 Uhr Nachmittag vornehmlich in einigen gegen Morgen liegenden Straßen bemerkt. Ein Krachen der Gebäude, ein Schwanken, welches mehr im Sitzen als im Stehen fühlbar wurde, erschreckte die Inwohner, die zum Teil aus Vorsicht ihre Häuser verließen. Auf dem Kirchthurme, der unter die hohen gehört, will man nichts wahrgenommen haben, aber doch in einigen gegen Abend gelegenen Häusern, z. B. im Wirtshaus zum Kreuz. In dem hohen und starken Hause, so ich bewohne, ward kein Merkmal der Erschütterung beobachtet, ungeachtet es dem gedachten Wirthshause ganz nahe steht. In Alerheim, Wemdingen, Harburg und Donauwörth wurde die Bewegung merklicher. In Harburg fielen die Kamine ein. In Donauwörth bewegte sich eine Glocke, so, daß sie läutete. Ein Tönen der Glocke wurde auch in Bopfingen gehört, daselbst jemand nicht sowohl ein Schwanken oder Erschüttern des Hauses, als etwas gewaltsames in seinen Gliedern fühlte, welches er mit dem elektrischen Stoße verglich. Seit 80 Jahren ist dieses Erdbeben das vierte, so man in Nörd-

lingen bemerket.[1]) Die Ursache der Erschütterung ist nach der gemeinen Meinung, welche Herr Hollmann noch unlängst mit neuen Gründen zu unterstützen gesucht hat, ein unterirdisches Donnerwetter. Die Erscheinungen, welche verschlossenes und entzündetes Schießpulver macht, der Versuch des Lemerz mit einer Vermischung von Eisenfeile, Schwefel und Wasser, welche sich erhitzet und die Erde in die Höhe gehoben hat, darunter sie vergraben war, die Gewalt, mit welcher sich erhitzte Luft und Dünste ausdehnen, und Gefäße, worin sie verschlossen sind, zersprengen, die Wirkungen des Blitzes und ähnliche Erfahrungen leiteten die Naturkundigen auf diese Ursache hin."

Diese Art und Weise, über eine doch sehr rasch verlaufene Naturerscheinung zu referieren, zeichnet sich in ihrem Streben nach Genauigkeit vor anderen Gepflogenheiten früherer — und auch späterer — Zeit aus. Das Erdbeben wurde nach v. Gümbel im westlichen Bayern an vielen Orten, nirgends aber in sehr großer Entfernung von der Gegend, wo es sich am entschiedensten betätigte, bemerkt. Er schreibt (v. Gümbel, a. a. O., S. 95): „Am 4. August 4 Uhr heftige Stöße während 17 Minuten zu Augsburg, Günzburg, Ulm, Nürnberg. Das große Erdbeben zu Eichstätt und Berching vom Jahre 1769 dürfte damit zusammenfallen."

Ohne Zweifel gehörte das Epizentrum dieses Bebens dem Ries selbst an. Wahrscheinlich lag der Herd zwischen Donauwörth und Harburg, wo die Wörnitzspalte die Donauspalte kreuzt.

---

[1]) „Das erste geschah 1690 den 24. November. Unser Bentilius schrieb damals Disquisitio de terrae motu, A 1690. Sueuiam et confinia quatiente cet. Das zweite war 1728, den 3. August zwischen 4 und 5 Uhr. Straßburg war gleichsam der Mittelpunkt der Erschütterung. Ich sehe aus einem Aufsatz Doktor Joh. Salzmanns, daß die Luft vor dem Erdbeben sehr heiß, aber windstill gewesen ist und daß innerhalb 14 Stunden sieben Stöße, wiewohl von ungleicher Stärke aufeinander gefolgt sind. Das dritte, dessen Andenken noch nicht erloschen ist, entstand den 18. Februar 1756 (vielleicht auch am 9. Dezember 1755)."

Schütterzone des Riesbebens vom 4. August 1769.

1771.

„1771 war ein Erdbeben. Man merkte es drei Tage lang jeden Morgen im Walsertale (Algäu).“ (Aus dem Buche „Der Mittelberg von Fink und Klenze“.)

Wahrscheinlich waren diese Erschütterungen um die Zeit des 11. August. Langenbeck berichtet hierüber nämlich (a. a. O., S. 39): „Am 11. August 9^h a. wurden im Schwäbischen in einem Gebiete von 60 Meilen Länge und 30 Meilen Breite mehrere Erdstöße verspürt, die so heftig waren, daß der Gottesdienst unterbrochen werden mußte. Besonders werden folgende Orte namhaft gemacht, in welchen sich dieselben geäußert: Augsburg, Memmingen, Schaffhausen, Stuttgart.“ Auch im Ries wurde dieses Beben wahrgenommen. (Siehe S. Günther und J. Reindl, „Seismologische Untersuchungen“, a. a. O., S. 648.)

1774.

Am 10. September wurden die Schweiz und die angrenzenden Teile von Frankreich und Deutschland wieder von einem heftigen Erdbeben erschüttert, dessen Epizentrum nach Volger und Langenbeck jedenfalls nahe bei Altdorf am Vierwaldstätter See lag.

Aus folgenden bayerischen Ortschaften liegen diesbezügliche Nachrichten vor: Kempten, Augsburg, Nördlingen, Ansbach, Nürnberg, Regensburg, München. Zeit: Zwischen 4 und 5 Uhr nachmittags.

(Siehe Volger, a. a. O., S. 207—215. — Zorn, a. a. O., S. 114. — Sammler der Augsburger Abendzeitung, Nr. 44, S. 8, 1903. — Günther und Reindl, „Seismologische Untersuchungen“, S. 649.)

1776.

Am 19. Dezember wurde in Speyer ein Erdstoß verspürt. (Langenbeck, a. a. O., S. 40.)

1784.

Am 5. Juni zwischen 12 und 1^h p. fand in Caub ein Erdstoß statt, welcher auch in der Pfalz wahrgenommen wurde. (Langenbeck, a. a. O., S. 41.)

1787.

Am 27. August fand ein heftiges Beben statt, das seinen Sitz im Rheinischen Grabenbruch hatte. In fast ganz Bayern wurde dieses Beben wahrgenommen, und zwar zu Kempten, Augsburg, Dillingen, Donauwörth, Harburg, Monheim, Pappenheim, Ansbach, Regensburg, Landshut. In München waren deutlich zwei Stöße zu unterscheiden, und geriet die Magnetnadel in heftige Bewegung ($12^h\ 55^m$). Vom 26. August wird um 1^h a. ein Stoß aus Peißenberg gemeldet, es handelt sich dabei aber wohl um dasselbe Ereignis, und liegt nur ein Irrtum im Datum vor.[1])

1796.

Am 3. und 4. März ein Erdstoß zu Ulm.[2]) Dieser wurde das ganze Donautal entlang bis Neuburg verspürt. In Lauingen fing der frei am Marktplatze stehende „Schimmelturm" stark zu wackeln an, zu Dillingen läuteten die Glocken der Kirchen von selbst, und zu Donauwörth und Neuburg merkte man deutlich eine wellenartige Bewegung des Bodens.[3])

1820.

Am 17. Juli abends $7^1/_2$ Uhr (v. Gümbel gibt $7^1/_2$ Uhr „morgens" an) ziemlich starkes Beben zu Innsbruck.[4]) Zu Schwaz wurde zu derselben Zeit eine von N. nach S. verlaufende Bewegung des Bodens beobachtet, und von der Pfarrkirche von Schwaz wurde ein Quaderstein weithin auf die Straße geschleudert, Gewölbe und Mauern der Häuser wurden mitunter arg beschädigt.[5]) Zu Kufstein und Rosenheim wurden die Stöße gleichfalls wahrgenommen.[6])

[1]) Zorn, a. a. O., S. 116. — Volger, S. 225—226. — Langenbeck, S. 42. — Günther und Reindl, S. 650.

[2]) u. [3]) v. Gümbel, Sitzungsberichte, 1889, S. 96. — Chronik von Lauingen und Donauwörth.

[4]) v. Gümbel, a. a. O., S. 97.

[5]) „Aus der Geschichte der Schwazer Majoliken-, Steingut- und Tonwarenfabrik (1801—1902)", bearbeitet von Frz. Wieser, Schwaz 1903, S. 104.

[6]) Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, Wien 1882, S. 32.

1837.

Erdstöße zu Lindau und Konstanz am 24. Januar 2h 30m. (Langenbeck, a. a. O., S. 50—53.)

1851.

10. März 4h 13m ab. Erdststöße zu Lindau, Konstanz, Schaffhausen und Zürich. (Langenbeck, a. a. O., S. 56.) — 24. August gegen 2h a. zwei Erdstöße zu Kempten und Lindau.[1] Nach Langenbeck wurde um diese Zeit die westliche Schweiz und die angrenzenden Teile von Deutschland, Frankreich und Italien von einem Erdbeben erschüttert, das jedoch trotz seiner ziemlich weiten Verbreitung nicht sehr heftig gewesen zu sein schien und jedenfalls nirgends erheblichen Schaden anrichtete. Sein Ausgangspunkt scheint im mittleren Wallis gelegen zu sein, wie auch Volger annimmt. Am stärksten äußerte es sich jedenfalls im Rhonetal, in Lavey, wo einige Decken Risse bekamen und auch die Thermen eine um 3° höhere Temperatur zeigten, zu Martigny und einigen anderen Orten. Auch in Unterwalden wurde es noch ziemlich heftig empfunden; die Häuser krachten stark und hier und da fielen einige Gegenstände von den Gesimsen. Ferner wurde es wahrgenommen in den Kantonen Schwyz, Genf, Waadt, Freiburg, Bern, Solothurn, Basel, Zürich, im Süden in Lugano und Como, in Frankreich noch ziemlich stark in Lyon und dem ganzen Rhone-Departement, schwächer in den Departements Ain, Saône et Loire, Jura, Doubs. In Basel wurden zwei merkliche Stöße gespürt, der erste gegen 1h a., der zweite stärkere 2h 10m a., von dem viele Personen aus dem Schlaf geweckt wurden. In Badenweiler wurden gegen 2h mehrere Stöße wahrgenommen, welche einige Sekunden andauerten.

1853.

Am 26. Mai 7h 43m a. zwei ziemlich starke Erdstöße in Passau und in der Umgegend. (Gütige Mitteilung von Herrn Rippel.)

---

[1] Chronik von Kempten.

Am 25. Juli dieses Jahrhunderts ereignete sich das bekannte Walliser Erdbeben, das heftigste, welches im vorigen Jahrhundert das mittlere Europa betroffen hat. Dasselbe ist am eingehendsten untersucht von Volger in dem 3. Band seiner „Untersuchungen über das Phänomen der Erdbeben in der Schweiz". Weitere Beschreibungen lieferten Nöggerath, Perrey, Bourlot und Langenbeck.[1])

Wir führen hier nur Nachrichten von bayerischen Orten an:

Zu Lindau ward am 25. Juli wenige Minuten nach 1 Uhr ein schwaches Erdbeben verspürt. Gleichzeitig in mehreren anderen Orten des Bodensee-Ufers. Auf den vorhergehenden heißen und schwülen Tag war bei bedecktem Himmel plötzlich, und doch ohne Gewitter, eine Abkühlung erfolgt. Nach der Erschütterung begann bei scharfer südwestlicher Luftströmung ein heftiger Platzregen. Die Erschütterung schien von Südwesten gegen Nordosten gerichtet zu sein.

Daß die Fortpflanzung des Erdbebens keineswegs in der Nähe des Bodensees ihr Ende erreichte, ergibt sich aus der folgenden Nachricht.

Irsee (nordnordwestlich von Kaufbeuren). „Da über das Erdbeben vom 25. dieses Monats aus unseren Gegenden keine Beobachtungen mitgeteilt wurden, so berichte ich einige Worte darüber. Die Erschütterung fand nachmittags etwas nach 1 Uhr statt und dauerte 6—8 Sekunden. Die Richtung ging ziemlich deutlich von Südost gegen Nordwest. Arbeiter, welche eben auf dem Dache der Anstalt (Irrenanstalt, im ehemaligen Stifte — V) mit dessen Ausbesserung beschäftigt waren, sahen auf einmal die Türme der daneben stehenden Kirche schwanken und, als sie sich in dieselbe begaben, die Glockenschwengel noch in Bewegung. Im Innern der Kreis-Irrenanstalt, sowie im Orte Irsee, empfanden viele Personen, namentlich im Stehen und Sitzen, weniger im Gehen und Liegen, die Erschütterung. Am deutlichsten verspürten sie diejenigen, welche an einen Tisch, eine Kommode oder ein Fenstergesims ange-

[1]) Siehe Langenbeck, S. 58—68.

lehnt standen. Die Türen versperrter Schränke knarrten und bewegten sich, als ob etwas versuche, sie von innen heraus aufzusprengen. Hängende Gegenstände, Scheeren und dergleichen, fingen an, zu schwingen; Spiegel schwankten und Blumenstöcke auf den Fenstersimsen verrückten sich. Die Witterung war hier wie anderwärts: um die Zeit der Erschütterung bewölkter Himmel, mäßiger Wind, ein paar Stunden darauf, nach 3 Uhr, Eintritt eines heftigen und anhaltenden Regens." [1])

Zu Ingolstadt hat man dieselbe Erschütterung mit Bestimmtheit wahrgenommen. Der Turm der Frauenkirche schwankte stark.[2]) Ferner wurden die Stöße verspürt zu Donauwörth, Harburg und Bissingen.[3])

Auch im Markt Calmberg bei Ansbach wurde dieses Beben im naheliegenden Schlosse verspürt. (Gütige Mitteilung von Seite der Frau W. Schmidt. — Brief liegt in den Erdbeben-Akten des geogr. Seminars im Polytechnikum München.)

Aus der Pfalz liegt nur von Zweibrücken eine Nachricht vor, daß dort das Erdbeben wahrgenommen worden sei.[4])

1858.

Am 24. Mai gegen 7^h p. traten in Mainz zwei (oder drei) heftige Erdstöße ein, welche die Richtung S.-N. hatten. Ein paar Schornsteine stürzten ein, mehrere Gebäude erhielten Risse; Uhren standen plötzlich still, verschiedentlich zerbrachen Glas- und Porzellangefäße, die Glocken der St. Quentinskirche schlugen von selbst an, und der Boden erzitterte sichtlich. Diese Stöße wurden noch wahrgenommen in Oppenheim, Mannheim, Speyer, Epstein und Wiesbaden. (Siehe Katalog von Nöggerath und Chronik von Speyer.)

---

[1]) Augsburger Allgemeine Zeitung, Nr. 209, 28. Juli, und Nr. 211, 31. Juli, Beilage.

[2]) Nöggerath, Die Erdbeben im Visptale, S. 32. — Favre, Arch. des sc. phys., p. 319.

[3]) S. Günther und J. Reindl, a. a. O., S. 651.

[4]) Langenbeck, S. 61.

1859.

Am 28. April morgens 8h Erderschütterungen zu Kufstein und Schwaz. In letzterem Orte wurde das Beben in der K. K. Tabakhauptfabrik beobachtet, wo mehrere Personen aus dem Gleichgewicht kamen.[1])

1862.

Zu Salzburg und Zell am See am 27. Mai 1862 1h 12m nach Mitternacht zwei Erdstöße und wellenartige Erdbewegungen. Richtung W.-O.[2])

1865.

21. Januar. In Kundl wurden um 1h 40m mittags unter donnerähnlichem Getöse nacheinander mehrere Erdstöße gespürt.

22. Januar. Wiederholung des Erdbebens in Kundl.

24. Juli. Zwei Erdstöße in Innsbruck.

6. November. Im Unter-Inntal empfand man um 5h 43m morgens einen Erdstoß in der Richtung von N. nach S. Besonders wurden Innsbruck, Schwaz, Rattenberg und Kufstein betroffen.[3])

6. November. Anno 1865 den 6. November einige Minuten vor 6h früh wurde in Immenstadt ein Erdstoß bemerkt. Er war so bedeutend, daß viele Schlafende plötzlich erwachten und ob der heftigen Erschütterungen ihrer Bettstellen, dem Geklirre der Fenster, der Bewegung der Türen und ihren Angeln verwundert umherschauten und sich dann selbst sagen mußten: Das war ein Erdbeben. Auch aus Kufstein, Rosenheim und Innsbruck wird von dieser Erderschütterung gemeldet.[4])

---

[1]) Wieser, Zur Geschichte der Schwazer Majoliken-, Steingut- und Tonwarenfabrik etc. Schwaz 1903, S. 104. — Himmler, Beiträge zur Geschichte Kufsteins. Innsbruck 1863, S. 15.

[2]) Höfer, a. a. O., S. 27.

[3]) Zeitschrift des Deutschen u. Österreich. Alpenvereins, 1872, S. 2.

[4]) Handschriftliche Aufzeichnungen im Besitze des Schöllanger Bauern. Gütige Mitteilung von Seite Herrn Prof. Max Förderreuther aus Kempten.

1868.

25. Dezember. Nachts Erderschütterung in Innsbruck.[1])

1869.

1. Erdstöße zu Ludwigshafen und Neustadt a. d. H. am 31. Oktober $5^h\ 26^m$ m.

2. Erdstöße am 1. November $11^h\ 50^m$ p. zu Brückenau bei Würzburg und zu Zweibrücken.

3. 2. November $9^h\ 28^m$ p. Erdstoß in Kaiserslautern.

Diese Erschütterungen hängen mit dem großen Rheinischen Beben vom 31. Oktober bis 2. November 1869 zusammen.[2])

1870.

Erdstöße in der Umgebung des Bodensees im Monat März, und zwar am 5. März $10^h\ 30^m$ a., am 6. 2^h a. und 11^h a. in Markdorf, am 18. $5^h\ 10^m$ a. und $6^h\ 45^m$ a. in Friedrichshafen und Markdorf, am 21. abermals in Markdorf. Mehrere der Stöße waren ziemlich heftig, so daß Bilder an der Wand und Vogelkäfige schaukelten und die Vögel von den Stäben herabgeworfen wurden. Durch den Stoß vom 6. März 2^h a. wurden die Bewohner Markdorfs aus dem Schlafe geweckt und eilten erschrocken auf die Straße.[3])

19. April. $12\,{}^1/_2{}^h$ nachts heftiger Erdstoß in Kundl.

20. April. Wiederholung des Erdbebens in Kundl.

30. April. 11^h nachts abermals Erdstoß in Kundl.

1. Mai. Gegen Abend kamen in Kundl wieder Erderschütterungen vor, die sich über einen großen Teil des Unter-Inntales erstreckten.

26. Mai. $1^h\ 15^m$ nachts Erdbeben mit dumpfem Getöse in Innsbruck und Hall.[4])

---

[1]) Zeitschrift des Deutschen u. Österreich. Alpenvereins, 1872, S. 3.

[2]) Siehe eingehende Darstellung: Nöggerath, „Die Erdbeben im Rheingebiet in den Jahren 1868, 1869 und 1870". Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preußischen Rheinlande und Westfalens, XXVII, 1870. — Ludwig, „Das Erdbeben in der Umgebung von Darmstadt und Groß-Gerau". Darmstadt 1869.

[3]) Langenbeck, S. 68 u. 69.

[4]) Zeitschrift des Deutschen u. Österreich. Alpenvereins, 1872, S. 4.

1872.

Am 5. März 1872 heftiges Erdbeben zu Wunsiedel.[1])

1873.

„Am 29. Juni 1873 wurde morgens 5^h in Kempten sowie in der Umgegend ein von S. nach W. sich ziehendes Erdbeben verspürt, das ca. 2—3 Sekunden dauerte und keinen Schaden brachte.“ [2])

Gümbel meldet: Am 29. Juni 5^h morgens großes Erdbeben von Beluno, welches auch in Salzburg, Rosenheim, Tegernsee und München $4^h\ 56^m$ wahrgenommen wurde.[3])

1876.

Am 2. Dezember $1^h\ 30^m$ p. wurde in Friedrichshafen a. B. ein Erdstoß gespürt.[4])

1877.

Am 2. Mai $8^h\ 40^m$ und 9^h p. Erdstöße in der östlichen und mittleren Schweiz und an den Ufern des Bodensees, besonders zu Friedrichshafen.[5])

1879.

5. Dezember. Erdstöße zu Lindau. An diesem Tage fand ein heftiges Erdbeben statt, das wahrscheinlich seinen Herd bei Basel hatte.[6])

Am 13. Dezember wurde dann ein leichter Erdstoß zu Dinkelsbühl wahrgenommen, der eine Richtung von unten nach oben hatte. Wie dem Verfasser Herr Roser mitteilte, wurde der Stoß gegen halb 8 Uhr abends verspürt. Am Schulhause und an der Kirche fiel der Mörtel von den Mauern, und zahlreiche andere Gegenstände, wie Krüge, Bilder u. dgl. fielen von

[1]) „Der Bote aus den 6 Ämtern“, Nr. 55, S. 1 vom 7. März 1903.

[2]) Kemptner Stadtchronik von Höschel.

[3]) Gümbel, a. a. O., S. 101.

[4]) Langenbeck, S. 77.

[5]) Ebenda, S. 77.

[6]) Augsburger Abendztg. 1879 vom 8 Dezbr. — Verhandl. d. naturwissenschaftl. Vereins in Karlsruhe, VIII, 1881, F.-S. 307, 320, [illegible]. — Langenbeck, S. 79. — Gütige Mitteilung von Herrn Lehrer [illegible]

selbst um. Die Wörnitz soll am darauffolgenden Tage noch eigentümlich trübe gewesen sein; selbst im benachbarten Wassertrüdingen habe man den Erdstoß wahrgenommen.

1880.

Am 3. Januar abends $7^h\,15^m$ in Mittenwald in SW.-NO.-Richtung ein Erdstoß mit donnerähnlichem Rollen. Im südlichen Teil des Ortes wurden 2 Stöße wahrgenommen. Die Bewegung war an Tischen und Bänken bemerkbar. Viele Leute eilten bestürzt aus den Häusern. Auch in Partenkirchen wurde die Erscheinung gleichzeitig wahrgenommen.[1])

Am Abend des 24. Januar 1880 wurde der mittlere Teil der Oberrheinischen Tiefebene und die benachbarten Gebiete der Hardt, der Vogesen und des Schwarzwaldes, sowie ein großer Teil von Württemberg von einem ziemlich heftigen Erdbeben erschüttert. Über die Zeit des Eintritts desselben liegen zwei genaue astronomische Zeitbestimmungen vor, von Karlsruhe $7^h\,40^m\,55^s$ mittlere Karlsruher Zeit und von Straßburg $7^h\,39^m\,52^s$ mittlere Straßburger $= 7^h\,42^m\,25^s$ mittlere Karlsruher Zeit. Die übrigen Zeitangaben sind nach Langenbeck weniger zuverlässig, stehen aber im allgemeinen mit den beiden angegebenen wohl in Einklang.

Das erschütterte Gebiet umfaßt den östlichen Teil der Rheinpfalz, den Nordostzipfel des Elsaß, das nördliche Baden etwa bis Offenburg im S. und einen Teil von Württemberg. Die am stärksten erschütterten Orte zerfallen in zwei Gruppen, welche durch ein Gebiet geringerer Intensität voneinander getrennt sind. Die erste Gruppe umfaßt die Orte Rülzheim, Neupfotz, Hördt, Mörlheim, Billigheim, Langenkandel, Wörth in der Südostecke der Pfalz, die Rheininsel Elisabethwörth bei Germersheim, Rusheim, Stafforth, Leopoldshafen, Eggenstein, Neureuth, Daxlanden auf dem gegenüberliegenden badischen Rheinufer. Zum zweiten Hauptschüttergebiet zählen folgende Orte: Bühlertal, Hirschbachtal, Brandmatt, Obertsroth, Plättig

[1]) Gütige Mitteilung von Herrn Kaplan Schwaier. Brief liegt in den bereits erwähnten Erdbebenakten des geographischen Seminars.

bei Herrenwies im mittleren Schwarzwald. In allen diesen Orten war die Erschütterung so heftig, daß viele Bewohner erschreckt auf die Straße stürzten, um dem befürchteten Einsturz der Häuser zu entgehen. Auch erhielten an mehreren dieser Orte Häuser Risse, so in Langenkandel, Rülzheim und auf dem Plättig. An letzterem Punkt sahen im Freien befindliche Leute den Boden sich etwa zwei Fuß heben und schnell wieder senken. Im Hirschbachtal stürzte ein Heuschober um. Auf dem Wege zwischen Wörth und Langenkandel gehende Arbeiter taumelten stark. Das eigentliche Epizentrum des Erdbebens nimmt die badische Erdbebenkommission in dem durch die Orte Langenkandel, Rülzheim, Neupfotz und Billigheim bestimmten Gebiete der Pfalz an. Dasselbe liegt etwa in der Mitte des größeren Haupterschütterungsgebietes; auch wurde in diesen Orten der Stoß bestimmt als ein vertikaler empfunden. Die Heftigkeit der Erschütterung in den angegebenen Orten des mittleren Schwarzwaldes wird durch die Tatsache erklärt, daß dieselben sämtlich auf dem als guten Leiter von Erschütterungen bekannten Granit liegen, welcher vielleicht mit dem als Grundlage der Rheinebene hypothetisch angenommenen Granit in direktem Zusammenhang steht.

Was eine weitere Verbreitung des Erdbebens betrifft, so wurde dasselbe wahrgenommen im Odenwald: In Mannheim und Heidelberg, beide auf Granit gelegen; in der Rheinebene auf der linken Rheinseite in Speyer, Germersheim, Landau, Niederlauterbach, Sultz, Selz, Sesenheim, Straßburg; auf der rechten Rheinseite in Philippsburg, Bruchsal, Karlsruhe, Durlach, Mühlburg, und zahlreichen benachbarten Orten, Ettlingen, Rastatt, Renchen, Begelshurst; auf der Hardt längs des ganzen Randes von Dürkheim bis Weißenburg, außerdem in Annweiler; in den Vogesen in Dambach, Windstein und Lichtenberg; im Schwarzwald in Baden-Baden, Bühl, Saßbachwalden, Kappelrodeck, dem ganzen Renchtal, Ortenburg und Ohlsberg im Kinzingtal. Sehr ausgedehnt war die Verbreitung des Erdbebens ferner in Württemberg. Es wurden hier nicht nur die Orte am Ostabfall des Schwarzwaldes wie Bauschlott (sehr

stark), Haihingen, Pforzheim, Dobel, Gaistal, Hirsau (sehr stark), Liebenzell, Wildberg u. a. betroffen, sondern auch zahlreiche Orte des Neckargebietes, unter anderen Ludwigsburg, Cannstatt, Stuttgart.

Schallerscheinungen waren mit dem Erdbeben an den meisten Orten verbunden. Am stärksten waren dieselben in den beiden Haupterschütterungsgebieten, wo sie als donnerartiges Krachen oder als furchtbares unterirdisches Getöse bezeichnet werden. An den anderen Orten wurde meist nur ein dumpfes Rollen oder Brausen vernommen.

Am folgenden Tage fanden noch weitere Erschütterungen statt: Zwischen 3 und 4^h a. in Rheinzabern, Neupfotz, Leimersheim, Hördt, Billigheim, Weißenburg, Langenkandel, Wörth, Hochstetten, Friedrichstal, Leopoldshafen, Eggenstein, Neureuth, Maxau, Karlsruhe, Plättig, Bühlertal; zwischen 10 und 11^h p. in Hochstetten, Leimersheim und Minfeld, um Mitternacht in Eggenstein, Neureuth und Maxau. Alle diese Orte gehören den beiden Haupterschütterungsgebieten an oder liegen ihnen sehr nahe. (Bericht der badischen Erdbebenkommission, bestehend aus den Herren Prof. Jordan, Prof. Knop, Prof. Sohnke, Wagner. Verh. der naturw. Ver. in Karlsruhe, 1881; Eck, Bemerkungen über das rheinisch-schwäb. Erdbeben vom 24. Januar 1880, D. G. G. XXXVIII, 1886.)

Am 4. Juli wurde fast die gesamte Schweiz $9^h 20^m$ a. von einem ziemlich heftigen Erdbeben erschüttert, das von der Monte Rosa-Gruppe ausging. In unserem Gebiet wurde dasselbe nur um $9^h 30^m$ a. in Konstanz, Friedrichshafen, Stockach etc. gespürt. (Heim, Die Schweizer Erdbeben der Jahre 1878—1880. Jahrbuch des tellurischen Observatoriums in Bern, 1881.)[1])

1886.

Am 13. Oktober $7^h 45^m$ wurde das ganze Nordufer des Bodensees von einem Erdbeben betroffen.[2])

---

[1]) Siehe auch Langenbeck a. a. O.

[2]) Siehe eingehend: Eck, im Jahresberichte des Vereins f

1902.

13. Mai. Erdstöße bei Kronach 1^h nachm.[1])

26. November umfangreiches Erdbeben in der Oberpfalz.[2])

1903.

In diesem Jahre fanden zahlreiche, mitunter sehr heftige Erdstöße in Bayern statt. Diese Erderschütterungen wurden von mir eingehend verfolgt und behandelt. Siehe:

1. J. Reindl, „Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern". Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIII, 1903, Heft I, S. 171 mit 203.

2. J. Reindl, „Das Erdbeben am 5. und 6. März 1903 im Erz- und Fichtelgebirge mit Böhmerwalde und das Erdbeben am 22. März 1903 in der Rheinpfalz". Geognostische Jahreshefte 1903, 16. Jahrgang, S. 1—25, mit 2 Karten.

3. J. Reindl, „Die Erdbeben Bayerns im Jahre 1903". Geognostische Jahreshefte 1903, S. 69—76. — Siehe auch Beilage zur Allgemeinen Zeitung, Nr. 296, vom 30. Dezbr. 1903.

4. S. Günther u. J. Reindl, „Seismologische Untersuchungen". Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIII, Heft IV, S. 631—670, mit einer Karte.

5. J. Reindl, „Die Erdbeben im nördlichen Bayern". Unterhaltungsblatt des Fränkischen Kuriers, Nr. 71, vom 4. September 1904.

1904.

I. Januar.

6. Januar. Erdstöße zu Kufstein zwischen 9 und 10^h vormittags.[3])

ländische Naturkunde in Württemberg, Bd. 43, 1887. Bericht der bad. Erdbeben-Kommission, 1887.

[1]) „Die Erdbebenwarte", Monatsschrift von Belar. Laibach 1903, Jahrgang III, Nr. 3, 4, 5, S. 86.

[2]) Siehe eingehend: J. Reindl, „Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern". Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie, Bd. XXXIII, 1903, Heft I, S. 171—203.

[3]) Am gleichen Tage war um diese Zeit eine Erderschütterung in Süd-tirol. (Siehe eingehend: Augsburger Abendztg., Nr. 8, vom 8. [illegible]

7. Januar. Erdbeben in der Umgebung von Erkersreuth früh zwischen 2 und 3^h. Die Augsburger Abendzeitung vom 9. Januar 1904, Nr. 9 schrieb: „Selb, 7. Januar. In der Nacht vom Dienstag auf Mittwoch war früh zwischen 2 und 3^h in der Umgebung von Erkersreuth ein Erdbeben mit einem heftigen Stoß, dem kurz hintereinander ein etwa 2 Sekunden lang währendes Rollen folgte, zu vernehmen. Kurz nach dem Vorgang folgte ein etwa eine Viertelstunde anhaltender Oststurm." (Siehe auch Bayerischer Kurier, Nr. 12, vom 10. Januar, S. 3.)

8. Januar. Drei Erdstöße um $10^1/_4{}^h$ nachts zu Rosenheim. Richtung S.-N.

12. Januar. Erdstöße zu Füssen. Der Bayerische Kurier, Nr. 14, vom 14. Januar 1904, S. 3 schrieb: „Füssen. Erdbeben. Heute früh $7^h 20^m$ wurden hier zwei Erdstöße verspürt, so daß selbst kleinere Gegenstände zu wackeln anfingen. Die Stöße kamen von unten nach oben, und verursachten ein kanonenschußartiges Getöse. Auch in Oberstdorf sollen die Stöße verspürt worden sein." (Siehe auch Kemptner Tagblatt.)

Telegraphische Anfragen ergaben nachfolgende Einzelheiten:

Ort	Zeit	Richtung der Stöße	Zahl der Stöße	Dauer derselben	Stärke nach der Forel. Skala
Füssen	7^{20} früh	Unten nach Oben	2	3 Sek.	4—5
Nesselwang	7–8 „	Wellenförmig von S.-N.	2	—	3
Oberstdorf	7^{30} „	Unten nach Oben	3—4	—	3
Sonthofen	7^{23} „	—	2	—	2–3

16. Januar. Ziemlich heftige Krustenbewegungen vollzogen sich ferner wieder zwischen 10 und $10^1/_2{}^h$ abends zu Selb und Erkersreuth, desgleichen im nahen Asch, wo auch der Ausgangspunkt der Stöße gewesen sein muß, denn der Hofer Anzeiger berichtet über die Heftigkeit der Erschütterung folgendes: „Asch, 18. Januar. Die Erdstöße werden in unserer Gegend wieder häufiger und stärker. In der Nacht vom 16.

zum 17. Januar wurden hier und in der Umgebung um 10^h und 10^h 45^m Erdstöße verspürt, von denen namentlich der letztere besonders heftig war. Nach Meldungen, die aus Neuberg, Oberreuth und Gürth vorliegen, war diese letztere Erdbewegung eine wellenförmige; sie dauerte etwa 10 Sekunden lang. Heute früh (18. Januar) um 7^h 36^m waren hier zwei kurze, ruckartige, aber ganz besonders starke Stöße wahrzunehmen. In vielen Häusern, namentlich in solchen, die auf felsigem Grund gebaut sind, hörte man deutlich die Fensterscheiben klirren, und in den Schränken klapperten die Gegenstände."

19. Januar. Die Neuesten Nachrichten schrieben (Nr. 29 vom 20. Januar, S. 9):

„Leipzig, 19. Januar. (Erdbeben.) Aus dem ganzen südlichen Vogtland und den sächsisch-bayerischen Grenzorten laufen Meldungen von starken Erdstößen ein.

II. Februar.

Die Bodenzuckungen in Bayern waren auch im Monat Februar ziemlich häufig, und schon der 2. des genannten Monats war mit solchen an der Nordgrenze des Vaterlandes empfindlich bedacht. Das Illustrierte Münchner Extrablatt vom 4. Februar schrieb, Nr. 28 S. 4:

2. Februar. Eine heftige, von West nach Ost gehende Erderschütterung konnten wir heute morgen 4^h beobachten, und gestern Nacht leuchtete über eine halbe Stunde — zwischen 11 und 12^h — ein intensives Nordlicht.

9. Februar früh 7^h wurde zu Selb ein leichter Erdstoß wahrgenommen, und zwar in der Richtung Nord-Süd. Wahrscheinlich war es eine Stoßwelle aus der Gegend von Plauen und Freiberg, wo um diese Zeit eine ziemlich kräftige Dislokation stattfand. (Siehe Neueste Nachrichten vom 14. Februar, Nr. 73, S. 5.)

11. Februar. Viel kräftiger noch mag das Beben in Aschaffenburg gewesen sein, das bis nach Hanau, Frank-

furt a/M. und Rothenburg o/T. seine Wellen aussandte. Der uns zugegangene Hauptbericht lautet hierüber:

„Aschaffenburg, 11. Februar. Die ganze Umgebung von Aschaffenburg wurde von mehreren Erdstößen heimgesucht. Der heftigste Erdstoß war am 11. Februar früh 6^h, so daß die Bewohner ganz erschreckt aufwachten und manche aus den Häusern liefen. Ein unterirdisches Rollen von Nord nach Süd war vernehmbar. Um 8^h am gleichen Tage wiederholte sich das Stoßen, doch von unten nach oben, und diesmal war das Geräusch so, wie wenn ein Kanonenschuß ertönen würde. Auch tags zuvor, um $9^1/_2{}^h$ nachts, hörte man solche Töne, und verspürte ein heftiges Stoßen, das sich öfters wiederholte. Die Haustiere wimmerten, manche Hunde bellten infolge des Schreckens furchtbar. Auch die Hausglocken läuteten von selbst, und Gegenstände, die leicht beweglich waren, fielen um.“ [1])

Am 12., 18., 22., 26. und 29. Februar morgens wurden im Saaletale wiederholt Erderschütterungen verspürt, die sich durch heftige Stöße von Nord nach Süd bemerkbar machten. Namentlich zu Naila in Oberfranken (am 12. Februar) und zu Ziegelhütten (am 18. Februar) äußerten sich die Wellenschläge der Beben am schärfsten. (Siehe hierüber: Illustriertes Münchner Extrablatt, Nr. 42, S. 4, und Münchner Tagblatt, Nr. 64, S. 7.)

III. März.

Auch der Monat März konnte bei uns jene eben genannten Erscheinungen aufweisen.

5. März. An diesem Tage früh $5^3/_4{}^h$ fand eine kleine Bodenbewegung zu Kandel und Maximiliansau in der Pfalz statt, doch immerhin so stark, daß die meisten Leute aus dem Schlafe erwachten.

10. März. Nachts $10^h\,5^m$ trafen Erdbebenstöße Partenkirchen, Rosenheim und Reichenhall, auch das erdmagnetische Observatorium in München-Bogenhausen verspürte diese seismischen Wellen.

---

[1]) Bericht liegt in den Erdbeben-Akten des hiesigen Polytechnikums.

Während dieser Zeit wurde fast das ganze Mittelalpenland von solchen Erschütterungen heimgesucht. Aus den Zeitungen entnehmen wir, daß hauptsächlich das Beben verspürt wurde in Innsbruck, Triest, Bozen, Klagenfurt, Spittal, Pola, Gradicka, Laibach, Aquila, Magliano de Marsi, Padua, Treviso, Urbino, Udine, Tarent, Pontebba u. s. f. (Siehe Neueste Nachrichten vom 11. März, Nr. 119 und 120, Münchner Tagblatt, Nr. 73, Augsburger Abendzeitung und Fränkischer Kurier.)

11. März. Zwei leichte Erdstöße von unten nach oben zu Donauwörth und Harburg früh $6^h\ 30^m$.

26. März. Eine Erderschütterung im Nordfichtelgebirge früh 6^h. (Neues Münchner Tagblatt, Nr. 89.)

IV. April.

Weniger erdbebenreich war der Monat April. Nur auf dem erdmagnetischen Institut hier wurden am 4. April vormittags 11^h und $11^h\ 20^m$ mitteleuropäischer Zeit zwei Erdstöße verspürt, die wahrscheinlich die Erdwellen einer in weitentlegener Erdstelle stattgefundenen Erderschütterung waren. (Wahrscheinlich hatte das Beben seinen Herd auf der Balkanhalbinsel; denn aus Sofia, Belgrad und Bukarest trafen Zeitungsnachrichten über große Dislokationen der Erdrinde ein. Auch auf den seismischen Instrumenten des K. geodätischen Instituts auf dem Telegraphenberg zu Potsdam wurde das Beben registriert.) (Siehe eingehend Neueste Nachrichten vom 6. April, Nr. 161.)

Seismische Erscheinungen zeigten sich in Bayern im April nur noch am 26. April 4^h früh in der Umgegend von Hof. Dem Voigtländer Anzeiger zufolge lag der Ausgangspunkt der Bewegung bei Plauen.

V. Mai.

30. Mai. Von den registrierenden Instrumenten des Bogenhauser Observatoriums wurde abends $10^h\ 12^m$ ein schwaches Beben aufgezeichnet, jedenfalls von einem größeren Einsturzbeben aus der Gegend von Reichenhall herstammend.

VI. Juni.

Am 3. Juni morgens 6^h zeigten sich kleine Bodenbewegungen entlang der ganzen oberfränkisch-vogtländischen Grenze,

am 17. Juni schwankte endlich der Boden des Ortes Tirschenreuth und verursachte unter den dortigen Bewohnern Furcht und Schrecken.

VII. Juli.

Erdbebenfrei.

VIII. August.

18. August morgens Erderschütterung im Saaltale. (Neues Münchner Tagblatt vom 21. August.)

IX. September.

Erdbebenfrei.

X. Oktober.

1. Oktober vormittags 3^h 52^m zeigten die registrierenden Apparate des erdmagnetischen Observatoriums in Bogenhausen einen leichten Erdstoß. (Neueste Nachrichten, Nr. 471.)

2. Oktober. Erdstoß zu Staffelstein abends halb 9^h.

13. Oktober. Die Neuesten Nachrichten schrieben Nr. 482 vom 14. Oktober: „Innsbruck, 13. Oktober. Heute 3^h 30^m früh wurde in Hall ein Erdstoß wahrgenommen, der eine Sekunde dauerte und westöstliche Richtung hatte."

24. Oktober. Schwacher Erdstoß früh 7^h 30^m zu Partenkirchen. (Neues Münchner Tagblatt, Nr. 302, S. 2.)

XI. November.

10. November. Erdstöße bei Donauwörth. Im Münchner Extrablatt war zu lesen (Nr. 262):

„In Donauwörth und Nördlingen wurden gestern nachmittags 5^h 10^m zwei Erdstöße verspürt, die ziemlich heftig waren und eine Richtung von NW. nach SO. hatten. Besonders in Donauwörth war der zweite Stoß sehr heftig. An mehreren Häusern, namentlich gegen Wörnitzstein zu, zeigten sich leichte Sprünge und Risse."

Die persönlich von mir eingezogenen Nachrichten ergaben folgendes Resultat: Die Dauer des Bebens war an den verschiedenen Stellen von verschiedener Länge, währte aber kaum irgendwo länger als eine Minute. Besonders stark und von

längster Dauer zeigte sich die Bewegung im nördlichen Teile der Stadt Donauwörth, dem Dorfe Berg zu. An vielen Stellen, auch im nahen Felsheim (1/2 Stunde von Donauwörth entfernt), fielen Bilder von den Wänden, klirrten Fenster und Lampen, und sprangen Zimmer- und Schranktüren auf. Gleichzeitig beobachtete man eine schwankende Bewegung, besonders hoher Gebäude, sowie wiegende Hebungen und Senkungen des Fußbodens und der Erde; an einzelnen Stellen kurze Stöße von unten nach oben.

19. November. Nachmittags gegen halb 4^h zeigten die registrierenden Apparate des erdmagnetischen Observatoriums in Bogenhausen wieder einen Erdstoß an. (Neueste Nachrichten, Nr. 545.)

29. November. Die Augsburger Postzeitung, Nr. 272, S. 11, schrieb:

„Kandel (Pfalz), 30. November. Gestern fand hier vormittags $7\,{}^1/_4{}^h$ ein heftiger Erdstoß statt."

XII. Dezember.

Die Neuesten Nachrichten berichteten (Nr. 582 vom 13. Dezember, Morgenblatt):

„Salzburg, 9. Dezember (Erdbeben). In zahlreichen Orten des Pongaues wurde in der Nacht vom Mittwoch auf Donnerstag kurz vor 2^h früh ein heftiger, etwa zwei Sekunden währender Erdstoß verspürt, der von einem donnerähnlichem Getöse begleitet war, und seine Richtung von Westen gegen Osten nahm. Die Erschütterung war so heftig, daß in Bischofshofen sich in mehreren Häusern Risse zeigten. In Werfen wurden die auf den Kästen stehenden Gegenstände herabgeworfen."

Nach meinen Erkundigungen bei vielen Orten des südöstlichen Bayerns konnte ich erfahren, daß die Erdstöße in Reichenhall, Berchtesgaden und Marquartstein verspürt wurden. Die Nachricht hierüber aus Rosenheim ist zweifelhafter Natur.

Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.

Von **J. B. Messerschmitt.**

(Eingelaufen 4. Februar.)

Nachdem in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts die Lehre des Erdmagnetismus durch die Arbeiten von Gauß in ein neues Stadium getreten war, wurde zunächst eine Anzahl fester Stationen errichtet, deren Aufgabe die systematische Erforschung dieses Phänomens sein sollte. Diesem Anlasse verdankt auch das magnetische Observatorium in München seine Entstehung, das durch Lamont bald zu einem Zentralpunkte auf diesem Gebiete geworden ist. Sein praktisches Geschick vervollkommnete vor allem die magnetischen Instrumente, so zwar, daß seine Variationsapparate und sein magnetischer Reisetheodolit auch für alle Instrumente dieser Art zum Vorbild geworden sind. Ja eine Anzahl Instrumente, welche unter seiner Leitung in seiner Werkstätte gebaut wurden, sind noch jetzt in Gebrauch.

Als nun im Jahre 1849 der K. B. Akademie der Wissenschaften in München Mittel zur „naturwissenschaftlichen Erforschung des Königreiches Bayern" zugewiesen wurden, ist auch sofort von Lamont eine „meteorologisch-magnetische Aufnahme" dieses Gebietes in Angriff genommen worden. In Bezug auf die meteorologischen Beobachtungen beschränkte sich Lamont hauptsächlich auf die Vergleichung der Instrumente; für die magnetischen Arbeiten hingegen stellte er die folgenden Gesichtspunkte auf:

„Die magnetische Kraft äußert sich an jedem Punkte der Erdoberfläche, was Richtung und Stärke anbetrifft, verschieden;

außerdem findet von Jahr zu Jahr eine langsam fortschreitende Änderung statt. Die Gesetze dieser beiden Hauptphänomene sind erst zu erforschen, zu diesem Zwecke ist es zunächst nötig, daß man für den gegenwärtigen Zeitpunkt die Richtung und Kraft des Erdmagnetismus an möglichst vielen Punkten genau bestimmt."

Die Arbeit sollte spätestens in 5 Jahren beendet sein. Er setzte daher die Zahl der Stationen im ganzen auf 55 fest, so zwar, daß je 2 Stationen im Durchschnitt 10 Stunden voneinander entfernt seien. Hiezu sollten noch weitere 10 Stationen in der Rheinpfalz kommen, mit Einschluß der nahe gelegenen Hauptpunkte Mannheim, Karlsruhe und Straßburg. Als Stützpunkt des ganzen Unternehmens diente das feste Observatorium in München.

Seine erste Reise im Jahre 1849, auf der er 34 Stationen innerhalb zweier Monate absolvierte, bewiesen nicht nur die Zweckmäßigkeit seiner Instrumente und Methoden, sondern führte auch sofort zu einer Erweiterung des ersten Programms. Die Beobachtungen hatten nämlich ergeben, daß die erdmagnetische Kraft nicht, wie man aus den früher vorhandenen Beobachtungen von weiter auseinander gelegenen Punkten der Erdoberfläche geschlossen hatte, ziemlich regelmäßig verteilt ist, sondern daß mehr oder minder große Abweichungen vorkommen. Will man daher für größere Landflächen das Gesetz der Verteilung angeben, so muß man die Beobachtungspunkte näher aneinander rücken, um den Ort der Störungsquellen erforschen zu können.

Infolge der Vermehrung der Beobachtungsstationen war Lamont bereits 1852 imstande, aus mehr als 100 in Bayern gelegenen Punkten den regelmäßigen Lauf der magnetischen Kurven zu verzeichnen und konnte dann 1853 bis 1855 solche Lokalitäten näher untersuchen, wo Abweichungen von dem regelmäßigen Laufe und besondere Einflüsse stattfinden.[1])

[1]) J. Lamont, „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern". I. Teil, München 1854, II. Teil, München 1856, und „Magnetische Karten von Deutschland und Bayern". München 1854.

Aber nicht nur auf Bayern beschränkte Lamont seine Messungen, sondern er dehnte sie noch über einen großen Teil von Europa aus. Als nämlich 1856 König Maximilian II. von Bayern eine Anzahl größerer wissenschaftlicher Unternehmungen ins Leben rief, faßte Lamont den Plan, in jenen Teilen Europas, wo bisher nur unzureichende Beobachtungen gemacht waren, solche zu ergänzen, in der Absicht, genaue magnetische Karten herzustellen. Da schon früher der König, als Kronprinz, die magnetischen Bestrebungen zu München unterstützt hatte, war es leicht, ihn auch für diesen Plan zu gewinnen, und so bereiste Lamont 1856 bis 1858 außer verschiedenen Teilen Deutschlands noch Frankreich, Spanien, Portugal, Belgien, Holland und Dänemark.[1]) Das auf diese Weise gesammelte Material war so reichhaltig, daß er von allen diesen Ländern magnetische Übersichtskarten konstruieren konnte, die erst in neuerer Zeit überholt worden sind.

In Bayern selbst hat Lamont an mehr als 240 Orten die magnetischen Elemente bestimmt, so daß die mittlere Entfernung der Stationen nur 17 km beträgt, also das Netz eine Dichte erreicht, wie sie auch bisher nur ausnahmsweise durchgeführt werden konnte. In Deutschland ist nur noch bei der kürzlich vollendeten Aufnahme in Württemberg[2]) so weit gegangen worden, während das bis jetzt vollendete Netz der neuen Aufnahme in Nord- und Mitteldeutschland aus 250 Punkten besteht, was einer mittleren Entfernung von 40 km entspricht. Es soll jedoch an diese noch eine Detailvermessung angeschlossen werden.

Es sind also im übrigen Deutschland die alten Beobach-

---

[1]) J. Lamont, „Untersuchungen des Erdmagnetismus an verschiedenen Punkten des südwestlichen Europas". München 1858 und „Magnetische Untersuchungen in Norddeutschland, Belgien, Holland, Dänemark". München 1859.

[2]) K. Haußmann, „Die erdmagnetischen Elemente von Württemberg und Hohenzollern". Stuttgart 1903. Ferner „Magnetische Messungen im Ries und dessen Umgebung". Abhandlungen der K. Preuß. Akademie. Berlin 1904.

tungen Lamonts wiederholt und erweitert worden; es fehlt nur noch Bayern selbst, welches Land er ja am eingehendsten und genauesten untersucht hat. Welche Anstrengungen in anderen Ländern, wie Italien, Frankreich, in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika auf diesem Gebiete gemacht werden, braucht nur angedeutet zu werden. Es erscheint daher eine Erneuerung der magnetischen Vermessung Bayerns sowohl aus allgemein praktischen als auch aus speziell wissenschaftlichen Gründen wünschenswert, auch wenn nicht solche Traditionen sie geradezu zur Pflicht machen würden. Erst dann werden die alten Lamontschen Messungen zur vollen Geltung kommen, besonders nach einer Neubearbeitung, die nach deren großen Genauigkeit und Reichhaltigkeit wohl noch manches interessante Resultat zutage fördern wird. Dies ist um so mehr zu erwarten, als ja Lamont selbst eine eingehende Untersuchung und Diskussion des gesamten Materials nicht ausgeführt und nur auf einzelne interessante Details gelegentlich hingewiesen hat.

Nachdem die erste Bearbeitung der am Münchener magnetischen Observatorium erhaltenen Registrierungen,[1]) welche ja die Grundlage für die magnetische Landesaufnahme zu bilden haben, ein befriedigendes Resultat ergeben hatte, wurde zunächst eine Rekognoszierungstour unternommen, um zu sehen, in welcher Weise Beobachtungen im Felde am zweckmäßigsten vorzunehmen seien. Die Instrumentenfrage ist dank dem freundlichen Entgegenkommen der württembergischen Behörden, insbesondere der meteorologischen Zentralanstalt in Stuttgart in befriedigender Weise gelöst worden, indem so dasselbe Instrument zur Verwendung kommen konnte, das sich bei den Messungen in Württemberg bewährt hatte und dessen Eigenschaften völlig bekannt waren.

Um sofort einen Überblick zu bekommen, welche Änderungen die magnetischen Elemente seit Lamont erlitten haben,

[1]) Veröffentlichungen des magnetischen Observatoriums in München. 1. Heft. München 1904.

sind in allen Kreisen des Königreiches Beobachtungen angestellt worden, deren Resultate hiermit bekannt gegeben werden. Es sind die drei Elemente: Deklination, Horizontalintensität und Inklination gemessen worden. Für letzteres Element ist neben dem württembergischen Theodoliten (Tesdorpf, Nr. 1769) an mehreren Orten auch das dem magnetischen Observatorium gehörige Inklinatorium (Bamberg, Nr. 6817) verwendet worden. Um diese und die damit in München gemachten Beobachtungen mit den an anderen Observatorien beobachteten Inklinationen vergleichbar zu machen, habe ich im April 1904 in Potsdam die Konstanten der vier dazu gehörigen Nadeln bestimmt. Nach dieser Vergleichung sind die Korrektionen, bezogen auf das Hauptsystem des magnetischen Observatoriums in Potsdam, die folgenden:

Nadel I: + 4.'9
„ II: − 2.0
„ III: − 5.8
„ IV: − 3.2

Die Unsicherheit der Einzelwerte kann auf ± 0.'3 veranschlagt werden.

Im Felde sind die Nadeln III und IV verwendet worden, während Nadel I und II in München zurückgelassen waren. An die unten mitgeteilten Resultate sind die Korrektionen bereits angebracht, ebenso die der Nadeln des Tesdorpfschen Theodoliten, und damit werden sämtliche Beobachtungen untereinander vergleichbar.

Bei den magnetischen Ortsbestimmungen kann man mit Vorteil trigonometrische Punkte verwenden, deren Azimute aus der Landesvermessung sofort entnommen werden können. Dieser Weg kann jedoch in Bayern nur selten begangen werden, da die einen Punkte, wie Kirchtürme, magnetisch gestört, während die anderen, wegen ihrer alleinigen unterirdischen Versicherung nur schwer auffindbar sind. Es ist daher für die Mißweisungsbestimmungen, wenn es die Witterungsverhältnisse erlaubten, die Sonne direkt gepeilt worden, ein Verfahren, das sich sehr bewährt hat, und das auch keinen großen Aufwand an Zeit

beim Beobachten und Berechnen erfordert. Konnten astronomische Bestimmungen nicht erhalten werden, so wurden zur Ableitung der Azimute die sichtbaren Kirchtürme eingeschnitten, wie es auch Lamont tat. Diese Art des Beobachtens bietet namentlich aus dem Grunde keinen Vorteil vor den astronomischen Messungen, da die Identifizierung der Punkte, das nachträgliche Heraussuchen der trigonometrischen Koordinaten, und endlich die Berechnung durch Rückwärtseinschneiden der Station mit einem viel größeren Zeitaufwand verbunden ist, als die Berechnung einer Anzahl Sonnenazimute. Dazu kommt noch, daß oft die beobachteten Kirchtürme gar nicht an das trigonometrische Netz angeschlossen sind, so daß unter Umständen nicht einmal ein Azimut berechnet werden kann, was man bei Lamont häufig bestätigt finden kann.

Zu den astronomischen Beobachtungen ist ein Taschenchronometer von A. Kittel in Altona (Nr. 230) verwendet worden, der halbe Sekunden schlägt, und einen vorzüglichen Gang hat. Seine Stände und Gänge sind aus Uhrvergleichungen mit den Zeitsignalen der Eisenbahn-, Post- und Telegraphenstationen, die täglich Nachmittag 3 Uhr von der Sternwarte in München gegeben werden, abgeleitet worden. Die Genauigkeit einer solchen Uhrvergleichung kann auf $0^s.25$ angenommen werden. Zur Ableitung der Ortszeit sind die geographischen Längen der Stationen den topographischen Karten im Maßstabe 1:50000 entnommen worden. Auf diesen Karten kann eine Beobachtungsstation leicht auf 15 m, d. i. 0,25 mm auf der Karte, identifiziert werden, was einer Zeitdifferenz in unseren Breiten von $0^s.05$ entspricht, wodurch im vorliegenden Falle noch keine Ungenauigkeit in den Azimuten entsteht.

Die günstigste Zeit zur Bestimmung des Azimutes ist diejenige, zu welcher das Gestirn in der Nähe des I. Vertikels ist. Aus äußeren Gründen ist man jedoch genötigt, die Sonne auch in anderen Azimuten zu beobachten. Nimmt man an, man hätte die Sonne erst eine Stunde vor oder nach der Kulmination, also in einem Azimut von etwa 20° messen können und es sei die Uhrzeit um 1^s fehlerhaft, so wird das Azimut

dadurch erst um ± 0'.4 unrichtig und unter Berücksichtigung aller anderen noch eingehenden Fehlerquellen wird sich der Fehler bei dem verwendeten Instrumente auf ± 0'.5 erhöhen. Bei den vorliegenden Beobachtungen ist jedoch der Uhrfehler sicher immer viel kleiner gewesen, auch konnten die Sonnenbeobachtungen stets in günstigeren Azimuten erhalten werden, so daß dabei im allgemeinen das astronomische Azimut auf wenigstens ± 0'.2 sicher erhalten worden sein wird. Der mittlere Fehler aus der inneren Übereinstimmung einer Serie von 8 Einstellungen, welche mindestens jedesmal erhalten wurden, ist zu ± 0'.1 abgeleitet worden. Der Kreis des magnetischen Theodoliten läßt sich auf 0'.1 event. 0'.05 ablesen, es liegt also die Genauigkeit der astronomischen Azimute innerhalb der erlaubten Grenzen.

Die Magnetnadel, welche auf der Pinne schwingt, kann auf höchstens ± 0'.3 genau eingestellt werden, während die Reduktion auf Tages- bezw. Jahresmittel aus den Vergleichungen mit den Münchener Registrierbeobachtungen auf etwas ± 0'.2 ausgeführt werden kann. Es wird daher der mittlere Fehler einer magnetischen Deklinationsbeobachtung in unserem Falle immer unter 1' geblieben sein, eine Genauigkeit, die derjenigen entspricht, welche man an moderne magnetische Landesaufnahmen stellt. Diese Genauigkeit genügt auch vollständig für die gewünschten Zwecke, wenn man berücksichtigt, daß die Mißweisung in unseren Breiten sich um 1' für 2,4 km Längenunterschied ändert. Zum Vergleich mag noch angeführt werden, daß bei den neueren Vermessungen in Großbritannien eine Genauigkeit von ± 0'.9, in Österreich ± 1', und in Württemberg etwa ebensoviel erhalten worden ist. Der mittlere Fehler der alten bayerischen Messungen von Lamont ist auf ± 3' zu schätzen.

Die Horizontalintensität ist mit zwei Ablenkungsmagneten und zwei Deflektoren gemessen worden. An einigen Stationen ist auch die Schwingungszeit der Ablenkungsmagnete bestimmt worden. Die Horizontalintensität wurde jedoch nur aus den Ablenkungsbeobachtungen berechnet, wobei die früher

ermittelten Konstanten, nach den Münchener Vergleichsbeobachtungen korrigiert, zur Anwendung kamen. Die Übereinstimmung der so erhaltenen vier Einzelwerte von H blieb immer innerhalb einiger Einheiten der 4. Dezimalstelle von C. G. S., so daß der Mittelwert davon auf etwa $\pm 10\,\gamma$ ($1\,\gamma = 0.00001$ C.G.S.) angenommen werden kann. Die Reduktion der einzelnen Reihen auf den Jahresanfang nach den Münchener Registrierungen hat immer die Übereinstimmung derselben wesentlich verbessert; besonders an Tagen mit stärkeren Störungen ist dies deutlich zu erkennen, was durch die Beobachtungen in Berchtesgaden belegt sein möge:

		Beobachtung	Reduktion	$H_{1903.0}$
Magnet	I	$H = 0.20812$	$+ 30\,\gamma$	0.20842
	II	807	+ 46	853
Deflektor	I	794	+ 64	858
	II	792	+ 78	870
			Mittel:	$0.20856 \pm 6\,\gamma$

Die oben angeführten neueren Vermessungen geben für die Horizontalintensität eine mittlere Genauigkeit von $\pm 10\,\gamma$, während Lamonts Messungen noch unterhalb $\pm 20\,\gamma$ blieben. Es entsprachen somit die neuen Beobachtungen den geforderten Ansprüchen, wobei zu beachten ist, daß die Horizontalintensität sich um $20\,\gamma$ auf 2,4 km Entfernung in Breite ändert.

Die Inklinationsmessungen können mit dem Tesdorpfschen Theodoliten innerhalb $\pm 1'$, mit dem Bambergschen Inklinatorium auf etwa $\pm 0.'5$ genau angenommen werden. Eine größere Genauigkeit läßt sich ja mit Nadelinklinatorien überhaupt nicht erreichen. Die Inklination ändert sich um 1' auf 2 km Breitendifferenz, so daß also die angegebene Genauigkeit derjenigen entspricht, welche bei den beiden anderen Elementen erreicht worden ist.

Lamont hat bekanntlich seine Inklinationen aus Ablenkungsbeobachtungen von weichen Eisenstäben, die durch den Erdmagnetismus induziert werden, bestimmt. Hiebei hängt die Genauigkeit der Messungen sehr von der Güte der Eisenstäbe

und der Konstanz ihrer Reduktionsfaktoren ab. Lamont gibt die mittlere Unsicherheit dieser Messungen von der gleichen Größenordnung an, wie die der Deklinatsbestimmungen, wobei freilich einzelne Bestimmungen, die an der gleichen Station zu verschiedenen Zeiten erhalten worden sind, oft um mehr abweichen. Dies rührt offenbar daher, daß die Konstanten Änderungen unterworfen waren, die nicht immer sicher ermittelt werden konnten, wie dies selbst Lamont angibt. Als Beleg mögen die Beobachtungen auf dem Hoyerberg bei Lindau angeführt werden. (Magnet. Beob., Bd. I, S. 121—125.)

Zeit	Deklination			Horizontalintensität			Inklination	
	Anzahl der Beob.	Differenz gegen München	Mittl. Fehler	Beob.	Differenz	Mittl. Fehler	Beob.	Differenz
1849 Aug. 11., 12.	7	+ 56.'5	+ 1.'3	4	+ 53 γ	+ 9 γ	1	— 19.'0
1850 Juli 7.—9.	15	+ 52.1	± 2.2	7	+ 103 γ	± 14 γ	3	— 13.5
1852 Oktober 2.	4	+ 50.6	± 0.7	2	+ 120 γ	± 11 γ	1	— 2.3

Andere Stationen zeigen hingegen eine größere Übereinstimmung, doch sind die Inklinationsmessungen in den späteren Jahren im allgemeinen etwas ungenauer als die der früheren.

Es möge nun in der Tabelle I eine Zusammenstellung des größeren Teiles meiner Beobachtungen, auf den Jahresanfang von 1903 reduziert, folgen, wobei zu bemerken ist, daß die Längen, gemäß der Generalstabskarten, von der alten Sternwarte in München aus gezählt sind (+ östlich, — westlich). Diese ist 11° 36' 12" östlich von Greenwich gelegen gewesen.

Die Meereshöhe ist jeweilen abgerundet aus dem topographischen Atlas von Bayern 1 : 50000 (Bayerische Generalstabskarte) entnommen worden. Die Nummer des betreffenden Blattes ist in der letzten Kolumne angegeben. Es folgt dann in der fünften Reihe die Deklination (*D*), die Horizontalintensität (*H*) und die Inklination (*I*). Der Vollständigkeit halber sind in den folgenden vier Spalten zunächst die Totalintensität (*F*) und die rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf

den astronomischen Meridian, hinzugefügt worden, die aus den bekannten Beziehungen berechnet wurden:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Nordkomponente:} & X = H \cdot \cos D \\
\text{Westkomponente:} & Y = H \cdot \sin D \\
\text{Vertikalkomponente:} & Z = H \cdot \operatorname{tg} I \\
\text{und Totalkraft:} & F = H \cdot \operatorname{cosec} I = Z \cdot \sec I.
\end{array}
$$

Darin wird die Deklination nach Osten und die Inklination bezw. die Vertikalkomponente nach unten positiv gezählt. Die Intensitätsgrößen sind alle in der Einheit des C. G. S.-Systems ($cm^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$) ausgedrückt, die bekanntlich der zehnte Teil der Gaußschen Einheit ist, welch letztere auch Lamont in seinen Veröffentlichungen verwendet hat. Die vorletzte Spalte gibt den Nachweis über die früheren Beobachtungen Lamonts nach Band und Seitenzahl seiner „Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern".

Die noch übrigen Beobachtungen werden am besten mit den noch auszuführenden mitgeteilt, da namentlich für einige Deklinationsbestimmungen noch die astronomischen Messungen nachzuholen sind.

Bildet man die Unterschiede der auf den Stationen erhaltenen Beobachtungen gegen die Basisstation München, so erhält man die Werte der Tabelle II, worin die Differenzen der Deklination (ΔD), der Horizontalintensität (ΔH) und der Inklination (ΔI) im Sinne „Feldbeobachtung minus Münchener Beobachtung" genommen sind. Zum Vergleich sind die von Lamont gefundenen Unterschiede beigefügt, welche seinen „Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern", München 1854 und 1856, entnommen sind. Überdies ist jeweilen die Differenz der beiderseitigen Resultate in der dritten Kolumne eingetragen, wobei freilich noch zu berücksichtigen ist, daß die Beobachtungsorte nicht immer identisch sind, da eben häufig die alten Orte, wegen der seither eingetretenen örtlichen Änderungen, nicht mehr benützt werden können. Im allgemeinen ist aber auch die Entfernung der gleichnamigen Punkte nicht sehr groß, so daß unter normalen Verhältnissen eine Verglei-

chung unbedenklich gestattet ist. In Störungsgebieten freilich gilt dies nicht mehr. Die letzten 4 Reihen enthalten die entsprechenden Differenzen der Komponenten und der Totalintensität gegen den Basispunkt München.

Von denjenigen Orten, an welchen Lamont nicht beobachtete, sind die Werte seinem Atlas entnommen worden und die betreffenden Zahlen durch Einklammern kenntlich gemacht. Für Weißenburg i. B. (Wülzburg) liegen Bestimmungen von C. v. Orff aus dem Jahre 1875 vor, die gelegentlich geodätischer Messungen mit den Lamontschen Instrumenten erhalten worden sind. Danach ist $\Delta D = + 27'.3$; $\Delta H = - 433\gamma$ und $\Delta I = + 46'.3$, in guter Übereinstimmung mit den Karten. (C. v. Orff, Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern. Anhang: Magnetische Messungen zu Ingolstadt und auf der Wülzburg. München 1880, S. 143–164.)

Die Tabelle II gibt vor allem das interessante Resultat, daß die Differenzen aller drei Elemente einen systematischen Charakter tragen, und zwar der Art, daß sie in verschiedenen Landesteilen ihrer Größe nach verschieden sind. Dies rührt offenbar daher, daß die säkularen Änderungen nicht in allen Gegenden gleich groß gewesen sind. Wenn man aber annimmt, daß sich die magnetischen Kurven seit Lamonts Zeiten nicht nur nahe parallel zueinander verschoben, sondern dabei auch eine Drehung ausgeführt haben, so werden die Unterschiede grossenteils aufgehoben. Zur Ableitung eines Gesetzes sind die vorhandenen Messungen noch zu wenig zahlreich; dies wird mit Erfolg erst nach der Vollendung der eigentlichen magnetischen Landesaufnahme möglich sein. Für diese sollen die bereits gemessenen Stationen gewissermaßen als Hauptpunkte dienen, zu welchen noch weitere 40–50 Punkte erster Ordnung kommen, welche dann zur Ableitung des normalen Verlaufs der magnetischen Elemente genügen. Daran schließen sich am besten Untersuchungen von engeren Störungsgebieten an, auf welche teilweise auch schon Lamont hingewiesen hat.

Tabelle I.

Ort	Breite	Länge	Meereshöhe	*D*	*H*
München	48° 8′ 47″	+ 0° 0′ 20″	530 m	10° 16.′9 W.	0.20 652
Hoyerberg . . .	47 34 3	— 1 55 52	455	11 3.0	714
Immenstadt . . .	47 33 48	— 1 22 47	750	•	758
Landsberg . . .	48 3 3	— 0 42 50	640	10 27.2	570
Riedhausen . . .	47 41 9	— 0 24 11	700	27.2	756
Tölz	47 46 12	— 0 1 40	690	10.7	738
Rosenheim . . .	47 51 28	+ 0 32 32	460	•	731
Traunstein . . .	47 52 26	+ 1 1 37	600	9 50 5	720
Reichenhall . . .	47 43 17	+ 1 16 14	470	39.2	801
Berchtesgaden . .	47 37 27	+ 1 23 53	600	32.6	856
Regensburg . . .	49 0 17	+ 0 29 30	370	10 8.8	225
Schaching . . .	48 50 23	+ 1 20 43	330	43.9	354
Zwiesel	49 1 16	+ 1 37 0	590	9 36.8	359
Wülzburg . . .	49 1 30	— 0 35 48	630	•	128
Schwandorf . . .	49 19 31	+ 0 29 52	360	10 30.2	108
Weiden	49 40 26	+ 0 32 51	400	•	0.19 951
Bamberg	49 53 15	— 0 44 27	380	41.2	771
Königsberg i. Fr. .	50 4 52	— 1 3 23	280	55.1	642
Aschaffenburg . .	49 58 1	— 2 26 50	140	•	583
Weißenheim a/Berg	49 30 7	— 3 26 41	265	11 50.7	756
Neustadt a/H. . .	49 20 34	— 3 27 42	220	12 4.2	810
Homburg i. Pf. . .	49 19 16	— 4 15 31	300	42.5	812

J	F	X	Y	Z	Lamont	Top. Atlas
10′.3	0.45 759	0.20 320	— 0.03 686	0.40 834	I, 135	77 o.
2.2	683	330	970	717	I, 125	87
59.7	716	·	·	732	I, 103	88 o.
16.3	735	228	732	848	I, 114	76 w.
59.0	693	412	766	707	I, 135	90 o.
2.8	753	412	665	783	I, 180	91 w.
1.2	695	·	·	722	I, 160	84 o.
4.0	743	415	542	782	I, 182	85 w.
58.0	766	506	488	765	I, 158; II, 146	93 o.
57.5	874	568	458	859	I, 62	94
54.8	995	0.19 909	560	0.41 309	—	48 w.
42.0	939	998	790	183	I, 72; II, 48	56 o.
47.4	0.46 097	0.20 073	400	357	II, 186	50 w.
3.3	007	·	·	369	—	46 w.
5.3	015	0.19 771	666	389	I, 169	42 w.
22.7	136	·	·	600	II, 181	30 w.
44.0	320	428	666	889	I, 33; II, 57	20 w.
54.4	315	286	720	943	—	12 o.
0.8	360	·	·	0.42 020	I, 52	17 w.
41.2	206	335	0.04 055	0.41 770	—	107 w.
21.1	0.45 766	372	142	256	I, 140	107 w.
36.0	0.46 188	326	358	724	—	105

Tabelle II.

Ort	Δ D			Δ H		
	1903	1850	Diff.	1903	1850	Diff.
Hoyerberg . . .	+46.'1	+53.'1	− 7.'0	+ 62γ	+ 91γ	− 29γ
Immenstadt . . .	·	+ 38.4	·	+ 106	+ 157	− 51
Landsberg . . .	+ 10.3	+ 20.8	− 10.5	− 82	− 26	− 56
Riedhausen . . .	+ 10.3	+ 7.9	+ 2.4	+ 104	+ 150	− 46
Tölz	− 6.2	− 8.1	− 1.9	+ 86	+ 133	− 47
Rosenheim . . .	·	− 25.9	·	+ 79	+ 152	− 73
Traunstein . . .	− 26.4	− 37.0	+ 10.6	+ 68	+ 161	− 93
Reichenhall . . .	− 37.7	− 46.2	+ 8.5	+ 149	+ 285	− 136
Berchtesgaden . .	− 44.3	[− 40]	[− 4]	+ 204	+ 357	− 153
Regensburg . . .	− 8.6	[− 10]	[+ 1]	− 427	[− 340]	[− 87]
Schaching . . .	− 33.0	− 35.7	+ 2.7	− 298	− 197	− 101
Zwiesel	− 40.1	− 42.1	+ 2.0	− 293	− 221	− 72
Wülzburg . . .	·	[+ 25]	·	− 524	[− 415]	[− 109]
Schwandorf . . .	+ 13.3	− 6.2	+ 19.5	− 544	− 451	− 93
Weiden	·	[− 5]	·	− 701	− 604	− 97
Bamberg	+ 24.3	+ 30.3	− 6.0	− 881	− 793	− 88
Königsberg i. Fr. .	+ 38.2	[+ 45]	[− 7]	− 1010	[− 880]	[− 130]
Aschaffenburg . .	·	+ 94.7	·	− 1069	− 973	− 96
Weißenheim a/Berg	+ 93.8	[+ 110]	[− 16]	− 896	[− 850]	[− 46]
Neustadt a/H. . .	+107.3	+ 112.1	− 4.8	− 842	− 822	− 20
Homburg i. Pf. . .	+145.6	[+ 135]	[+ 11]	− 840	[− 810]	[− 30]

ΔI			ΔF	ΔX	ΔY	ΔZ
1903	1850	Diff.	1903			
- 8.'1	− 14.'9	+ 6.'8	− 76γ	+ 10γ	− 284γ	− 117γ
- 10.6	− 13.7	+ 3.1	− 43	.	.	− 102
- 6.0	+ 1.9	+ 4.1	− 24	− 92	− 46	+ 14
- 11.3	− 21.1	+ 9.8	− 66	+ 92	− 80	− 127
- 7.5	− 21.3	+ 13.8	− 6	+ 92	+ 21	− 51
- 9.1	− 15.9	+ 6.8	− 64	.	.	− 112
- 5.7	− 17.0	+ 11.3	− 16	+ 95	+ 144	− 52
- 12.3	− 23.3	+ 10.0	+ 7	+ 186	+ 198	− 69
- 12.8	− 35.7	+ 22.9	+ 117	+ 248	+ 228	+ 25
- 43.5	[+ 35]	[+ 9]	+ 236	− 411	+ 126	+ 475
- 31.7	+ 20.1	+ 11.6	+ 180	− 322	− 104	+ 349
- 37.1	+ 25.2	+ 11.9	+ 338	− 247	− 282	+ 523
- 53.0	[+ 51]	[+ 2]	+ 248	.	.	+ 535
- 55.0	+ 46.3	+ 8.7	+ 256	− 551	+ 20	+ 555
- 72.4	[+ 66]	[+ 6]	+ 377	.	.	+ 766
- 93.7	+ 80.4	+ 13.3	+ 561	− 892	+ 20	+ 1055
- 104.1	[+ 90]	[+ 14]	+ 556	− 1034	− 34	+ 1109
- 110.5	+ 103.9	+ 6.6	+ 601	.	.	+ 1186
- 90.9	[+ 98]	[− 7]	+ 447	− 985	− 369	+ 936
- 70.8	+ 87.6	− 16.8	+ 7	− 948	− 456	+ 422
- 85.7	[+ 90]	[− 4]	+ 429	− 994	− 672	+ 890

Über einige fossile Korallen aus Columbien.

Von **J. Felix** in Leipzig.

(*Eingelaufen 4. Februar.*)

Von Ihrer Kgl. Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern wurden mir durch gütige Vermittelung des Herrn Prof. Rothpletz, Konservator der geologisch-paläontologischen Sammlung des bayerischen Staates, einige Exemplare fossiler Korallen zugesandt, welche Hochdieselbe auf Ihrer Forschungsreise in Columbien gesammelt hatte. Über das Vorkommen derselben empfing ich von Ihrer Kgl. Hoheit folgende interessante Mitteilungen: „Der Fundort der Korallen ist La Papa, ein aus einer Ebene vereinzelt aufragender, 155 m hoher Hügel bei Cartagena in Columbien. Auf die Spitze dieses Hügels führt ein Fußpfad, auf welchem etwa in ein Drittel oder auf der Hälfte der Hügelhöhe die Korallen zutage treten und auch in einzelnen vom Felsgrund abgelösten Stücken herumliegen. An dieser Stelle habe ich, August 1898, persönlich die Fundstücke gesammelt. Die Ebene ringsum besteht, soviel mir aus geologischen Karten bekannt, aus Ablagerungen des känolithischen Zeitalters.“ Auf die geologische Bedeutung des Fundes werde ich am Schlusse dieses Aufsatzes zurückkommen und ersteren zunächst in faunistischer Hinsicht besprechen. Die unter den vorliegenden vier Stücken vertretenen Formen verteilen sich auf drei Gattungen: Orbicella, Isastraea und Stephanocoenia mit ebensoviel Arten. Von letzteren ist die eine als neu zu betrachten, deren Beschreibung ich zunächst folgen lasse.

Orbicella Theresiana n. sp. Textfigur 1 u. 2.

Bezüglich des Gattungsnamen Orbicella möchte ich folgende Bemerkungen vorausschicken. So sehr sich auch der Name Heliastraea bei den Paläontologen eingebürgert hat, so muß doch konstatiert werden, daß dem Namen Orbicella die Priorität gebührt. Orbicella wurde 1848 von Dana,[1]) Heliastraea 1857 von M. Edwards[2]) aufgestellt. Der Umstand, daß einige Arten Danas von dieser Gattung auszuscheiden sind, gibt keine Berechtigung, den Namen ganz fallen zu lassen. Immerhin wird die Angelegenheit komplizierter dadurch, daß 1847 von d'Orbigny der Name Orbicella für eine Brachiopodengattung aufgestellt wurde, er also doch älter ist, als der Dana'sche. Die Gattung von d'Orbigny wurde indes später von Sharpe kassiert und durch Trematis ersetzt. Die Entscheidung bez. der Berechtigung dieses Verfahrens überlasse ich vorläufig den Spezialforschern für Brachiopoden.

Das vorliegende Exemplar einer Orbicella stellt das Fragment einer großen Kolonie vor, denn bei einer größten Länge von 72 mm sind seine sämtlichen Seitenflächen doch nur Bruchflächen. Die jedenfalls schon bei Lebzeiten der Kolonie durch ungleiches Wachstum hervorgerufene Unregelmäßigkeit der Oberfläche ist durch die Schicksale des Stückes — Verwitterung und Abrollung — noch vermehrt worden. An manchen Stellen sind die Kelche tief ausgewittert, so daß sie röhrenförmige Gruben darstellen, an anderen dagegen ziemlich gut erhalten. Ihr Umriß ist fast stets kreisförmig, seltener breitoval. Der Durchmesser der Kelchöffnung beträgt meist 3 mm. Der Kelchrand ragte ehemals $^1/_2$ – 1 mm über die Umgebung empor und war wohl scharf. Natürlich hat er am meisten durch die Abrollung gelitten. Es sind drei vollständige Zyklen und ein vierter unvollständig entwickelter Zyklus von Septen vorhanden. Sie überragen den Kelchrand etwas und laufen

---

[1]) Dana, Zoophytes of the U. S. Explor. Exped. p. 204.

[2]) M. Edwards, Hist. nat. des Corall. T. II, p. 456.

auf der Außenwand der Kelche als Rippen herab. Diese stoßen entweder in den die Kelche trennenden Furchen mit denen der Nachbarpolyparien winklig zusammen, oder endigen im Grunde der Furchen frei. Die Breite der interkalyzinalen Zwischenräume beträgt 1–2 mm. Die Septen der ersten beiden Zyklen und zuweilen noch einige des dritten Zyklus sind stärker und länger als die übrigen. Sie reichen bis in die Kelchmitte und stoßen dort mit der Columella zusammen. Die übrigen Septa sind wiederum unter sich je nach dem Zyklus, dem sie angehören, verschieden lang und stark. Die Columella ist wohl ausgebildet. Ihr oberes Ende ragt als ein anscheinend massives Knöpfchen etwas empor. Im Durchschnitt zeigt sie sich dagegen von spongiöser Struktur und mit den Enden der großen Septen wie erwähnt verbunden. Zwischen den größeren, älteren Kelchen bemerkt man hie und da junge Knospen, deren Durchmesser auf 1,5 mm herabsinkt. Die Verbindung der einzelnen Polyparien erfolgt durch Exothecallamellen. Auf die Höhe von 3 mm zählt man deren etwa 7—8. Wo die Polyparien eng stehen, spannen sich zwischen denselben größere Traversen und zwar fast horizontal aus oder es verschmelzen kleinere, auf gleicher Höhe liegende Querblättchen zu einem bodenartigen Gebilde, so daß diese engen

Fig. 1. Orbicella Theresiana n. sp. Ansicht von oben. Nat. Gr.

Fig. 2. Orbicella Theresiana n. sp. Ansicht von der Seite. Nat. Gr.

Zwischenräume ein leiterförmiges Ansehen besitzen. Hier zählt man dann auf 3 mm gewöhnlich nur 6 Sprossen.

Durch die kleinen, runden Kelche erinnert die Art sehr an die westindische Orbicella annularis Dana (Ell. et Sol. sp.), doch besitzt diese nur 24 Septen. Durch die griffelförmige Ausbildung des oberen Teiles der Columella zeigt sie sich der Orb. microcalyx Greg. (Fel. sp.) aus dem Miocän von Ägypten verwandt, doch hat auch letztere Art nur drei Septalzyklen. Andererseits unterscheidet sie sich bei gleicher Septenzahl durch die kräftig entwickelte Columella von Orb. Ellisiana Defr. sp. und Orb. plana Mich. sp. Insofern sie auch sonst mit keiner der schon beschriebenen Arten völlig übereinstimmt, ist sie als eine neue Art zu betrachten. Nachdem Ihre Kgl. Hoheit als Entdeckerin die Widmung derselben huldvollst anzunehmen geruht hat, führe ich sie als „Orbicella Theresiana" in die Wissenschaft ein.

Isastraea turbinata Duncan.

1863 Isastraea turbinata Duncan. On the fossil corals of the West-Indian Islands P. I. Proceed. Geol. Soc. London, May 1863, p. 423, pl. XIV, f. 1.

Da die sämtlichen Seitenflächen sowie die Unterflächen beider Exemplare nur Bruchflächen sind, so läßt sich die ursprüngliche Form der Kolonie nicht mit Sicherheit angeben. Da jedoch die einzelnen Polyparien von langröhrenförmiger Gestalt sind und eine nur leicht konvergierende Richtung besitzen, so kann man doch schließen, daß die Kolonie die Gestalt einer Halbkugel oder einer vertikal verlängerten Knolle besessen habe. Die einzelnen Polyparien werden direkt durch ihre kräftigen Wandungen verbunden. Die Zahl der Septen erreicht 48; es sind also in völlig ausgebildeten Kelchen vier komplette Zyklen vorhanden. Je nach ihrem Zyklus sind die Septen verschieden lang. Auf der Höhe der Mauern stoßen die meisten mit denen der Nachbarkelche direkt zusammen, bezw. bilden deren Fortsetzung. Der Durchmesser der Kelche beträgt 3,5—5 mm; über ihre Tiefe läßt sich leider nichts

angeben, da dieselben auf der Oberfläche zu tiefen Gruben ausgewittert sind. In den Querbrüchen der Kelche auf der Unterfläche des einen Exemplares erblickt man im Zentrum ein dickes columellaartiges Gebilde. Es ist allerdings möglich, daß die Septen der ersten Zyklen in der Mitte nahezu zusammenstoßen und vielleicht sogar eine Art von Pseudocolumella bilden, die Stärke jenes Gebildes ist jedoch sicherlich nur dadurch entstanden, daß sich bei dem deutlich wahrnehmbaren Umkristallisierungsprozess, welchen die Koralle erlitten hat, neugebildete Kalkspatkriställchen zwischen die inneren Enden der Septen und in die innersten, daher engsten Teile der Interseptalkammern angesetzt haben.

Das Exemplar scheint mit Isastraea turbinata, welche von Duncan l. c. aus dem Miocän von Antigua beschrieben wurde, übereinzustimmen, doch gestattet der Erhaltungszustand keine völlig sichere Identifizierung.

Stephanocoenia cf. Fairbanksi Vaughan.

Eines der mir vorliegenden Exemplare stellt eine Stephanocoenia dar und könnte zu Stephan. Fairbanksi Vaugh. gezogen werden. Leider ist die Oberfläche stark abgerollt, so daß man bei der Untersuchung auf die Unterfläche, welche eine Bruchfläche darstellt, angewiesen ist.

Die Kolonie war unregelmäßig knollenförmig; die Kelche stehen dicht aneinander gedrängt und sind von polygonalem, meist fünfseitigem Umriß. Ihre Größe beträgt 2,5—3 mm. Die Zahl der Septen ist 10—12. Da der Oberrand der die Kelche trennenden Wandungen nicht erhalten ist, so kann über die eventuelle Ornamentation desselben nichts angegeben werden. Die Columella ist griffelförmig und sehr stark entwickelt, doch ist ihr Umfang dadurch noch größer geworden, daß sich bei dem Umkristallisierungsprozeß, welchen die Koralle erlitten hat, äußerst winzige, neugebildete Calcitkriställchen zwischen die Columella und die inneren Enden der Septen und der Palis angesetzt haben. Es sind dadurch auch die letzteren als selbständige Gebilde sehr undeutlich geworden.

Ich glaube die vorliegende Koralle zu der von Vaughan beschriebenen Stephanocoenia Fairbanksi[1]) ziehen zu können, mit welcher sie im allgemeinen übereinstimmt. Nur den von Vaughan angegebenen Umstand, daß die Septen des dritten Zyklus sich an die Seitenflächen derjenigen des zweiten Zyklus anlegen sollen, habe ich nicht mit völliger Sicherheit konstatieren können. Sollte diese Erscheinung in der Tat nicht vorhanden sein, würde die Koralle wiederum mehr mit Stephanoc. Reussi[2]) Duncan übereinstimmen, doch hat diese kleinere Kelche und weniger Pali.

Stephanocoenia Fairbanksi wurde von Vaughan l. c. aus Süd-California beschrieben und zwar aus der Kreideformation, doch bezeichnet er selbst letztere Angabe als „doubtfully".

Da das zur Untersuchung vorliegende Material (vier Exemplare) nicht umfangreich genug ist, und da außerdem der Erhaltungszustand keine völlig exakte Bestimmung von zwei in demselben vertretenen Arten gestattete, während die dritte Art sich als eine neue erwies, so ist es nicht möglich, über das geologische Alter der korallenführenden Ablagerung ein präzises Urteil abzugeben. Die drei vertretenen Gattungen Orbicella, Isastraea und Stephanocoenia finden sich meist miteinander vergesellschaftet von dem mittleren Jura an bis in das Miocän. Zwei derselben, Orbicella und Stephanocoenia, leben noch in den heutigen Meeren, die letztere allerdings nur noch durch wenige Arten vertreten. Indessen sind mir weder aus dem Jura noch aus der Kreide so kleinkelchige Orbicellen bekannt, wie Orb. Theresiana, während sie im Tertiär, namentlich im Miocän, häufig sind. (Orb. Ellisiana, microcalyx, plana, annularis u. a.) Diese Art würde also mehr für mittleres Tertiär sprechen. Ebenso die zweite, Isastraea turbinata, welche

[1]) Vaughan, The eocene and lower oligocene coral faunas of the Un. States. Monogr. U. S. Geol. Surv. XXXIX, p. 151, Washington 1900.

[2]) Duncan, On the fossil corals of the West-Indian Islands Pt. IV, p. 19, pl. II, f. 1. Proceed. Geol. Soc., London 1867.

von Duncan in dem Miocän von Westindien gefunden wurde. Bei der dritten Art, Stephanocoenia cf. Fairbanksi ist nach Vaughans eigener Angabe die Herkunft aus kretazeischen Schichten zweifelhaft. Sie würde also nicht unbedingt gegen ein tertiäres Alter sprechen. Andererseits sind gerade Isastraea und Stephanocoenia, wie auch die mit letzterer äußerst nahe verwandte Gattung Astrocoenia Genera, deren Spezies selbst in verschiedenen Formationen sich oft außerordentlich ähnlich werden. So fand Duncan in dem Tertiär von Jamaica eine Astrocoenia, welche von der bekannten kretazeischen Astroc. decaphylla sich lediglich durch ihre Zweigform unterschied, so daß er sie in seiner Beschreibung der westindischen Korallen direkt als Astroc. decaphylla E. H. nur mit dem Zusatz „varietas" anführt.[1]) Bezüglich der Gattung Isastraea mag noch an einen offenherzigen Ausspruch von Duncan erinnert werden. Derselbe beschrieb eine Koralle aus dem Miocän von Antigua als eine neue Art, Isastraea conferta. Am Schlusse der Beschreibung[2]) bemerkt er: „If the specimen had been found in oolitic rocks, it would have passed for a small variety of Isastraea tenuistriata" (eine Art aus dem englischen Dogger!). Auf Grund dieser Erwägungen kann man sagen, daß die Annahme eines miocänen Alters die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat, ohne indes ein anderes direkt auszuschließen. Wie mir Herr Professor Rothpletz mitteilte, hat der zu früh der Wissenschaft entrissene Geheimrat v. Zittel die Stücke früher selbst einmal durchgesehen und eins derselben als Stylina n. sp. bestimmt. Da bei den Arten Isastraea turbinata und Stephanocoenia Fairbanksi die Polyparien direkt durch ihre Mauern verbunden sind, so kann er mit jener Bestimmung nur das von mir als Orbicella beschriebene Stück gemeint haben. Die Bestimmung desselben als Stylina wäre von großer Wichtigkeit, denn dann wäre ein tertiäres Alter der Stücke ziemlich unwahrscheinlich und es könnte sich nur um Jura

[1]) Duncan, On the fossil corals of the West-Indian Islands. P. I, p. 440. Proceed. Geol. Soc., London 1863.

[2]) Duncan, l. c., p. 423.

oder Kreide handeln, von welch beiden Formationen wiederum die letztere wegen des äußeren Habitus der Stücke sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich hätte. Man würde dann also auf ein jurassisches Alter der betreffenden Ablagerung schließen. Es mag daher hier noch ausdrücklich bemerkt sein, daß es mir auch auf einer Schliffläche von Orbicella Theresiana nicht möglich war, die für Stylina charakteristische Fortsetzung der Rippen von einem Kelch zum anderen zu beobachten. Die Septocosten haben vielmehr typische Spindelform, der septale Teil ist sehr dünn, der costale sehr kräftig und spitzt sich dann zu, so daß die Verbindung der Kelche fast ausschließlich durch Exothecalgewebe bewirkt wird. Daß manche der Rippen mit denen der Nachbarkelche zusammenstoßen, einzelne in gleicher Richtung verlaufend, miteinander zusammenstoßend sich von einem Kelch zum anderen fortsetzen, kann man bei fast allen Orbicella-Arten beobachten. Auch das Verhalten der Columella stimmt besser mit Orbicella als mit Stylina. Sie stellt nur in ihrem obersten Teil ein kompaktes Griffelchen dar, sonst erscheint sie in Durchschnitten stets von spongiöser Struktur.

Auf der geologischen Karte, welche Karsten seiner schönen Arbeit[1]) über die geognostischen Verhältnisse des westlichen Columbien beigegeben hat, ist in der Umgebung von Cartagena nur Tertiär verzeichnet; eine Angabe, welche mit meinen Resultaten in Einklang stehen würde.

Was die biologischen Verhältnisse der gefundenen Korallenarten anlangt, so sind es sämtlich typisch riffbildende Formen und finden sich in fast allen Korallenriffen vom Dogger bis zum Miocän. Jene Ablagerung von La Papa stellt uns also ein altes Korallenriff dar, welches durch eine Hebung der Küste in seine jetzige Lage von 50—75 m über den Meeresspiegel gelangte. Es ist bekannt, daß sich gegenwärtig die Nordküste Süd-Amerikas von der Mündung des Orinoko bis

[1]) Amtlicher Bericht über die 32. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wien 1856, p. 80. Wien 1858.

zur Landenge von Panama im Zustande einer langsamen Hebung befindet. Eine solche ist teils direkt nachgewiesen, teils sehr wahrscheinlich. Dafür spricht zunächst das gewaltige, außerordentlich verzweigte Delta des Orinoko. Auch die Lagune von Maracaibo und die Bai von Cienega zeigen ganz den Charakter früher größerer Meerbusen, die jetzt im Begriff sind, ihre Zugehörigkeit zum Meer zu verlieren. Auch weitere Belege für die Hebung findet man bei Hahn[1]) angeführt. Diesen reiht sich nun als einer der schönsten Beweise das von Ihrer Kgl. Hoheit entdeckte Korallenriff von La Papa an und zeigt uns, daß diese Hebung wahrscheinlich bereits in der mittleren Tertiärzeit begann.

[1]) Hahn, Untersuchungen über das Aufsteigen und Sinken der Küsten, p. 97. Hab.-Schrift, Leipzig 1879.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 4. März 1905.

1. Herr Gustav Bauer legt eine Abhandlung vor: „Von der Kurve 6. Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen."

2. Herr Sebastian Finsterwalder berichtet über eine mit Herrn Professor Adolf Blümcke in Nürnberg gemeinsam durchgeführte Untersuchung der zeitlichen Änderung der Gletschergeschwindigkeit.

Es sind zu unterscheiden 1. langjährige Schwankungen, die auch in der Veränderung der Gletschergröße zum Ausdruck kommen, 2. Schwankungen in der Dauer von wenigen Jahren, die die Gletschergröße nicht merklich beeinflussen und 3. jahreszeitliche Schwankungen. Die am Hintereisferner ausgeführten Beobachtungen wurden auf zehn, meist mehrwöchentlichen Besuchen des Ferners in den Jahren 1899—1904 gesammelt. Sie ergaben bezüglich der zweitgenannten Schwankungen eine die Geschwindigkeit des Gletschereises mehr als fünfzigmal übertreffende Fortpflanzungsgeschwindigkeit von oben nach unten. Für die jahreszeitlichen Schwankungen muß die bisher festgehaltene Meinung, daß die Gletscher im Sommer schneller fließen, auf die untersten Teile der Zunge eingeschränkt werden; für die mittleren und oberen Teile ergab sich nämlich eine ausgesprochene Verminderung der Sommergeschwindigkeit gegenüber der Durchschnittsgeschwindigkeit des Jahres. An der Firnlinie ist die Sommergeschwindigkeit

nur mehr 70 % der Jahresgeschwindigkeit, in der Mitte der Zunge etwa 80 %, am unteren Ende dagegen 133 %. Der Grund dieser Erscheinung wird darin gesucht, daß von den beiden, die Gletscherbewegung beschleunigenden Faktoren Firnbelastung einerseits und Durchtränkung mit Schmelzwasser andererseits, der erste hauptsächlich im Winter den oberen, der zweite im Sommer den unteren Teilen des Gletschers zugute kommt.

3. Herr Richard Hertwig bespricht eine von dem Ornithologen Karl Eduard Hellmayr ausgeführte Revision der Spix'schen Typen brasilianischer Vögel. Die Arbeit soll in die Denkschriften der Akademie aufgenommen werden.

Diese Typen wurden gesammelt auf der bekannten Reise, welche Spix und Martius im Auftrage des Königs Maximilian Joseph 1817—1820 in das damals fast unerforschte Brasilien ausführten. Da die ursprüngliche Bearbeitung der Vögel Brasiliens durch Spix infolge mancher Zufälligkeiten und der Kränklichkeit des Verfassers keine sehr exakte war, so war eine genaue Revision der Spix'schen Typen schon längst ein Desiderat der Ornithologie. Dieselbe wurde von Herrn Hellmayr in sehr sorgfältiger Weise durchgeführt, wobei ihm viele andere Museen, besonders die Museen von Wien, Rothschild und Berlepsch ein reiches Vergleichsmaterial zur Verfügung stellten. Dadurch wurde es ermöglicht, daß sich die Revision einzelner Familien zu einer monographischen Darstellung derselben erweiterte. Die Arbeit, welche von zwei farbigen Tafeln und einer Anzahl von Textfiguren begleitet ist, wird daher für die Ornithologie Südamerikas und die Kunde von der geographischen Verbreitung der Vögel von großem dauerndem Wert sein.

4. Herr Adolf v. Baeyer hielt einen Vortrag über den Zusammenhang zwischen Färbung und chemischer Konstitution. Derselbe wird an anderer Stelle zur Veröffentlichung gelangen.

Von der Kurve 6. Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen.

Von **Gustav Bauer.**

(*Eingelaufen 4. März.*)

Um die Gleichung dieser Kurve zu bilden, verweist man gewöhnlich auf die von Moebius[1]) aus baryzentrischen Betrachtungen abgeleitete Relation

$$OA \cdot BCD - OB \cdot CDA + OC \cdot DAB - OD \cdot ABC = 0$$

(wo $ABC = \Delta ABC$ u. s. w.), welche die Bedingung ausspricht, daß die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kegelschnitt liegen, von welchem O einer der Brennpunkte ist. Faßt man, was Moebius nicht erwähnt, die Punkte A, B, C, D als gegeben auf und O als veränderlich, so gibt diese Relation die Gleichung der Brennpunktkurve eines Büschels von Kegelschnitten mit den Basispunkten A, B, C, D.

Ausgehend von einer Bemerkung Sylvesters,[2]) daß die Brennpunktkurve sich ergeben müsse, wenn man in der Gleichung

$$\lambda \sqrt{A} + \mu \sqrt{B} + \nu \sqrt{C} + \bar{\omega} \sqrt{D} = 0,$$

wo A, B, C, D die vier Basispunkte als unendlich kleine Kreise betrachtet darstellen, die $\lambda, \mu, \nu, \bar{\omega}$ so bestimmt, daß die Gleichung vom 6. Grade wird, stellte Cayley[3]) die Gleichung der Kurve in der Form auf

[1]) J. Crelle, 1843, Bd. 20, p. 26—31. Ges. W., Bd. I, p. 581.

[2]) „Supplemental Note on the Analogues in Space to the Cartesian Ovals in plano.“ Phil. Mag. Vol. 31. Fourth Series, Mai, 1866, p. 380.

[3]) „On the locus of the foci of the conics, which pass through four given points.“ Phil. Mag. Vol. XXXII (1866). Coll. Math. Papers. Vol. VII, p. 1.

$$\sum\left(\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b_1 & c_1 & d_1\end{vmatrix}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-a_1)^2}\right)=0,$$

wo $a_1\,a_1,\ b_1\,b_1\ldots$ die Koordinaten der Basispunkte des Büschels bezeichnen. Die Gleichung stimmt offenbar mit der aus der Relation von Moebius abgeleiteten überein. Die Gleichung ist 8. Grades, reduziert sich aber, indem die unendlich entfernte Gerade sich doppelt gezählt von der Kurve abtrennt, auf den 6. Grad. Ist die Gleichung schon an und für sich kompliziert, so verliert sich noch vollends alle Übersichtlichkeit bei dem Versuch, sie durch Entwicklung auf den 6. Grad zu reduzieren.

Die bekannten Singularitäten der Kurve sind nun aber so sehr an das Polardreieck des Kegelschnittbüschels gebunden,[1]) daß es mir angezeigt erschien, dieses Dreieck als Fundamentaldreieck zu wählen und die Gleichung der Kurve in trimetrischen Koordinaten auszurechnen. Hiebei ergab sich nun, nach Entfernung des quadratischen Faktors für die Kurve eine Gleichung 6. Grades von so überraschender Durchsichtigkeit, daß sie wohl verdient, bekannt gegeben zu werden.

1. Der Büschel sei bestimmt durch zwei Kegelschnitte

$$\left.\begin{aligned}U &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0\\ V &= a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + a_3' x_3^2 = 0\end{aligned}\right\}\qquad 1)$$

bezogen auf das gemeinsame Polardreieck ABC des Büschels. Unter den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 verstehe ich hier die senkrechten Entfernungen eines Punktes von den dre Seiten des Fundamentaldreiecks, welche resp. den drei Ecken A, B, C gegenüberliegen und die Zeichen dieser Koordinaten seien so gewählt, daß für einen Punkt im Innern des Dreiecks die drei Koordinaten positiv sind.

Die Brennpunkte eines Kegelschnitts seien ferner nach Plücker definiert als die Durchschnitte der zwei Tangenten-

[1]) Vgl. auch St. Haller. „Untersuchung der Brennpunktkurve eines Kegelschnittbüschels etc.“ (Diss. d. Techn Hochsch. 1903), wo eine große Anzahl solcher Kurven verzeichnet ist.

paare, welche von den zwei unendlich entfernten imaginären Kreispunkten der Ebene I_1, I_2 an den Kegelschnitt gezogen werden können. Es sind deren also vier, zwei reelle und zwei imaginäre.

Nun sei

$$W = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = 0 \tag{2}$$

die Gleichung irgend eines Kegelschnitts des Büschels, $P'(x')$, $P''(x'')$ zwei beliebige Punkte der Ebene, so sind die Tangentenpaare, welche von P', resp. P'' an den Kegelschnitt W gezogen werden können, durch die Gleichungen bestimmt

$$(W_1 x_1' + W_2 x_2' + W_3 x_3')^2 - W W' = 0$$
$$(W_1 x_1'' + W_2 x_2'' + W_3 x_3'')^2 - W W'' = 0,$$

wo W_1, W_2, W_3 die halben Abgeleiteten von W nach x_1, x_2, x_3 resp. bezeichnen und W', W'' die Werte von W bezeichnen, wenn man darin die Koordinaten x', resp. x'' einsetzt. Ausgerechnet reduzieren sich diese zwei Gleichungen auf folgende:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 A_2 (x_1 x_2' - x_2 x_1')^2 + A_1 A_3 (x_1 x_3' - x_3 x_1')^2 + A_2 A_3 (x_2 x_3' - x_3 x_2')^2 = 0 \\ &A_1 A_2 (x_1 x_2'' - x_2 x_1'')^2 + \quad - \quad\quad - \quad = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Das System dieser zwei Gleichungen liefert die vier Durchschnittspunkte der zwei Tangentenpaare.

2. Wir nehmen jetzt für die Punkte P' P'' die unendlich entfernten Kreispunkte I_1, I_2. Die Koordinaten derselben sind, wie unschwer zu berechnen,

$$\begin{aligned} x_1' : x_2' : x_3' &= 1 : -e^{+iC} : -e^{-iB} \\ x_1'' : x_2'' : x_3'' &= 1 : -e^{-iC} : -e^{+iB} \end{aligned} \tag{4}$$

wenn man unter A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks ABC an den gleichnamigen Ecken versteht. Setzt man diese Werte der x' und x'' in die Gleichungen 3) ein, so gibt die Addition und die Subtraktion derselben, nach Weghebung eines Faktors 2, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A_1 A_2 (x_1^2 \cos 2C + x_2^2 + 2x_1 x_2 \cos C) \\ &+ A_1 A_3 (x_1^2 \cos 2B + x_3^2 + 2x_1 x_3 \cos B) \\ &+ A_2 A_3 (x_2^2 \cos 2B + x_3^2 \cos 2C - 2x_2 x_3 \cos (C - B)) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&A_1 A_2 (x_1^2 \sin 2C + 2x_1 x_2 \sin C)\\ &+ A_1 A_3 (-x_1^2 \sin 2B - 2x_1 x_3 \sin B)\\ &+ A_2 A_3 (-x_2^2 \sin 2B + x_3^2 \sin 2C - 2x_2 x_3 \sin(C-B)) = 0,\end{aligned} \quad 6)$$

welche, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_1 \cos C &= X_3, & x_1 \sin C &= Y_3\\ x_3 + x_1 \cos B &= X_2, & -x_3 \sin B &= Y_2\\ x_2 \cos B - x_3 \cos C &= X_1, & -(x_2 \sin B + x_3 \sin C) &= Y_1 \end{aligned}\right\} 7)$$

setzt, übergehen in

$$\begin{aligned} A_1 A_2 (X_3^2 - Y_3^2) + A_1 A_3 (X_2^2 - Y_2^2) + A_2 A_3 (X_1^2 - Y_1^2) &= 0\\ A_1 A_2 \cdot X_3 Y_3 + A_1 A_3 \cdot X_2 Y_2 + A_2 A_3 \cdot X_1 Y_1 &= 0 \end{aligned} \quad 8)$$

Aus dem System dieser zwei Gleichungen ergibt sich

$$A_1 A_2 : A_1 A_3 : A_2 A_3 = [12] : [31] : [23], \quad 9)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} [12] &= (X_2^2 - Y_2^2) X_1 Y_1 - (X_1^2 - Y_1^2) X_2 Y_2\\ [31] &= (X_1^2 - Y_1^2) X_3 Y_3 - (X_3^2 - Y_3^2) X_1 Y_1\\ [23] &= (X_3^2 - Y_3^2) X_2 Y_2 - (X_2^2 - Y_2^2) X_3 Y_3 \end{aligned}\right\} 10)$$

Aus 9) folgt sodann

$$A_2 : A_3 = [12]:[31], \quad A_1 : A_3 = [12]:[23], \quad A_1 : A_2 = [31]:[23]. \quad 11)$$

Es sei nun

$$W = U + \lambda V,$$

hiemit $A_1 = a_1 + \lambda a_1'$, $A_2 = a_2 + \lambda a_2'$, $A_3 = a_3 + \lambda a_3'$, so werden die Gleichungen 11)

$$\left.\begin{aligned} (a_3 + \lambda a_3')[12] - (a_2 + \lambda a_2')[31] &= 0\\ (a_1 + \lambda a_1')[23] - (a_3 + \lambda a_3')[12] &= 0\\ (a_2 + \lambda a_2')[31] - (a_1 + \lambda a_1')[23] &= 0 \end{aligned}\right\} 12)$$

Die Elimination von λ aus irgend zweier dieser Gleichungen ergibt die Gleichung des Orts der Brennpunkte des Büschels

$$(a_1 a_3' - a_3 a_1')[12][23] + (a_2 a_1' - a_1 a_2')[23][31] + (a_3 a_2' - a_2 a_3')[31][12] = 0 \quad 13)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$a_3' a_1 - a_3 a_1' = (31)$, $a_1' a_2 - a_1 a_2' = (12)$, $a_2' a_3 - a_2 a_3' = (23)$ setzen,

$$\frac{(12)}{[12]} + \frac{(23)}{[23]} + \frac{(31)}{[31]} = 0. \qquad 13')$$

3. Da die [12], ... vom 4. Grade in den Koordinaten sind, so ist die Gleichung 13) vom 8. Grad. Aber es ist leicht zu sehen, daß die Verbindungslinie der zwei Punkte P', P'', von denen die Tangentenpaare an die Kegelschnitte des Büschels ausgehen, immer, doppelt genommen, ein Teil des Orts der Schnittpunkte der Tangentenpaare ist. Es muß sich also im vorliegenden Falle die unendlich entfernte Gerade

$$\Omega = x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0 \qquad 14)$$

doppelt gezählt von der Kurve abheben, oder also der Faktor Ω^2 aus der Gleichung 13) abspalten lassen. Diese Abspaltung läßt sich hier leicht ausführen; es lassen sich nämlich die Ausdrücke [12], [23], [31] in je zwei Faktoren zerlegen, deren einer den Faktor Ω enthält. So ist

$$\left.\begin{aligned} [23] &= (X_2 X_3 + Y_2 Y_3)(Y_2 X_3 - Y_3 X_2) \\ [31] &= (X_3 X_1 + Y_3 Y_1)(Y_3 X_1 - Y_1 X_3) \\ [12] &= (X_1 X_2 + Y_1 Y_2)(Y_1 X_2 - Y_2 X_1) \end{aligned}\right\} 15)$$

Die zweiten Faktoren reduzieren sich auf $-x_1 \Omega$, $+x_2 \Omega$, $-x_3 \Omega$; die ersten auf K_1, $-K_2$, K_3, wenn man setzt,

$$\left.\begin{aligned} x_2 x_3 + x_1(-x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C) &= K_1 \\ x_3 x_1 + x_2(\ \ x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_3 \cos C) &= K_2 \\ x_1 x_2 + x_3(\ \ x_1 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C) &= K_3 \end{aligned}\right\} 16)$$

Die Gleichung der Brennpunktkurve des Büschels reduziert sich sodann auf folgende Form:

$$\frac{(12)}{x_3 K_3} + \frac{(23)}{x_1 K_1} + \frac{(31)}{x_2 K_2} = 0$$

oder

$$(12)\, x_1 x_2 K_1 K_2 + (23)\, x_2 x_3 K_2 K_3 + (31)\, x_3 x_1 K_3 K_1 = 0 \qquad 17)$$

STANFORD LIBRARY

eine Gleichung 6. Grades, bemerkenswerth wegen der einfachen geometrischen Bedeutung der Größen, die in dieselben eingehen. Denn die Konstanten (12), (23), (31) sind, wie aus den Gleichungen 1) hervorgeht, die Quadrate der Koordinaten der Durchschnittspunkte der Kegelschnitte U und V, d. h. also die Quadrate der Koordinaten der Basispunkte des Büschels. Die Größen $K_1\,K_2\,K_3$ aber stellen die über den Seiten des Fundamentaldreiecks $A\,B\,C$ als Durchmesser beschriebenen Kreise dar. Um sich hievon zu überzeugen, bemerke man, daß die Fußpunkte $D\,E\,F$ der von den Ecken A, B, C auf die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks $A\,B\,C$ gefüllten Senkrechten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$x_1 = 0, \quad x_2 \cos B - x_3 \cos C = 0 \qquad D)$$
$$x_2 = 0, \quad x_1 \cos A - x_3 \cos C = 0 \qquad E)$$
$$x_3 = 0, \quad x_1 \cos A - x_2 \cos B = 0 \qquad F)$$

Es geht also z. B. die Kurve $K_3 = 0$ durch die Ecke $A\,(x_2 = 0,\ x_3 = 0)$, die Ecke $B\,(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und durch die zwei Punkte D, E; außerdem zeigt eine kleine Rechnung,

daß sie auch durch die zwei Kreispunkte I_1, I_2 4) geht. Die Kurve ist also der über AB konstruierte Kreis.[1]

4. Die Brennpunktkurve hat, wie schon Cayley gefunden, acht Doppelpunkte.[2] Vermöge der einfachen Zusammensetzung der Gleichung 17) lassen sich diese acht Doppelpunkte sofort aus derselben erkennen. Es sind die zwei Kreispunkte I_1, I_2, die drei Ecken des Fundamentaldreiecks A, B, C, und die drei Fußpunkte der Höhen desselben D, E, F, durch welche je zwei der Kreise K und eine Seite des Dreiecks ABC gehen. Jeder der Kreise K geht durch sechs dieser Doppelpunkte und hat mithin keinen weiteren Punkt mit der Kurve 6. Ordnung gemein.

Man bemerke, daß die Gleichung 17) nicht nur verwendbar ist, wenn die Basispunkte des Kegelschnittbüschels reell sind, sondern auch, wenn dieselben sämtlich imaginär sind, da auch in diesem Falle das Polardreieck ABC des Büschels ganz reell ist. Die Doppelpunkte der Brennpunktkurve bleiben mithin auch, außer I_1, I_2, sämtlich reell, wenn die zwei Kegel-

---

[1] Will man die Gleichung des Kreises direkt berechnen, so kann man von einer allgemeinen Kreisgleichung in trimetrischen Koordinaten ausgehen. Um eine solche zu erhalten, bemerke man, daß, wenn $S = 0$ die Gleichung irgend eines Kreises ist, $S + (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\,\Omega = 0$, wo α, β, γ beliebige Konstanten sind, eine solche allgemeine Form der Kreisgleichung ist. Für S kann man allenfalls den unendlich kleinen Kreis um A beschrieben nehmen, also $S = x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_2 x_3 \cos A$ setzen.

[2] Cayley (a. a. O.) waren nur die fünf Doppelpunkte I_1, I_2, A, B, C bekannt. Um nachzuweisen, daß die Kurve acht Doppelpunkte habe, zeigt er zunächst, daß, wie schon Sylvester a. a. O. p. 384 bemerkt, jede Gerade, welche einen der Kreispunkte I_1, I_2 mit einem der vier Basispunkte des Büschels verbindet, Doppeltangente der Kurve ist, sodann daß noch zwei einfache Tangenten von jedem der Punkte I_1, I_2 an die Kurve gehen. Es gehen mithin von I_1 $2.4 + 2 = 10$ Tangenten an die Kurve. Daraus folgt die Klassenzahl der Kurve $= 14$. Dieselbe erfährt also, da $14 = 6.5 - 16$, eine Depression um 2.8, woraus zu folgern ist, daß die Kurve acht Doppelpunkte hat. — Daß die drei Punkte D, E, F auch Doppelpunkte der Kurve sind, hat K. Bobek auf synthetischem Wege nachgewiesen. („Die Brennpunktkurve des Kegelschnittbüschels." Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien, III. Jahrg., 1892, p. 312.)

schnitte 1), welche den Büschel bestimmen, keinen reellen Punkt gemeinsam haben.

5. Es erübrigt noch zu zeigen, wie aus der Brennpunktkurve die Brennpunkte der einzelnen Kurven $U + \lambda V$ des Büschels zu erhalten sind. Dieß ergibt sich aber sofort aus den Gleichungen 12), aus welchen durch Elimination von λ eben die Gleichung der Brennpunktkurve hervorging. Nimmt man in diesen Gleichungen den Faktor Ω, der in den [12], [31], [23] enthalten ist, weg, so gehen dieselben über in folgende

$$\left.\begin{aligned} (a_2 + \lambda a_2')\, x_2 K_2 - (a_3 + \lambda a_3')\, x_3 K_3 = 0 \\ (a_1 + \lambda a_1')\, x_1 K_1 - (a_3 + \lambda a_3')\, x_3 K_3 = 0 \\ (a_2 + \lambda a_2')\, x_2 K_2 - (a_1 + \lambda a_1')\, x_1 K_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

welche Kurven dritter Ordnung darstellen, von denen jede die vier Brennpunkte (zwei reelle und zwei imaginäre des Kegelschnitts $U + \lambda V$ aus der Kurve 6. Ordnung 17) ausschneidet. Die erste dieser Kurve hat $A\,(x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ zum Doppelpunkt, die zweite $B(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$, die dritte $C\,(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ zum Doppelpunkt und jede derselben geht außerdem durch die Punkte D, E, F und die zwei Kreispunkte I_1, I_2. Von den $3 \cdot 6 = 18$ Schnittpunkten einer solchen Kurve 3. Ordnung mit der Kurve 6. Ordnung fallen also $4 + 5 \cdot 2 = 14$ auf die Doppelpunkte der letzteren. Die vier übrigen mit λ beweglichen Schnittpunkte sind eben die Brennpunkte von $U + \lambda V$.

6. Von speziellen Fällen soll hier nur der eine Fall betrachtet werden, wenn die vier Basispunkte des Büschels in einem Kreise liegen, da derselbe ein besonderes Interesse gewährt. Es hat nämlich Sylvester gefunden,[1]) daß in diesem

[1]) „Supplemental Note on the Analogues in Space to the Cartesian Ovals in plano.“ Phil. Mag. Vol. 31 Fourth Series, Mai, 1866, p. 380 Sylvester kommt hier auf eine zirkulare Kurve 3. Ordnung, von der er sagt: „Sie ist der Ort der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, deren Axen parallel sind und welche also durch vier Punkte, die in einem Kreise liegen, gehen“. . . „Diese Kurve geht nicht nur durch den Mittelpunkt des Kreises und die drei Diagonalpunkte, sondern ist

Falle der Ort der Brennpunkte des Büschels aus zwei Kurven 3. Ordnung besteht. Die für den Ort gefundene Gleichung 17) muß also in diesem Falle in zwei Gleichungen 3. Ordnung zerfallen. Und in der Tat ist die Form derselben so charakteristisch für die Kurve, daß sie uns einen geometrischen Einblick gewährt, wie dieses Zerfallen vor sich geht.

Nun ist die Gleichung des Kreises, der zu dem Büschel mit dem Polardreieck ABC gehört, wie sich leicht aus Nr. 3, Anmerkung, berechnet,

$$H = x_1^2 \sin A \cos A + x_2^2 \sin B \cos B + x_3^2 \sin C \cos C = 0 \qquad 19)$$

Der Mittelpunkt M dieses Kreises fällt mit dem Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks ABC zusammen. Seine Koordinaten erfüllen also die Gleichungen

$$x_1 \cos A = x_2 \cos B = x_3 \cos C.$$

Der Kreis ist der Orthogonalkreis der Kreise K_1, K_2, K_3 und kann reell oder imaginär sein. Sind die Basispunkte des Büschels und also auch der Kreis reell, so ist das Polardreieck ABC stumpfwinklig, der Punkt M außerhalb des Dreiecks. Jedenfalls hat man, wenn die Basispunkte des Büschels auf dem Kreise liegen, nach der Bedeutung der Größen (12), (23), (31)

$$(12) \sin C \cos C + (23) \sin A \cos A + (31) \sin B \cos B = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung können wir eine der Größen (12) . . ., etwa (23), aus der Gleichung 17) eliminieren und erhalten

auch in jedem dieser Punkte parallel zu der Asymptote, d. h. zu der Geraden, welche einen der Winkel, in welchem sich die Diagonalen schneiden, halbiert. Sie ist also identisch zu einer der zwei konjugierten zirkularen Kurven Salmons (Higher Plane curves, p. 175), von welcher die vier betreffenden Punkte im Kreise Brennpunkte sind. Die zwei konjugierten zirkularen Kurven 3. Ordnung, von welchen vier Punkte in einem Kreise die Brennpunkte sind, bilden also zusammen den vollständigen Ort der Brennpunkte des Systems von Kegelschnitten, welche durch eben diese vier Punkte gehen." Wie Salmon gezeigt hat, bestehen diese Kurven immer aus einem Oval und einem unpaaren Zug.

$$\begin{aligned}(12)\, x_2 K_2 (x_1 K_1 \sin A \cos A - x_3 K_3 \sin C \cos C) \\ + (31)\, x_3 K_3 (x_1 K_1 \sin A \cos A - x_2 K_2 \sin B \cos B) = 0\end{aligned} \qquad 20)$$

Um die Ausdrücke in den Klammern zu vereinfachen, bemerke man, daß die Reduktion des Kreises $K + (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\Omega$ auf die Form H die Relationen ergibt,[1])

$$\left.\begin{aligned} K_3 \sin C &= (x_1 \cos A + x_2 \cos B)\,\Omega - H \\ K_1 \sin A &= (x_2 \cos B + x_3 \cos C)\,\Omega - H \\ K_2 \sin B &= (x_3 \cos C + x_1 \cos A)\,\Omega - H \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Hiemit geht Gleichung 20) über in

$$\begin{aligned}(12)\, x_2 K_2 (x_1 \cos A - x_3 \cos C) [H - x_2 \cos B \cdot \Omega] \\ + (31)\, x_3 K_3 (x_1 \cos A - x_2 \cos B) [H - x_3 \cos C \cdot \Omega] = 0\end{aligned} \qquad 22)$$

7. Der Ausdruck $H - x_3 \cos C \cdot \Omega$ stellt einen Kreis dar und da er entwickelt

$$= x_1 \sin A\, (x_1 \cos A - x_3 \cos C) + x_2 \sin B\, (x_2 \cos B - x_3 \cos C)$$

ist, so ersieht man, daß dieser Kreis durch die Ecke C des Polardreiecks, den Höhepunkt M des Dreiecks und die Fußpunkte D, E der von A und B ausgehenden Höhen geht.

Setzen wir also um abzukürzen

$$x_1 \cos A - x_3 \cos C = (x_1\, x_3)$$
u. s. f.

wobei zu bemerken, daß

$$(x_3\, x_1) = -(x_1\, x_3),$$

und

[1]) Setzt man diese Werte der K in die Kurvengleichung 17) ein und macht sodann $\Omega = 0$, so erhält man, da H^2 sich weghebt, einen dem Dreieck ABC umschriebenen Kegelschnitt, dessen Asymptoten die zwei unendlich entfernten Punkte markieren, welche die Kurve außer den Doppelpunkten I_1, I_2 hat. Macht man dieselbe Operation in Gleichung 22), so geht der umschriebene Kegelschnitt durch den Höhepunkt M; er wird also eine gleichseitige Hyperbel; die zwei Asymptoten sind reell und stehen senkrecht zueinander.

$$\left.\begin{aligned} H - x_3 \cos C \cdot \Omega &= x_1 \sin A\,(x_1 x_3) + x_2 \sin B\,(x_2 x_3) = K_3' \\ H - x_1 \cos A \cdot \Omega &= x_2 \sin B\,(x_2 x_1) + x_3 \sin C\,(x_3 x_1) = K_1' \\ H - x_2 \cos B \cdot \Omega &= x_3 \sin C\,(x_3 x_2) + x_1 \sin A\,(x_1 x_2) = K_2' \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

so sind K_1', K_2', K_3' die Kreise, welche über den Strecken MA, MB, MC als Durchmesser beschrieben sind, und also durch je zwei der Höhenfußpunkte D, E, F hindurchgehen.

8. Die Kurvengleichung 22) schreibt sich jetzt

$$(12)\,(x_1 x_3)\,K_2 \cdot x_2 K_2' + (31)\,(x_1 x_2)\,K_3 \cdot x_3 K_3' = 0 \qquad 24)$$

und läßt sofort erkennen, daß nun auch der Punkt M, Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Basispunkte des Büschels liegen, Doppelpunkt der Kurve ist. Sie enthält also nun neun Doppelpunkte, A, B, C, D, E, F, M, I_1, I_2. Da eine Kurve 6. Ordnung zehn Doppelpunkte haben kann, so ist durch Entstehen des neunten Doppelpunkts M das Zerfallen der Kurve nicht unmittelbar bedingt; aber es ist aus der Gleichung 24) leicht zu ersehen, daß in der Tat ein Zerfallen der Kurve in zwei Kurven 3. Ordnung, von denen jede durch die neun Doppelpunkte geht, eintritt. Das beruht darauf, daß die Kurvengleichung 24) aus lauter ausgearteten Kurven 3. Ordnung, durch die neun Punkte gehend, zusammengesetzt ist. (Das Oval ist in einen Kreis, der unpaare Zug in eine Gerade ausgeartet.) So sind

$$(x_2 x_3)\,K_1,\quad (x_3 x_1)\,K_2,\quad (x_1 x_2)\,K_3$$

solche ausgeartete Kurven 3. Ordnung, und ebenso auch

$$x_1 K_1',\quad x_2 K_2',\quad x_3 K_3'.$$

Die Kreise K, K' gehen durch je sechs der obigen neun Punkte hindurch, der lineare Faktor durch die drei übrigen. Bezeichnen wir diese ausgearteten Kurven der Reihe nach mit

$$\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \mathfrak{K}_3$$
$$\mathfrak{K}_1',\ \mathfrak{K}_2',\ \mathfrak{K}_3',$$

so erhält die Kurvengleichung 24) die Form

$$(31)\ \mathfrak{K}_3 \mathfrak{K}_3' - (12)\,\mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_2' = 0. \qquad 25)$$

Da nun die Kurven 3. Ordnung, welche durch die obigen neun Punkte gehen, einen Büschel bilden, so kann man die $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ durch irgend zwei derselben linear ausdrücken und dadurch die Gleichung 25) auf eine quadratische Gleichung, etwa in $\mathfrak{K}_3'$ und $\mathfrak{K}_2'$, zurückführen, deren Auflösung sodann die zwei Kurven 3. Ordnung, in welche die Kurve 6. Ordnung zerfällt, in der Form

$$\lambda\,\mathfrak{K}_2' - \mu\,\mathfrak{K}_3' = 0 \tag{26}$$

ergibt.

Zur Reduktion hat man die Relationen

$$\begin{aligned}
\sin C\cdot\mathfrak{K}_3 &= -\cos A\cdot\mathfrak{K}_1' + \cos B\cdot\mathfrak{K}_2' \qquad & \sin C\cdot\mathfrak{K}_3' &= \cos A\cdot\mathfrak{K}_1 - \cos B\cdot\mathfrak{K}_2\\
\sin A\cdot\mathfrak{K}_1 &= -\cos B\cdot\mathfrak{K}_2' + \cos C\cdot\mathfrak{K}_3' & \sin A\cdot\mathfrak{K}_1' &= \cos B.\mathfrak{K}_2 - \cos C\cdot\mathfrak{K}_3\\
\sin B\cdot\mathfrak{K}_2 &= -\cos C\cdot\mathfrak{K}_3' + \cos A\cdot\mathfrak{K}_1' & \sin B\cdot\mathfrak{K}_1' &= \cos C\cdot\mathfrak{K}_3 - \cos A\cdot\mathfrak{K}_1\\
\Sigma \sin C\cdot\mathfrak{K}_3 &= 0 & \Sigma \sin C\cdot\mathfrak{K}_3' &= 0.
\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung in $\mathfrak{K}_3'$, $\mathfrak{K}_2'$ wird

$$(31)\cos A\cdot\mathfrak{K}_3'^2 + [(31)+(12)]\,\mathfrak{K}_3'\mathfrak{K}_2' + (12)\cos A\cdot\mathfrak{K}_2'^2 = 0, \tag{27}$$

woraus

$$\frac{\mathfrak{K}_3'}{\mathfrak{K}_2'} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{-[(31)+(12)] + \sqrt{[(31)+(12)]^2 - 4\,(12)\,(31)\cos^2 A}}{2\,(31)\cos A}.$$

Dem doppelten Zeichen entsprechen die zwei Kurven 3. Ordnung, in welche die Brennpunktkurve zerfällt, wenn die vier Basispunkte des Büschels auf einem Kreise liegen. Aus dem früheren folgt (Nr. 7, Anm.), daß ihre Asymptoten zueinander senkrecht stehen.

Zeitliche Änderungen in der Geschwindigkeit der Gletscherbewegung.

Von **A. Blümcke** und **S. Finsterwalder.**

(Eingelaufen 17. Mai.)

Seit man die Tatsache des Fließens der Gletscher erkannt hat, fehlt es nicht an Bestrebungen, neben den örtlichen auch zeitliche Änderungen in der Geschwindigkeit des Fließens festzustellen. Forbes[1]) und Agassiz,[2]) die Begründer die Lehre von der Gletscherbewegung und später Tyndall[3]) haben den Einfluß der Jahreszeit auf die Gletscherbewegung untersucht. Dauernde Beobachtungen der Geschwindigkeit an der gleichen Stelle eines Gletschers, wie sie von Held am Rhonegletscher, von Seeland[4]) an der Pasterze, von J. Vallot[5]) am Eismeer von Chamounix und von uns gemeinsam mit H. Heß am Vernagtferner, Gepatschferner, Hintereisferner und Gliederferner angestellt wurden, haben gezeigt, daß mehrjährige periodische Änderungen der Gletschergeschwindigkeit vorkommen, wie solche schon durch den Verlauf mancher Gletscherschwankungen wahrscheinlich gemacht wurden. Wenn man von den, wie es scheint, gesetzlos verlaufenden, ganz kurzen Geschwindigkeitsänderungen absieht, kann man hiernach dreierlei

---

[1]) J. D. Forbes, Reisen in den Savoyer Alpen, übers. v. Leonhard. Stuttgart 1845, S. 134.

[2]) L. Agassiz, Système glaciaire, Paris 1847, S. 472.

[3]) J. Tyndall, Das Wasser in seinen Formen als Wolken und Flüsse, Eis und Gletscher. Autor. Ausg., Leipzig 1873, S. 109.

[4]) Veröffentlicht von H. Angerer, Carinthia II, 1903, Nr. 6.

[5]) Annales de l'observatoire du Mont Blanc, t. 4 u. t. 5.

Schwankungen in der Geschwindigkeit der Gletscherbewegung unterscheiden:

1. Schwankungen, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken und entsprechende Änderungen in den Größenverhältnissen der Eiszungen im Gefolge haben;
2. Schwankungen in der Dauer weniger Jahre, die keine Änderung der Gletschergröße bewirken;
3. Jahreszeitliche Schwankungen.

In Bezug auf die Schwankungen erster Art haben die obenerwähnten Messungen am Vernagtferner und Gliederferner die bemerkenswertesten Aufschlüsse gebracht. Sie zeigen, daß dem Anwachsen des Gletscher eine, unter Umständen ungeheure Vermehrung der Abflußgeschwindigkeit vorausgeht, sowie, daß noch vor Erreichung des größten Gletscherstandes diese Abflußgeschwindigkeit erheblich zurückgeht. So ist an der gleichen Stelle, nahe am Beginne der Zunge des Vernagtferners die Jahresgeschwindigkeit von 17 m im Jahre 1889 auf über 250 m im Jahre 1899 gestiegen und vom Jahre 1901 bis 1904 wieder auf 50 m gesunken. Dabei war das Gletscherende bis zum Jahre 1897 noch im Rückzug, dann erreichte eine die Zunge herablaufende Schwellung das Gletscherende, dieses ging vor und hat erst im Vorjahre (1904) seinen größten Stand erreicht. In ähnlicher Weise hat sich am Gliederferner in der zentralen Zillertalergruppe in der Zeit von 1885 bis 1897 die Jahresgeschwindigkeit in der Mitte der Zungenlänge von 14 m auf [illegible] m gesteigert; seither ist sie wieder auf 34 m zurückgegangen. Das Wachsen des Gletscherendes wurde erst nach 1892 [illegible] seinem Ende nahe [illegible] genannten Beispiele [illegible] die langsam [illegible] anderer [illegible] beobachtet [illegible] Geschwindig-[illegible]

[illegible] Geschwindigkeitsschwankungen nicht [illegible] Beobachtung der

Gletschergeschwindigkeit an ein- und derselben Stelle ohne weiteres hervor. Eine sehr ausgedehnte Reihe von Messungen dieser Art wurde von Oberbergrat F. Seeland in Klagenfurt an der Pasterze und zwar in der Mitte des Querprofiles Hoffmannshütte-Glocknerfuß ausgeführt und nach dessen Tode von Herrn Professor Angerer fortgesetzt. Sie ergab für die Jahresgeschwindigkeit: 1882—86 50,4 m, 1886—88 30,6 m, 1888—90 42,0 m, 1890—91 51,1 m, 1891—92 47,5 m, 1892—93 58,0 m, 1893—94 42,7 m, 1894—95 52,9 m, 1895—96 46,4 m, 1896—97 48,5 m, 1897—98 50,0 m 1898—99 60,6 m, 1899—1900 35,4 m, 1900—1902 43,6 m, 1902—1903 48,2 m, im Durchschnitt 1882—1903 46,9 m. Der Gletscher war dabei an seinem unteren Ende in dauerndem Rückzug, nur in den höher gelegenen Teilen konnten gelegentlich vorübergehende Schwellungen festgestellt werden. Ähnliche Verhältnisse haben die dreißigjährigen Messungen am Rhonegletscher, dessen Ende in dieser Zeit ununterbrochen zurückging, zutage gefördert, nur scheinen dort die Geschwindigkeitsänderungen weit regelmäßiger zu verlaufen und mit den vorübergehenden Schwellungen des Gletscherstandes in den oberen Teilen der Zunge in voller Übereinstimmung zu sein. Die seit langem sehnlichst erwartete Veröffentlichung des überaus reichen und wertvollen Materials der Rhonegletschervermessung wird auch hierüber Licht verbreiten.

Die Frage nach den jahreszeitlichen Schwankungen der Gletschergeschwindigkeit hat früh die Aufmerksamkeit der Gletscherforscher erregt, da von der Antwort auf dieselbe die Entscheidung zwischen den damals strittigen Bewegungstheorien abzuhängen schien. Aus den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts stammen einige ein Jahr umfassende Beobachtungsreihen von Forbes[1]) und Agassiz,[1]) aus welchen man schloß, daß die Gletscher in der warmen Jahreszeit rascher fließen als in der kalten. Das gleiche Ergebnis fand Steenstrup[1]) aneinigen nordischen Gletschern kleineren Umfangs, während Drygalski

[1]) Siehe: Heim, Handbuch der Gletscherkunde. Stuttgart 1885, S. 176 u. 177, sowie: Heß, Die Gletscher. Braunschweig 1904, S. 247 u. f.

an den großen Ausläufern des grönländischen Inlandeises keinen Einfluß der Jahreszeit wahrnehmen konnte. Heim glaubte auf Grund des bis dahin bekannten Materials folgende Sätze, allerdings mit vollem Vorbehalt späterer Prüfung ableiten zu können.

a) Je gewaltiger unter sonst gleichen Bedingungen der Gletscher, desto geringer der Einfluß der Jahreszeit auf die Bewegung.

b) Je steiler das Gletscherbett unter sonst gleichen Bedingungen, desto schwächer der Einfluß der Jahreszeit.

c) Im hohen Norden bei viel intensiverer Winterkälte ist der Einfluß der Jahreszeiten verhältnismäßig größer.

Spätere Beobachtungen bezogen sich nur mehr auf den Vergleich von Sommer- und Wintergeschwindigkeit an einzelnen Gletschern und schienen Heims Sätze zu bestätigen. So Westmanns[1]) Beobachtungen am Tuolpagletscher im Sulitelmagebiet und Axel Hambergs[2]) Beobachtungen am Mikajökul im nördlichen Schweden. Eine vier Jahre umfassende Reihe von Sommer- und Wintergeschwindigkeiten, die Herr J. Vallot[3]) am Eismeer von Chamounix beobachtete, und eine ähnliche, einjährige Reihe der Herren Gg. und W. S. Vaux[4]) vom Illicillewaetgletscher im Selkirkgebirge in Britisch-Kolumbia führten auf das gleiche Ergebnis. So schien an der Tatsache der größeren Sommerbewegung der Gletscher gemäßigter Zonen kein Zweifel mehr zu bestehen und nur über den Betrag des Unterschiedes waren neue Beobachtungen erwünscht. Entgegen stand eigentlich nur eine Beobachtung am Rhonegletscher, wo im Jahre 1883 in der heißesten Zeit die Eisgeschwindigkeit ebensogroß gefunden wurde als im Jahresdurchschnitt. Die Unterschiede im Überschuß der Sommerbewegung konnten sehr wohl davon herrühren, daß die seit 30 Jahren bevorzugte

[1]) Beobachtungen über die Gletscher von Sulitelma und Almajalos. Bull. of the geological Inst. of Upsala, Vol. IV, 1900.

[2]) Om Kvickjockfjällens glacierer. Geol. Föreningen i Stockholm Förhandl. 1897, Bd. 19, S. 513.

[3]) Siehe das spätere Zitat S. 130.

[4]) Les variations périodiques des glaciers VII. rapport. Archives des Sciences phys. et naturelles, Genève 1901, t. XII.

Art, die Geschwindigkeit mittels Steinmarken zu messen, eine durch das Abrutschen der Steine auf der Gletscherfläche bedingte Fehlerquelle in sich schließt, die sich je nach der Böschung der Gletscherfläche und deren Stellung gegen die Sonne in verschiedenem Grade bemerkbar macht; ja es schien nicht ganz ausgeschlossen, daß ein erheblicher Teil der beobachteten Sommerbewegung nur scheinbar ist und der genannten Fehlerquelle zugeschrieben werden muß.

Gründe dieser Art bestimmten uns vor fünf Jahren am Hintereisferner in den Ötztaler Alpen eine Messungsreihe zu beginnen, welche neben dem Studium der Ablation hauptsächlich der Untersuchung der zeitlichen Veränderung der Gletschergeschwindigkeit dienen sollte. Die örtliche Verteilung der Gletschergeschwindigkeit war durch frühere Vermessungen in der Hauptsache bekannt; damals war auch eine genaue Karte des Gletschers in 1:10000 aufgenommen worden, auf deren trigonometrisches Netz sich die neuen Beobachtungen gründen konnten.[1] Die Absicht war, die Sommer- und Wintergeschwindigkeit an mehreren Punkten des Gletschers getrennt zu verfolgen. Als Marken wurden ausschließlich Bohrlöcher von 6—8 cm Durchmesser gewählt, die in solcher Tiefe (4—9 m) angelegt wurden, daß sie im Laufe eines Jahres nicht zur Ausschmelzung kamen. In der Nähe des Gletscherendes mußten die Löcher deshalb mindestens 7 m tief gebohrt werden. Zur leichteren Auffindung waren in die Löcher eine Reihe aufeinandergestellter, 2 m langer Holzstangen gesteckt, die zugleich als Ablationspegel dienten. Die Stangen wurden mit Eisenschuhen soweit beschwert, daß sie in Wasser gesetzt eben schwebten. Außerdem lieferten drei früher hergestellte Bohrlöcher von 40 m, 66 m und 86 m Tiefe, die in ähnlicher Weise mit Holzstangen ausgefüllt waren, Bewegungs-Marken. Zuerst gedachten wir unsere Messungen auf die eigentliche Gletscherzunge zu beschränken. Aus anderen Gründen waren aber von Anfang an einige in der Gegend der Firnlinie gelegene ältere

[1]) A. Blümcke u. H. Heß, Studien am Hintereisferner. Wiss. Ergänzungshefte des D. u. Ö. Alpenvereins, I. Bd., 2. Heft, München 1899.

Bewegungssignale — vom Schneedruck zusammengestürzte Holzpyramiden — einbezogen worden. Sie erwiesen sich später als von besonderer Wichtigkeit und wurden dann zur genaueren Festlegung noch durch Bohrlöcher ergänzt. Die übrigen Bohrlöcher waren zumeist an Stellen angelegt worden, wo vorher Steinmarken der älteren Bewegungsmessungen lagen, so daß die neuen Messungen als Fortsetzung der alten angesehen werden können. Es war beabsichtigt, die Bohrlöcher Ende Juli, sobald es der Schluß der Mittelschulen dem Einen von uns (Blümcke) erlaubte, und Mitte September, solange die Unterkunft am Hochjochhospiz noch zu benützen war, durch den Andern (Finsterwalder) einzumessen. Verschiedene Umstände brachten es mit sich, daß die Last der Beobachtung im Felde fast ganz auf die Schultern des Erstgenannten fiel, der von den zehn Messungen acht ausführte. Auch die weitläufige Rechnung hat er zumeist erledigt. Die Einmessung der Bohrlöcher erfolgte fast ausschließlich auf dem Wege des Rückwärtseinschneidens nach 4—8 trigonometrischen Punkten und es wurde strenge darauf gesehen, daß bei der Juli- und Septembermessung jeweils dieselben Festpunkte benützt wurden. Das Rückwärtseinschneiden hatte den Vorzug, daß über die Identität des bestimmten Punktes kein Zweifel herrschen konnte, und daß das Aufstellen eigener Signale auf den zu bestimmenden Punkten vermieden wurde. Der Nachteil einer etwas geringeren Genauigkeit der Winkelmessung auf dem Eise und weitläufiger Rechnung mußte eben in Kauf genommen werden. Das benützte trigonometrische Netz, obwohl für die früheren Zwecke voll ausreichend, erwies sich namentlich in den Höhen als etwas ungenau, während die Horizontalpositionen eben genügten. Immerhin überschritten die Fehlerreste bei den ausgeglichenen Winkeln weit die wirklichen Fehler der Winkelmessung und nur der sorgfältigen Einhaltung gleichen Messungsvorganges bei den Juli- und Septemberbestimmungen ist es zuzuschreiben, wenn die Werte für die Sommerbewegung genauer sind, als es nach den mittleren Fehlern der Koordinaten scheinen könnte.

Der Hintereisferner im Masstab 1:50000

Abstand der Höhenlinien = 100 m

• Bohrloch

--- Heutige Gletschergrenze

-·-·- Gletschergrenze zur Zeit des letzten Hochstandes

Die vorstehende Figur gibt im Maßstab 1 : 50000 einen Überblick über die Lage der Beobachtungsstellen. Eine Gruppe von neun Bohrlöchern, darunter drei tiefe, liegt im untern Teil der Zunge. Vier davon I 2, I 4, I 7 und I 10 sind neben den ziegelrotgestrichenen Steinen der mit I bezeichneten Markenlinie früherer Bewegungsmessungen angelegt. Die tiefer gelegenen Löcher I^a 2 und I^a 6 bei blauen Steinmarken kamen später hinzu. Die zweite in einer Querlinie angeordnete Gruppe V 2 V 4 V 14 V 17 von vier Bohrlöchern befindet sich etwas unterhalb der Längsmitte der Gletscherzunge an Stelle der ziegelroten Marken der Steinlinie V früherer Bewegungsmessungen. Etwas unterhalb des oberen Drittels der Zungenlänge an Stelle der älteren blauen Steinlinie VIII liegen die drei nächsten Bohrlöcher VIII 4 VIII 14 VIII 17. Den Mittelpunkt des Sammelbeckens nimmt das mit Dreikant II bezeichnete frühere Firnsignal ein. Die Bohrlöcher I^a 6, I 10, V 14 und VIII 14 wurden auf der großen Mittelmoräne angelegt. Alle übrigen liegen auf blankem Eis. An allen Bohrlöchern wurde mehrmals des Jahres die Ablation gemessen. Über die Resultate dieser Messung soll an anderer Stelle berichtet werden. Zur Kennzeichnung des Einflusses der Ablation auf die Unsicherheit der Geschwindigkeitsmessungen, wenn dieselbe an Steinmarken erfolgt, sei erwähnt, daß auf der untersten blauen Linie I^a in 2400 m Seehöhe die mittlere jährliche Ablation 7,3 m ausmacht, während dort die jährliche Bewegung nicht einmal das Doppelte hiervon, nämlich nur 13,2 m beträgt.

Wir lassen nun die Ergebnisse der 180 Positionsbestimmungen an den 18 Bohrlöchern in Tabellenform folgen. Dort wo das Bohrloch als Nachfolger einer vorher regelmäßig beobachteten Steinmarke erscheint, sind auch die letzten Lagen der Steinmarke mit aufgenommen. In der fünften Spalte ist unter V (m) die Verschiebung in horizontaler Richtung zwischen zwei Messungen eingetragen. Die sechste Spalte enthält die daraus gerechnete mittlere tägliche Bewegung in cm. In der siebenten Spalte ist ein Vergleich zwischen der Sommer- und der vorhergehenden Winterbewegung gezogen ($S \lesseqgtr W$).

Punkt bei 2 Linie I^a^.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
1. Aug. 00	5455,73 ± 0,18	11664,36 ± 0,12	2412,5	3,16	6,73	
17. Sept. 00	5452,62 ± 0,18	11664,89 ± 0,12	—	13,05	4,20	
25. Juli 01	5439,60 ± 0,09	11666,11 ± 0,06	2406,1	12,24*	3,38	S) W
22. Juli 02	5427,30 ± 0,07	11666,00 ± 0,05	2400,2	2,11	3,77	
16. Sept. 02	5425,27 ± 0,43	11666,57 ± 0,27	—	8,25	2,70	S) W
18. Juli 03	5417,68 ± 0,31	11669,81 ± 0,29	2393,2	1,81	3,69	
5. Sept. 03	5415,96 ± 0,23	11670,37 ± 0,21	—	10,87	3,39	S) W
22. Juli 04	5405,32 ± 0,23	11672,67 ± 0,15	2385,7	1,91	4,25	
5. Sept. 04	5403,42 ± 0,28	11672,48 ± 0,19	—			

Punkt bei 6 Linie I^a^ Langtauferer Moräne.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
2. Aug. 00	5422,07 ± 0,17	11490,33 ± 0,11	2427,6	3,57	7,76	
17. Sept. 00	5418,55 ± 0,19	11490,95 ± 0,13	—	12,33	3,97	
25. Juli 01	5406,39 ± 0,13	11493,24 ± 0,08	2419,5	15,04	4,15	S) W
22. Juli 02	5391,73 ± 0,07	11496,59 ± 0,03	2412,5			
22. Juli 02[3]	5391,51	11497,77	—	2,42	4,32	
16. Sept. 02	5389,24 ± 0,43	11498,60 ± 0,27	—	10,33	3,39	S) W
18. Juli 03	5379,11 ± 0,23	11500,61 ± 0,13	2404,9	2,46	5,02	
5. Sept. 03	5376,79 ± 0,30	11501,42 ± 0,18	—	11,26	3,51	S) W
22. Juli 04	5365,90 ± 0,29	11503,85 ± 0,22	2395,8			
22. Juli 04[3]	5366,11	11502,67	—	1,88	4,18	
5. Sept. 04	5364,30 ± 0,31	11503,19 ± 0,25	—			

Punkt 2 Linie I.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
15. Aug. 99	5643,4	11702,6	2439,6	19,32	5,38	S) W
9. Aug. 00	5624,44 ± 0,14	11706,10 ± 0,14	2434,0	2,42	6,21	
17. Sept. 00	5622,05 ± 0,24	11706,50 ± 0,24	—	12,05	3,79	
1. Aug. 01	5610,00 ± 0,16	11706,63 ± 0,13	2432,2	10,70*	3,01	S) W
22. Juli 02	5599,39 ± 0,08	11707,76 ± 0,06	2427,8	2,59	4,63	
16. Sept. 02	5596,83 ± 0,17	11708,17 ± 0,14	—	8,31	2,70	S) W
22. Juli 03	5588,55 ± 0,37	11708,90 ± 0,29	2422,6	1,69	3,76	
5. Sept. 03	5586,87 ± 0,52	11709,11 ± 0,37	—	8,57	2,53	S) W
9. Aug. 04	5578,48 ± 0,13	11710,86 ± 0,13	2419,4	0,84	3,11	
5. Sept. 04	5577,84 ± 0,23	11710,31 ± 0,22	—			

Ein * bedeutet, daß bei Ermittlung von V eine unbedeutende, für das Gesamtresultat unerhebliche Verschiebung des nachgebohrten Bohrloches gegenüber dem ursprünglichen in Rücksicht gezogen wurde.

[1] Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.

[2] Tägliche Geschwindigkeit in cm. [3] Neugebohrtes Loch.

Punkt bei 4 Linie I.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
15. Aug. 99	5624,5	11617,7	2446,5	21,54*	6,24	S > W
26. Juli 00	5602,95 + 0,16	11618,50 + 0,14	2441,6	4,32	8,15	
17. Sept. 00	5598,70 ± 0,17	11619,26 ± 0,10	—	15,94	5,01	
1. Aug. 01	5582,97 + 0,16	11622,04 + 0,13	2434,9	15,10*	4,25	S > W
22. Juli 02	5568,29 + 0,08	11624,98 ± 0,06	2430,1	3,69	6,59	
16. Sept. 02	5564,67 + 0,17	11625,69 + 0,14	—	12,62	4,04	S > W
25. Juli 03	5552,28 ± 0,37	11628,11 + 0,29	2423,5	2,46	5,86	
5. Sept. 03	5549,90 + 0,52	11628,74 + 0,37	—	13,51	4,21	S > W
22. Juli 04	5536,57 ± 0,16	11630,92 + 0,13	2416,1	2,06	4,58	
5. Sept. 04	5534,66 ± 0,23	11631,68 ± 0,19	—			

Punkt bei 7 Linie I.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
15. Aug. 99	5596,4	11498,0	2443,3	20,77	6,00	S > W
25. Juli 00	5576,14 + 0,25	11502,38 ± 0,26	2441,5	4,43	8,20	
17. Sept. 00	5571,80 + 0,17	11503,38 ± 0,10	—	15,38	4,91	
27. Juli 01	5556,74 + 0,11	11506,34 ± 0,09	2435,6	16,39	4,56	S > W
22. Juli 02	5541,32 + 0,08	11511,86 ± 0,06	2430,7	3,06	5,46	
16. Sept. 02	5538,27 + 0,17	11512,12 + 0,14	—	12,90	4,18	S > W
22. Juli 03	5525,62 + 0,37	11514,65 + 0,29	2426,1	2,92	6,50	
5. Sept. 03	5522,78 + 0,52	11515,32 ± 0,37	—	13,99	4,36	S > W
22. Juli 04	5509,07 ± 0,18	11518,10 ± 0,13	2419,6	2,34	5,20	
5. Sept. 04	5506,93 ± 0,33	11519,01 ± 0,19	—			

Punkt bei 10 Linie I.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
St.[3]) 15. Aug. 99	5606,3	11381,7	2450,3	38,29	10,97	S < W!
St. 30. Juli 00	5590,96	11416,78	2446,0			
B.[4]) 30. Juli 00	5591,82 ± 0,44	11412,34 + 0,18	2446,6	3,48	7,10	
17. Sept. 00	5588,36 + 0,17	11412,71 ± 0,10	—	14,96	4,72	
31. Juli 01	5573,61 ± 0,14	11415,23 ± 0,09	2443,0	14,05*	3,98	S > W
19. Juli 02	5560,22 ± 0,21	11419,01 ± 0,35	2439,6	3,93	6,66	
16. Sept. 02	5556,40 ± 0,15	11419,94 ± 0,24	—	10,87	3,49	S > W
25. Juli 03	5545,74 + 0,37	11422,09 ± 0,29	2436,9	2,73	6,50	
5. Sept. 03	5543,08 ± 0,52	11422,70 + 0,37	—	13,07	4,07	S > W
22. Juli 04	5530,46 ± 0,36	11426,09 + 0,55	2432,5	2,08	4,62	
5. Sept. 04	5528,42 + 0,34	11426,51 ± 0,50	—			

[1]) Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.
[2]) Tägliche Geschwindigkeit in cm. [3]) Stein. [4]) Bohrloch.

Bohrloch I (60 m tief).

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
18. Aug. 99	5777,20 ± 0,20	11622,66 ± 0,17	2469,7	23,04	6,60	S > W
2. Aug. 00	5754,24 ± 0,11	11624,55 ± 0,06	2465,0	3,15	6,85	
17. Sept. 00	5751,09 ± 0,04	11624,75 ± 0,09	—	16,38	5,32	
22. Juli 01	5734,76 ± 0,06	11626,05 ± 0,07	2460,0	17,13	4,70	S > W
22. Juli 02	5717,81 ± 0,13	11628,61 ± 0,20	2456,3	3,11	5,54	
16. Sept. 02	5714,73 ± 0,24	11629,01 ± 0,35	—	14,07	4,51	S > W
23. Juli 03	5700,72 ± 0,49	11630,28 ± 0,47	2451,0	2,91	6,93	
5. Sept. 03	5697,83 ± 0,36	11630,58 ± 0,34	—	16,21	5,03	S > W
23. Juli 04	5681,72 ± 0,23	11632,40 ± 0,24	2445,1	2,37	5,39	
5. Sept. 04	5679,38 ± 0,12	11632,79 ± 0,29	—			

Bohrloch II (86 m tief).

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
16. Aug. 99	5758,43 ± 0,26	11423,29 ± 0,30	2469,0	23,11	6,62	S > W
2. Aug. 00	5735,34 ± 0,06	11424,24 ± 0,11	2468,2	3,11	6,76	
17. Sept. 00	5732,23 ± 0,10	11424,31 ± 0,15	—	17,21	5,50	
27. Juli 01	5715,04 ± 0,06	11425,02 ± 0,09	2456,9	18,08	5,02	S > W
22. Juli 02	5697,16 ± 0,20	11427,70 ± 0,15	2452,9	3,22	5,75	
16. Sept. 02	5693,96 ± 0,13	11428,08 ± 0,09	—	14,12	4,56	S > W
23. Juli 03	5679,88 ± 0,22	11429,16 ± 0,41	2447,9	2,88	6,55	
5. Sept. 03	5677,01 ± 0,24	11429,42 ± 0,48	—	15,80	4,89	S > W
23. Juli 04	5661,30 ± 0,26	11431,06 ± 0,52	2441,6	2,55	5,80	
5. Sept. 04	5658,78 ± 0,23	11431,44 ± 0,46	—			

Bohrloch B 40 (40 m tief).

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
28. Aug. 95	5991,05 ± 0,08	11552,97 ± 0,09	2505,8	27,67	8,41	
23. Juli 96	5963,39 ± 0,33	11553,69 ± 0,33	2501,7	32,44	8,87	
24. Juli 97	5930,95 ± 0,15	11554,00 ± 0,45	2496,6	30,97	8,28	
2. Aug. 98	5900,00 ± 0,05	11556,16 ± 0,16	2489,8	56,80	7,78	S > W
2. Aug. 00	5843,26 ± 0,09	11557,71 ± 0,40	2476,0	3,76	8,17	
17. Sept. 00	5839,55 ± 0,20	11558,32 ± 0,29	—	18,93	6,05	
27. Juli 01	5820,64 ± 0,06	11559,28 ± 0,02	2470,2	19,75	5,49	S > W
22. Juli 02	5800,97 ± 0,25	11561,06 ± 0,25	2465,8	3,49	6,23	
16. Sept. 02	5797,49 ± 0,25	11561,35 ± 0,25	—	17,04	5,50	S > W
23. Juli 03	5780,46 ± 0,35	11561,90 ± 0,47	2460,2	3,08	7,00	
5. Sept. 03	5777,39 ± 0,37	11562,10 ± 0,34	—	19,40	6,03	S > W
28. Juli 04	5758,07 ± 0,25	11563,81 ± 0,38	2454,5	2,89	6,57	
5. Sept. 04	5755,20 ± 0,20	11564,18 ± 0,37	—			

[1] Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.

[2] Tägliche Geschwindigkeit in cm.

Punkt 2 Linie V.

	x	y	z	V m [1]	v cm [2]	
26. Aug. 99	6866,0	12030,1	2608,6	33,07	9,73	S(W
1. Aug. 00	6836,03 ± 0,21	12016,16 ± 0,30	2604,5	4,45	9,47	
17. Sept. 00	6832,14 ± 0,21	12014,00 ± 0,30	—	21,62*	6,86	
29. Juli 01	6512,33 ± 0,26	12005,15 ± 0,34	2599,3	26,05	7,24	S(W
24. Juli 02	6790,76 ± 0,24	11990,54 ± 0,23	2595,1	3,41	6,43	
15. Sept. 02	6787,65 ± 0,16	11989,15 ± 0,15	—	24,99	8,06	S(W
22. Juli 03	6764,94 ± 0,31	11978,78 ± 0,37	2591,3	3,05	6,93	
4. Sept. 03	6762,04 ± 0,27	11977,78 ± 0,30	—	29,57	9,09	S(W
25. Juli 04	6735,65 ± 0,32	11964,45 ± 0,41	2585,9	2,58	6,27	
4. Sept. 04	6733,39 ± 0,39	11963,21 ± 0,45	—			

Punkt 4 Linie V.

	x	y	z	V	v	
26. Aug. 99	6888,7	11950,5	2617,2	30,58	11,85	S(W
26. Juli 00	6853,49 ± 0,26	11932,39 ± 0,24	2613,0	5,51	10,40	
17. Sept. 00	6848,53 ± 0,21	11930,01 ± 0,10	—	23,44*	7,44	
29. Juli 01	6827,40 ± 0,28	11919,67 ± 0,24	2608,1	26,55	7,36	S(W
24. Juli 02	6803,50 ± 0,24	11908,12 ± 0,23	2605,0	3,42	6,45	
15. Sept. 02	6800,34 ± 0,16	11906,80 ± 0,15	—	27,19	8,77	S(W
22. Juli 03	6775,90 ± 0,31	11894,89 ± 0,37	2601,9	3,28	7,45	
4. Sept. 03	6772,77 ± 0,27	11893,91 ± 0,30	—	32,41	9,97	S(W
25. Juli 04	6743,79 ± 0,32	11879,40 ± 0,41	2596,8	2,79	6,80	
4. Sept. 04	6741,25 ± 0,39	11878,24 ± 0,45	—			

Punkt bei 15 auf der Moräne Linie V.

	x	y	z	V	v	
St.[3] 26. Aug. 99	7087,2	11608,5	2618,5	35,94	10,79	S(W
St. 25. Juli 00	7058,7	11586,6	2615,7			
B.[4] 25. Juli 00	7064,72 ± 0,14	11577,83 ± 0,12	2615,6	4,56	8,94	
14. Sept. 00	7060,84 ± 0,14	11575,44 ± 0,14	—	22,54	7,07	
30. Juli 01	7041,41 ± 0,17	11564,00 ± 0,14	2610,5	25,45	7,09	S(W
24. Juli 02	7019,42 ± 0,26	11551,18 ± 0,35	2608,6	3,48	6,57	
15. Sept. 02	7016,59 ± 0,20	11549,16 ± 0,28	—	24,95	8,05	S(W
22. Juli 03	6995,24 ± 0,20	11536,25 ± 0,33	2605,6	33,29	7,49	
4. Sept. 03	6992,23 ± 0,34	11534,92 ± 0,40	—	30,25	9,37	S(W
23. Juli 04	6964,86 ± 0,77	11522,04 ± 0,56	2602,3	3,48	5,10	
4. Sept. 04	6961,71 ± 0,75	11520,57 ± 0,55	—			

[1]) Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.
[2]) Tägliche Geschwindigkeit in cm. [3]) Stein. [4]) Bohrloch.

Punkt bei 17 (Langtauferer Zufluss) Linie V.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
25. Juli 00	7099,32 ± 0,14	11500,27 ± 0,12	2605,5			
30. Juli 01	7086,89 ± 0,17	11492,24 ± 0,24	2599,8	14,83	4,01	
24. Juli 02	7073,08 ± 0,26	11482,02 ± 0,35	2598,7	17,18	4,78	S<W
15. Sept. 02	7071,48 ± 0,20	11480,38 ± 0,28	—	2,29	4,32	
22. Juli 03	7057,60 ± 0,20	11470,11 ± 0,33	2597,1	17,27	5,57	S>W!
4. Sept. 03	7055,20 ± 0,34	11469,49 ± 0,40	—	2,48	5,64	
23. Juli 04	7036,79 ± 0,77	11459,19 ± 0,56	2593,7	21,10	6,53	S<W
4. Sept. 04	7034,39 ± 0,75	11458,59 ± 0,55	—	2,47	5,75	

Punkt bei 4 Linie VIII.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
[3] 25. Aug. 99	7724,5	12464,1	2707,0			
9. Aug. 00	7688,1	12437,8	2702,4	44,9	12,86	S<W
[4] 9. Aug. 00	7696,25 ± 0,30	12441,03 ± 0,40	2702,4			
14. Sept. 00	7692,26 ± 0,21	12439,16 ± 0,29	—	4,41	12,25	
19. Aug. 01	7666,98 ± 0,34	12422,48 ± 0,41	2697,1	30,18*	8,90	
23. Juli 02	7638,55 ± 0,13	12404,71 ± 0,19	2695,4	33,53	9,92	S<W
15. Sept. 02	7634,80 ± 0,14	12402,73 ± 0,20	—	4,24	7,85	
23. Juli 03	7604,87 ± 0,09	12383,80 ± 0,11	2690,6	35,41	11,39	S<W
23. Juli 03[5]	7605,01	12383,72	—			
3. Sept. 03	7601,93 ± 0,09	12381,40 ± 0,38	—	3,86	9,20	
25. Juli 04	7566,82 ± 0,62	12361,50 ± 0,17	2683,4	40,35	12,38	S<W
4. Sept. 04	7563,81 ± 0,19	12359,81 ± 0,05	—	3,46	8,44	

Punkt bei 14 auf der Moräne Linie VIII.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
[3] 25. Aug. 99	7928,5	12170,0	2708,4			
9. Aug. 00	7889,67	12152,62	—	42,52	12,19	S>W!
[4] 9. Aug. 00	7885,66 ± 0,25	12155,80 ± 0,25	2705,4			
14. Sept. 00	7881,50 ± 0,47	12154,07 ± 0,46	—	4,51	12,53	
29. Juli 01	7858,08 ± 0,13	12138,04 ± 0,13	2701,1	28,44*	8,94	
23. Juli 02	7826,66 ± 0,08	12119,16 ± 0,13	2698,1	36,66	10,21	S<W
4. Aug. 02	7826,24 ± 0,13	12118,66 ± 0,20	2697,2	0,65	5,42	
14. Sept. 02	7822,71 ± 0,48	12117,44 ± 0,41	—	3,74 (0,65 + 3,74 = 4,39)	9,12 (5,42 + 9,12 = 8,30)	
23. Juli 03	7793,19 ± 0,13	12095,05 ± 0,23	2693,0	37,05	11,88	S<W
3. Sept. 03	7791,24 ± 0,12	12094,74 ± 0,16	—	1,98	4,70	
25. Juli 04	7755,59 ± 0,33	12074,33 ± 0,14	2686,2	41,08	12,60	S<W
4. Sept. 04	7752,26 ± 0,47	12072,25 ± 0,20	—	3,93	9,60	

[1] Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.
[2] Tägliche Geschwindigkeit in cm.
[3] Stein. [4] Bohrloch. [5] Neues Bohrloch.

Punkt 17 Langtauferer Zufluss Linie VIII.

	x	y	z	V m[1]	v cm[2]	
9. Aug. 00	7911,63 ± 0,25	11982.80 ± 0.25	2793,9	3,78	10,50	
14. Sept. 00	7908,21 ± 0,47	11981,19 ± 0,46	—	18,59*	5,85	
29. Juli 01	7892,50 ± 0,13	11971,43 ± 0,13	2689,9	19,48	5,43	
23. Juli 02	7875,75 ± 0,08	11961,48 ± 0,13	2689,1	0,45 } 2,80	3,75 } 5,30	S < W[3]
4. Aug. 02	7875,72 ± 0,13	11961,03 ± 0.20	2688,0	2,35	5,73	
14. Sept. 02	7873,42 ± 0,48	11960.56 ± 0,41	—	22,20	7,11 }	S < W
23. Juli 03	7857,15 ± 0,13	11945,46 ± 0.23	2685,5	1,69	4,02	
3. Sept. 03	7855,49 ± 0,12	11945.28 ± 0,13	—	21,59	6,62 }	S < W
24. Juli 04	7836,56 ± 0,33	11934,90 ± 0,14	2681,4	2,34	5,58	
4. Sept. 04	7834,64 ± 0,47	11933,57 ± 0,20	—			

Punkt a am Beginne der Gletscherzunge.

	x	y	z	V	v	
15. Sept. 02	8815,75 ± 2,56	12983,05 ± 2,55	2782,7	45,65	12,93	
3. Sept. 03	8778,24 ± 2,25	12957.03 ± 2,30	2781,1	42,00	12,68 }	S < W
30. Juli 04	8741,29 ± 0,28	12937.10 ± 0,23	—	3,15	8,08	
7. Sept. 04	8738,85 ± 0.32	12935,11 ± 0,28	—			

Dreikant II.

	x	y	z	V	v	
1. Aug. 91	9475,5	13839,2	2855,2	13.4	11,63	
9. Aug. 95	9454,8	13801,0	2850,7	36,8	10,55	
23. Juli 96	9438,9	13767,9	2847,5	91,7	12,23	
10. Aug. 98	9404.3	13683,0	2843.6	52,3	13,73	
26. Aug. 99	9390,3	13632.6	2841.3	32,52	9,35 }	S < W
9. Aug. 00	9362.44 ± 0,09	13615.94 ± 0.33	2835.2	2,56	7,10	
14. Sept. 00	9362,08 ± 0,20	13613.41 ± 0,71	—	29,55	8,64	
22. Aug. 01	9346,06 ± 0.20	13588.58 ± 0,84	2834,4	38,54	9,94	
15. Sept. 02	9325,72 ± 0,18	13555,75 ± 0,81	2833,6	38,96	11,03	
3. Sept. 03	9305.08 ± 0.37	13522,71 ± 1,54	2834,7	36.70	11,07 }	S < W
30. Juli 04	9284,78 ± 0.28	13492.15 ± 1,35	2829.4	2.48	6,56	
6. Sept. 04	9283,91 ± 0,21	13489,80 ± 1,13	—			

[1] Verschiebung zwischen zwei Zeitpunkten in m.

[2] Tägliche Geschwindigkeit in cm.

[3] Die durchschnittliche Sommergeschwindigkeit ist **kleiner als die vorausgehende** Wintergeschwindigkeit.

Überblicken wird das Ergebnis vorliegender Zusammenstellung, so ergiebt sich zunächst ein unerwartet starker Wechsel der Geschwindigkeit der Gletscherbewegung in längeren wie in kürzeren Zeiträumen. Es hat also die Verschärfung der Beobachtungsmittel nicht, wie erwartet werden konnte, einen stetigeren Verlauf der Gletscherbewegung erkennen lassen. Man wird daraus sicher die Warnung entnehmen, aus kurzen, wenige Tage umfassenden Beobachtungen der Gletscherbewegung bündige Schlüsse zu ziehen. Wir machen hier insbesondere auf die Positionsbestimmungen bei Punkt 14 Linie VIII aufmerksam, wo die tägliche Gletscherbewegung vom 23. Juli 1902 bis 4. August 1902 5,4 cm, vom 4. August bis 14. September 1902 aber 9,1 cm betrug. Man muß sich stets vor Augen halten, daß die Gletscherbewegung tatsächlich in einzelnen Rucken mit vermehrter Geschwindigkeit erfolgt, zwischen welchen Pausen von geringerer Geschwindigkeit liegen.

Untersuchen wir alsdann die Geschwindigkeitsschwankungen längerer Dauer, so ist von vornherein zu bemerken, daß solche, welche eine Unterbrechung des Rückzuges am Gletscherende im Gefolge gehabt hätten, nicht vorgekommen sind. Wohl aber sind Schwankungen aufgetreten, welche sich in Oberflächenschwankungen schwach widerspiegeln. Die Fortpflanzung dieser Geschwindigkeitsschwankungen über die Länge der Gletscherzunge hinweg ist ungemein rasch. Herr Professor H. Heß[1]) hat sogar auf Grund früherer, an den acht Steinlinien des Hintereisferners gemachten Beobachtungen geschlossen, daß ein Minimum der Geschwindigkeit im Jahre 1895—96 gleichzeitig eingetreten ist. Auch für das darauffolgende Maximum deuten die seitherigen Messungen ein kaum erkennbares Fortschreiten von oben nach unten an. Am Dreikant II, welches am Ausgang der Firnmulde gelegen ist, trat dieses Maximum 1898—99 auf, während es beim Bohrloch B_{40} ziemlich nahe am Gletscherende, wenn überhaupt, erst 1899—1900 ankam. Das zufällige Fehlen der Position dieses

[1]) H. Heß. Die Gletscher. Braunschweig 1901, S. 295, Fig. 54.

Bohrloches im Jahre 1899 läßt keinen sicheren Schluß zu. Dagegen ist am darauffolgenden Minimum ein deutliches Herabwandern über die Zunge zu erkennen, wie folgende Zusammenstellung ausweist:

Bezeichnung	Dreikant II	Linie VIII	Linie V	Tiefe Bohrlöcher	Linie I u. I*
Entf. v. Ende	4800 m	2700 m	1750 m	600 m	350 m
Eintritt d. Min.	1900–01	1900–01	1900–02	1901–1903	1902–1904

Nach unten nimmt die Geschwindigkeit des Herabwanderns ersichtlich stark ab. Im Durchschnitt ist hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle 20–150 mal größer als die Bewegung des Eises. Diese Wellen sind somit von ganz anderem Charakter als jene, welche der eine[1]) von uns zur mathematischen Darstellung des Verlaufes der Gletscherschwankungen einführte und die man vielleicht als Schwellungswellen bezeichnen könnte. Während jene durch die Geschwindigkeitsänderungen, die die Massenverschiebungen im Gefolge haben, erzeugt und unterhalten werden, sind diese von den Massenverschiebungen unabhängig und gleichen mehr Druckwellen. Beide Arten von Wellen eilen der Eisbewegung voraus, die Schwellungswellen dagegen in viel geringerem Maße als die Druckwellen. Herr J. Vallot[2]) hat am Eismeer von Chamounix Schwellungswellen gefunden, die etwa vier- bis fünfmal rascher abwärts gehen als das Eis.

Wir wenden uns nun zu den jahreszeitlichen Schwankungen der Gletschergeschwindigkeit. Schon ein flüchtiger Blick auf die sechste Spalte der vorliegenden Tabellen belehrt uns, daß die bisher festgehaltene Ansicht von dem Vorherrschen der Sommerbewegung der Gletscher nicht zutrifft. In der Tat finden wir sie nur für das untere Drittel der Zunge bestätigt. Von der ziegelroten Linie V angefangen bis hinauf zum Dreikant II nahe an der Firnlinie überwiegt die Winterbewegung. Wenn wir insbesondere, so wie es in der letzten Spalte der

[1]) S. Finsterwalder, Bericht der internationalen Gletscherkommission. Comptes rendus Congrès géologique international de Vienne 1903, S. 161.

[2]) Annales de l'observatoire du Mont Blanc. Tome IV, S. 141 und Tome V, Pl. 36 u. f.

Tabelle ($S \gtrless W$) geschehen ist, die Sommerbewegung mit der vorausgegangenen Winterbewegung vergleichen, trifft unter 63 Fällen 60 mal die Regel zu, daß an und oberhalb der Linie V die Sommerbewegung kleiner als die Winterbewegung ($S < W$) unterhalb dagegen größer ($S > W$) ist. Dabei verändert sich das Verhältnis der jahreszeitlichen Geschwindigkeiten durchaus gesetzmäßig. Um das Verhältnis möglichst unabhängig von einer vorgefaßten Meinung zum Ausdruck zu bringen, soll die Sommergeschwindigkeit mit der durchschnittlichen Jahresgeschwindigkeit M verglichen werden und um den Wechsel der Jahresgeschwindigkeit von einem Jahr zum andern auszuschalten, wollen wir die mittlere Jahresgeschwindigkeit, soweit es die Beobachtungen erlauben, aus einem annähernd zweijährigen Zeitraum, welcher die zu vergleichende Sommergeschwindigkeit nach beiden Seiten umfaßt, bilden. Für einige Sommergeschwindigkeiten zu Beginn und sämtliche am Schlusse der Beobachtungsreihe, die mit Herbst 1904 abbricht, ist diese Art der Berechnung allerdings nicht mehr durchführbar. Wir erhalten dann nachstehende Vergleichswerte für die Geschwindigkeiten und darausfolgend die Verhältnisse von Sommergeschwindigkeit zu Jahresgeschwindigkeit (S : M).

Mittlere Geschwindigkeiten in cm:

Linie I^a Entfernung vom Gletscherende 300 m.

Punkt bei 2:

1. Aug. 00 – 25. Juli 01	4,53	1. Aug. 00 – 17. Sept. 01	6,73	$S > M$
25. Juli 01 – 18. Juli 03	3,12	22. Juli 02 – 16. Sept. 02	3,76	$S > M$
16. Sept. 02 – 22. Juli 04	3,10	18. Juli 03 – 5. Sept. 03	3,69	$S > M$
5. Sept. 03 – 5. Sept. 04	3,50	22. Juli 04 – 5. Sept. 04	4,25	$S > M$
	14,25		18,44	$S : M = 1{,}295$

Punkt bei 6:

2. Aug. 00 – 25. Juli 01	4,43	2. Aug. 00 – 17. Sept. 00	7,76	$S > M$
25. Juli 01 – 18. Juli 03	3,84	22. Juli 02 – 16. Sept. 02	4,32	$S > M$
16. Sept. 02 – 22. Juli 04	3,56	18. Juli 03 – 5. Sept. 03	5,02	$S > M$
6. Sept. 03 – 5. Sept. 04	3,59	22. Juli 04 – 5. Sept. 04	4,18	$S > M$
	15,42		21,28	$S : M = 1{,}380$

Mittel für die Linie I^a $S : M = 1{,}337$.

Linie I. Entfernung von Gletscherende 400 m.

Punkt bei 2:

15. Aug. 99—1. Aug. 01	4,59	9. Aug. 00—17. Sept. 00	6,21	$S > M$
1. Aug. 01—22. Juli 03	3,00	22. Juli 02—16. Sept. 02	4,63	$S > M$
16. Sept. 02—9. Aug. 04	2,68	22. Juli 03—5. Sept. 03	3,76	$S > M$
5. Sept. 03—4. Sept. 04	2,58	9. Aug. 04—4. Sept. 04	3,11	$S > M$
	12,85		17,71	$S:M = 1,378$

Punkt bei 4:

15. Aug. 99—1. Aug. 01	5,56	26. Juli 00—17. Sept. 00	8,15	$S > M$
1. Aug. 01—25. Juli 03	4,34	22. Juli 02—16. Sept. 02	6,59	$S > M$
16. Sept. 02—22. Juli 04	4,28	25. Juli 03—5. Sept. 03	5,86	$S > M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	4,25	22. Juli 04—5. Sept. 04	4,58	$S > M$
	18,43		25,18	$S:M = 1,366$

Punkt bei 7:

15. Aug. 99—27. Juli 01	5,70	25. Juli 00—17. Sept. 00	8,20	$S > M$
27. Juli 01—22. Juli 03	4,46	22. Juli 02—16. Sept. 02	5,46	$S > M$
16. Sept. 02—22. Juli 04	4,42	22. Juli 03—5. Sept. 03	6,50	$S > M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	4.46	22. Juli 04—5. Sept. 04	5,20	$S > M$
	19,04		25,36	$S:M = 1,332$

Punkt 10 auf der Langtauferer Moräne:

15. Aug. 99—31. Juli 01	7,96	30. Juli 00—17. Sept. 00	7,10	$S < M$!
27. Juli 01—25. Juli 03	3,99	19. Juli 02—16. Sept. 02	6,66	$S > M$
16. Sept. 02—22. Juli 04	3,95	25. Juli 03—5. Sept 03	6,50	$S > M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	4,15	22. Juli 04—5. Sept. 04	4,62	$S > M$
	20,05		24,88	$S:M = 1,241$

Mittel für die Linie I $S:M = 1,329$.

Tiefe Bohrlöcher. Mittlere Entfernung vom Gletscherende 700 m.

Bohrloch I (66 m tief):

18. Aug. 99—22. Juli 01	6,01	2. Aug. 00—17. Sept. 00	6,85	$S > M$
22. Juli 01—25. Juli 03	4,68	22. Juli 02—16. Sept. 02	5,54	$S > M$
16. Sept. 02—23. Juli 04	4,91	25. Juli 03—5. Sept. 03	6,93	$S > M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	5,08	23. Juli 04—5. Sept. 04	5,39	$S > M$
	20,68		24,71	$S:M = 1,196$

Bohrloch II (86 m tief):

16. Aug. 99—27. Juli 01	6,13	2. Aug. 00—17. Sept. 00	6,76	$S>M$
27. Juli 01—23. Juli 03	4,88	22. Juli 02—16. Sept. 02	5,75	$S>M$
16. Sept. 02—23. Juli 04	4,84	23. Juli 03—5. Sept. 03	6,55	$S>M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	5,00	23. Juli 04—5. Sept. 04	5,80	$S>M$
	20,85		24,86	$S:M=1,193$

Bohrloch B_{40} (40 m tief):

2. Aug. 98—27. Juli 01	7,30	2. Aug. 00—17. Sept. 00	8,17	$S>M$
27. Juli 01—23. Juli 03	5,55	22. Juli 02—16. Sept. 02	6,23	$S>M$
16. Sept. 02—23. Juli 04	5,85	22. Juli 03—5. Sept. 03	7,00	$S>M$
5. Sept. 03—5. Sept. 04	6,09	23. Juli 04—5. Sept. 04	6,57	$S>M$
	24,79		27,97	$S:M=1,129$

Mittel für die drei tiefen Bohrlöcher $S:M=1,173$.

Linie V. Entfernung vom Gletscherende 1750 m.

Punkt bei 2:

26. Aug. 99—29. Juli 01	8,42	1. Aug. 00—17. Sept. 00	9,47	$S>M$!
29. Juli 01—22. Juli 03	7,53	24. Juli 02—15. Sept. 02	6,43	$S<M$
15. Sept. 02—25. Juli 04	8,48	22. Juli 03—4. Sept. 03	6,93	$S<M$
4. Sept. 03—4. Sept. 04	8,78	25. Juli 04—4. Sept. 04	6,27	$S<M$
	33,21		29,10	$S:M=0,877$

Punkt bei 4:

26. Aug. 99—29. Juli 01	9,76	26. Juli 00—17. Sept. 00	10,40	$S>M$!
29. Juli 01—22. Juli 03	7,90	24. Juli 02—15. Sept. 02	6,45	$S<M$
15. Sept. 02—25. Juli 04	9,41	22. Juli 03—4. Sept. 03	7,45	$S<M$
4. Sept. 03—4. Sept. 04	9,61	25. Juli 04—4. Sept. 04	6,80	$S<M$
	36,68		31,10	$S:M=0,849$

Punkt bei 15 auf der Langtauferer Moräne:

26. Aug. 99—30. Juli 01	8,64	25. Juli 00—14. Sept. 00	8,94	$S>M$!
30. Juli 01—23. Juli 03	7,44	24. Juli 02—15. Sept. 02	6,57	$S<M$
15. Sept. 02—23. Juli 04	8,64	23. Juli 03—4. Sept. 03	7,49	$S<M$
4. Sept. 03—4. Sept. 04	9,21	23. Juli 04—4. Sept. 04	8,10	$S<M$
	33,93		31,10	$S:M=0,917$

Punkt 17 auf dem Langtauferer Zufluß:

30. Juli 01—22. Juli 03	4,45	24. Juli 02—15. Sept. 02	4,32	S<M
15. Sept. 02—23. Juli 04	6,03	22. Juli 03— 4. Sept. 03	5,64	S<M
4. Sept. 03—4. Sept. 04	6,67	23. Juli 04— 4. Sept. 04	5,75	S<M
	17,15		15,71	S:M = 0,917

Mittel für Linie V S:M = 0,890.

Linie VIII. Entfernung vom Gletscherende 2700 m.

Punkt bei 4:

25. Aug. 99—19. Aug. 01	10,96	9. Aug. 00—14. Sept. 00	12,25	S>M!
19. Aug. 01—23. Juli 03	14,09	23. Juli 02—15. Sept. 02	7,85	S<M
15. Sept. 02—25. Juli 04	11,73	23. Juli 03— 3. Sept. 03	9,20	S<M
3. Sept. 03—4. Sept. 04	11,94	25. Juli 04— 4. Sept. 04	8,44	S<M
	48,73		37,74	S:M = 0,775

Punkt auf der Langtauferer Moräne:

25. Aug. 99—29. Juli 01	10,73	9. Aug. 00—14. Sept. 00	12,53	S>M!
29. Juli 01—23. Juli 03	10,79	23. Juli 02—14. Sept. 02	8,30	S<M
14. Sept. 02—25. Juli 04	11,78	23. Juli 03— 3. Sept. 03	4,70	S<M
3. Sept. 03—4. Sept. 04	12,24	25. Juli 04— 4. Sept. 04	9,60	S<M
	45,53		35,13	S:M = 0,771

Punkt auf dem Langtauferer Zufluß:

29. Juli 01—23. Juli 03	6,13	23. Juli 02—14. Sept. 02	5,30	S<M
14. Sept. 02—25. Juli 04	6,69	23. Juli 03— 3. Sept. 03	4,02	S<M
3. Sept. 03—4. Sept. 04	6,52	25. Juli 04— 4. Sept. 04	5,58	S<M
	19,34		14,90	S:M = 0,772

Mittel für Linie VIII S:M = 0,773.

Punkt *α* am Beginn der Gletscherzunge. Entfernung vom Gletscherende 4000 m.

3. Sept. 03—7. Sept. 04	12,68	30. Juli 04—7. Sept. 04	8,08	S<M

S:M = 0,637.

Dreikant II. Entfernung vom Gletscherende 4800 m.

26. Aug. 99—22. Aug. 01	8,89	9. Aug. 00—14. Sept. 00	7,1	S<M
3. Sept. 03—6. Sept. 04	10,78	30. Juli 04—6. Sept. 04	6,6	S<M
	19,67		13,7	

Mittel für Dreikant II S:M = 0,693.

Wie man sieht, ordnen sich die Mittelwerte für S : M je nach der Entfernung vom Gletscherende in eine abnehmende Reihe:

Entf. v. Gletscherende	300 m	400 m	700 m	1750 m	2700 m	4000 m	4800 m
S : M	1,337	1,329	1,173	0,890	0,773	0,637 ?	0,693

Der Wert 0,637 für die Entfernung 4000 m, welcher aus der Reihe herausfällt, ist im Gegensatz zu den anderen nur aus einer einzigen Sommergeschwindigkeit erhalten, die noch dazu nur mit der vorausgehenden Jahresgeschwindigkeit verglichen werden konnte.

Es gilt somit (wenigstens für den Hintereisferner) das Gesetz, daß im unteren Drittel der Gletscherzunge die Sommerbewegung überwiegt, weiter hinauf aber bis in die Nähe der Firnlinie die Winterbewegung; sowie, daß das Verhältnis beider Bewegungen vom Zungenende gegen das Firnfeld zu regelmäßig abnimmt.

Den Grund für diese überraschende Erscheinung finden wir in folgender Überlegung. Die treibende Kraft der Gletscherbewegung ist offenbar die Schwere und der durch sie erzeugte Druck der Firnlager. Der Widerstand gegen die Gletscherbewegung geht von der inneren Reibung der Eismassen und von der Reibung am Gletschergrunde aus. Der Geschwindigkeitszustand des Gletschers entsteht aus dem Zusammenwirken von treibender Kraft und Widerstand. Die winterliche Beschleunigung der Gletscherbewegung in den oberen Teilen ist in erster Linie dem im Winter gesteigerten Firndruck zu verdanken, während die sommerliche Beschleunigung der Bewegung in den unteren Teilen auf verminderten Reibungswiderstand infolge von Durchtränkung des Eises und Gletschergrundes mit Schmelzwasser zurückgeführt werden muß.

Man darf nicht erwarten, das hier ausgesprochene Gesetz bei jeder Einzelbeobachtung bestätigt zu finden, dazu geht die Gletscherbewegung viel zu unregelmäßig vor sich. Wie schon hervorgehoben, setzt sich dieselbe aus vielen einzelnen unregelmäßigen Rucken zusammen, die nur im Durchschnitt eine leidlich regel-

mäßige Bewegung ergeben. Im Winter scheinen die Rucke in den oberen Teilen des Gletschers ergiebiger zu sein, im Sommer in den unteren. Das schließt aber nicht aus, daß für einzelne Rucke das Gegenteil gilt. Das geht insbesondere auch aus den Jahresreihen über die Veränderung der Gletschergeschwindigkeit am Unteraargletscher von Agassiz und am Eismeer von Chamounix von Forbes hervor. Eine Andeutung unseres Gesetzes über die Veränderlichkeit des Verhältnisses von Sommer- zu Wintergeschwindigkeit findet sich übrigens bereits in den langjährigen Beobachtungen des Herrn J. Vallot[1]) am Eismeer von Chamounix.

Wir lassen seine Liste von Sommer- und Jahresgeschwindigkeiten folgen und ergänzen sie durch die Entfernung der betreffenden Stelle vom Gletscherende:

Station	Jahr	M (cm)	S (cm)	S : M		Entfernung (m)
Échelets neue Linie	1897	32,6	33,8	1,04	1,04	2800
„ „ „	1898	32,6	33,8	1,04		2650
„ alte Linie	1895	34,0	36,0	1,06	1,06	2200
„ „ „	1897	32,6	33,4	1,03		1950
„ „ „	1898	33,5	36,2	1,08		1850
Montanvert	1895	32,9	34,2	1,04	1,13	1200
„	1897	27,7	32,4	1,14		950
„	1898	32,6	33,5	1,21		840
Mauvais Pas	1897	32,6	33,8	1,04	?	400

Trotz mancher Unregelmäßigkeiten ist eine Abnahme des Verhältnisses S : M mit der Entfernung vom Gletscherende zu erkennen. Im ganzen sind hier die Geschwindigkeiten erheblich größer, der Einfluß der Jahreszeiten ist merklich kleiner als am Hintereisferner, was zu der in der Einleitung angeführten Meinung A. Heims stimmt.

Das oben ausgesprochene Gesetz ist uns erst nach Schluß der Beobachtungsreihe klar geworden. Einige in den Tabellen

[1]) J. Vallot, Annales de l'observatoire du Mont Blanc, Tome 4, S. 107 und Tome 5, Pl. 47 u. f. Vallot rechnet der bedeutend tieferen Lage seiner Stationen (1500–1900 m gegen jene am Hintereisferner 2400–2800 m) entsprechend den Sommer zu drei Monaten.

besonders hervorgehobene Unregelmäßigkeiten und Ausnahmen haben uns zu Beginn und im Verlaufe der Untersuchung andere Ansichten nahe gelegt, die zum Teil auch in der Literatur Eingang gefunden haben.[1]) Wir ziehen dieselben zu Gunsten der hier vorgetragenen auf dem Gesamtmaterial beruhenden ausdrücklich zurück.

Zum Schlusse sprechen wir noch dem Zentralausschusse des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, der unsere Untersuchungen jahrelang ausgiebig unterstützte, den wärmsten Dank aus.

[1]) H. Heß, Die Gletscher, S. 250 und Rapport de la Commission internationale des Glaciers Archives de Genève 1901, t. 12.

Berichtigung.

Auf S. 85, 92 u. 93 ist der Fundort der Korallen irrtümlich La Papa statt La Popa geschrieben.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 13. Mai 1905.

1. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Herrn Observators Dr. J. B. Messerschmitt: „Beeinflussung der Magnetographen-Aufzeichnungen durch Erdbeben und einige andere terrestrische Erscheinungen“ vor.

Der Verfasser untersucht die verschiedenen Störungen der magnetischen Aufzeichnungen des Erdmagnetischen Observatoriums in München. Zuerst wird die durch die elektrische Trambahn hervorgerufene Unruhe der Magnetnadeln erörtert, welche beispielsweise für die Mißweisung bereits mehrerer zehntel Minuten und für die Inklination noch mehr beträgt. Es wird also das seiner Zeit von der Trambahn-Gesellschaft garantierte Minimum schon jetzt beträchtlich überschritten und damit auch das Arbeitsfeld des Observatoriums in gewisser Weise beschränkt. Eine weitere Verlängerung der Trambahn in Bogenhausen um nur wenige Meter, geschweige denn eine Führung der Linie nach Ismaning oder durch den Englischen Garten nach Schwabing, hätte die sofortige Sistierung des Erdmagnetischen Dienstes an seiner jetzigen Stelle zur Folge. Die weiteren Untersuchungen betreffen die Erdbebenstörungen, die teils mechanischer, teils magnetischer Natur und überdies nicht so ganz selten sind, wie es nach den in München stärker fühlbaren Erdbeben angenommen werden könnte. Andere Störungen

erweisen sich von elektrischen Erscheinungen in der Atmosphäre, insbesondere von den Polarlichtern, abhängig.

2. Herr P. v. Groth übergibt eine Arbeit von Herrn Pfarrer Georg Glungler in München: „Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreuth und seine krystalline Umgebung, ein Beitrag zur Kenntnis der krystallinen Schiefer.“

Nach der Darstellung des Verfassers sind von den zahlreichen parallel struierten, krystallinen Gesteinen jenes Bezirks Dioritschiefer, Hornblendegneis, Hornblendeschiefer, Serpentin und Granulit, sowie die gneisartigen Granite primäre Eruptivgebilde, welche ihre Banderung oder Schiefrigkeit nur besonderen Bildungsbedingungen verdanken. Die einzelnen Glieder der archäischen Formationsgruppe dagegen haben eine Umwandlung erfahren. Sie sind aber nicht ein Produkt des Dynometamorphismus, sondern müssen als kontaktmetamorphosierte Sedimente betrachtet werden.

3. Herr H. Ebert überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Heinrich Alt: „Über die Verdampfungswärme des flüssigen Sauerstoffs und Stickstoffs.“ Dieselbe soll in die Denkschriften der Akademie aufgenommen werden.

Die Bestimmung der genannten Größe namentlich bei den sehr tiefen Temperaturen (bis — 205 bezw. — 210° Celsius) bot darum ganz besondere Schwierigkeiten, weil der ganze Apparat in einen luftdicht schliessenden großen Kupferdom eingebaut und alle Manipulationen von aussen her vermittelst Hebel und Stangen ausgeführt werden mußten. Die Verdampfung der verflüssigten Gase wurde durch elektrische Heizung bewirkt, und die zur Verdampfung bestimmter Gewichtsmengen nötige Zeit mittels eines elektrischen Chronographen registriert.

Beeinflussung der Magnetographen-Aufzeichnungen durch Erdbeben und einige andere terrestrische Erscheinungen.

Von **J. B. Messerschmitt.**

(*Eingelaufen 18. Mai.*)

Die regelmäßigen Bewegungen der Magnetnadel erleiden von Zeit zu Zeit Störungen, deren Ursache teils auf kosmische, teils auf terrestrische Vorgänge zurückgeführt werden können. Die ersteren stehen bekanntlich mit den Erscheinungen auf der Sonne, insbesondere der Fleckenbildung und verwandten Phänomenen in naher Beziehung und werden hier nur so weit berührt, als es für den vorliegenden Zweck nötig erscheint. Sie wirken auf den gesamten Magnetismus der Erde, und sind daher überall bemerklich.

Die Störungen hingegen, welche durch terrestrische Vorgänge verursacht werden, haben meist einen mehr regionalen oder auch nur lokalen Charakter. Von diesen sollen hier an Hand der Aufzeichnungen des Münchener Magnetischen Observatoriums aus dem Jahre 1903, besonders die Einwirkungen der Erdbeben auf die Registrierungen untersucht werden. Dazu aber ist es nötig, die rein lokalen Störungen, die durch den elektrischen Betrieb der Trambahnen und durch die elektrischen Entladungen bei Gewittern registriert werden, im Voraus auszuscheiden. Einige weitere Aufzeichnungen terrestrischen Ursprungs können nur kurz gestreift werden, auf sie einzugehen, muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Wie ich bereits anderweitig[1]) gezeigt habe, ist der Einfluß des elektrischen Betriebes der Trambahn in München auf die Registrierungen der drei Komponenten des Erdmagnetismus verschieden. Am geringsten wirken die vagabundierenden Ströme auf die Horizontalintensität. Bei der jetzt verwendeten Empfindlichkeit von 1 mm gleich 5 γ ist die Kurve bei Tag meist nur unbedeutend weniger scharf, als bei Nacht. Bei der Deklination dagegen befindet sich die Nadel während der Betriebszeit des Trams in fortwährender Unruhe, wobei die Erzitterungen einen Betrag von 0.'2 bis 0.'4 erreichen, so daß die photographische Kurve drei- bis viermal so breit als zur Nachtzeit und dabei unscharf wird und aus lauter verwaschenen Stellen, Knoten und kurzen schärferen Strichen zusammengesetzt erscheint. Da die Empfindlichkeit des Deklinations-Variometers für 1 mm Ordinate 1.'2 ist, so können kleinere Schwankungen von mehreren Zehntelminuten, auch bei sonst völlig ungestörter Kurve, unter Tags nicht mit Sicherheit von der allgemeinen Unruhe unterschieden werden und daher kann beispielsweise eine geringe mechanische Erschütterung des Apparates durch ein Erdbeben oder eine kleine Pulsation der Nadel durch Erdströme und dergl. entweder gar nicht oder wenigstens nicht mit der nötigen Sicherheit erkannt werden. Erst bei stärkeren Bewegungen, bei welchen die Nadel um nahe 1 mm oder darüber aus ihrer Ruhelage abgelenkt wird, verschwindet diese Unsicherheit.

Übrigens hängt die Unschärfe der Kurven sehr von dem Feuchtigkeitsgehalte des Bodens ab; bei längerer Trockenheit sehen die Kurven unschärfer aus, als bei größerem Feuchtigkeitsgehalte der Erde.

Am ungünstigsten wird die magnetische Wage beeinflußt, welche die Änderungen der Vertikalintensität aufzeichnen soll. Bei einer Empfindlichkeit von 5 γ für 1 mm Ordinate schwankt die Nadel beständig hin und her, so daß die Registrierkurve

[1]) Veröffentlichungen des Erdmagnetischen Observatoriums, Heft I München 1904, Seite 25.

aus lauter kleinen Zacken von mehreren Zehntelmillimeter Höhe zusammengesetzt erscheint. Durch diese fortgesetzten unruhigen Bewegungen wird einerseits die Schneide des Wagebalkens sehr rasch abgenützt und andererseits werden auch die Korrektionsschräubchen leicht verschoben. Es unterliegt daher die Empfindlichkeit der Wage fortwährend unkontrollierbaren Schwankungen, welche es unmöglich machen, daß in München mit diesem Instrumente fortlaufend vergleichbare Resultate erhalten werden. Will man daher die Vertikalvariationen in befriedigender Weise zur Aufzeichnung bringen, so muß man instrumentelle Änderungen vornehmen. Hierauf bezügliche Vorversuche haben ein gutes Resultat ergeben.

Im übrigen bleiben wenigstens die absoluten Werte der drei Elemente so gut wie ungeändert, so daß die Mittel der Stunden, Tage, Monate und des Jahres brauchbare Resultate liefern, während man allerdings auf die Verfolgung der feineren und kleinsten Bewegungen der Magnetnadel fast ganz Verzicht leisten muß. Dieses verhältnismäßig noch günstige Resultat kann natürlich nur so lange bestehen, als das Trambahnnetz in der Nähe des magnetischen Observatoriums keine Veränderungen erleidet. Eine Verlängerung der jetzt bestehenden Bogenhauserlinie nur um wenige Meter dürfte wohl von ganz schlimmen Folgen sein. Eine Fortführung gar bis nach Ismaning, oder der Bau einer Linie von Schwabing her durch den Englischen Garten und Führung durch die Montgelas- und Törringstraße würde die Aufhebung des erdmagnetischen Dienstes an seiner jetzigen Stelle zur unmittelbaren Folge haben.

Man erkennt dies, abgesehen von rein theoretischen Überlegungen schon aus einigen Vorgängen, die gelegentlich Trambahnstörungen aufgetreten sind. So war während eines schweren Gewitters, das am 14. Juni 1903 nachmittags 3 Uhr begann, durch mehrfache Blitzschläge in die Oberleitung der Trambahn der Verkehr völlig unterbrochen worden. Ein oder zwei solcher Blitzschläge würden ein solches Resultat wohl kaum verursacht haben, so aber schlug der Blitz etwa fünf Mal in die Oberleitung, darunter in einer besonders heftigen Entladung am

Götheplatz, wobei die Speisungskabel beschädigt wurden. Die Entladungen hatten verschiedene Isolationen so erhitzt, daß sie schmolzen und Erdschluß entstand. Erst nach einer zweistündigen Störung kamen wieder einige Linien in Betrieb und erst um Mitternacht waren sämtliche schadhaften Stellen im Leitungsnetz gefunden. An der Talkirchnerstraße und am Götheplatz hatten ein Nebenspeisekabel und mehrere unterirdische Ausschaltekabel auf die angegebene Weise Erdschluß bekommen. Obwohl nun diese Orte mindestens 4 km von dem Erdmagnetischen Observatorium entfernt sind, zeigten die Registrierungen der Magnetnadeln außergewöhnliche Unregelmäßigkeiten.

Die Deklinationskurve verlief an diesem Tage ganz ungestört, so daß sie mit dem Charakter 1 zu bezeichnen ist. Nach Beginn des Gewitters traten zunächst einige kleine Wellen auf, deren Ursprung jedoch anderer Art ist, da sie auch an anderen Observatorien aufgezeichnet sind. Gegen 5 Uhr aber erscheinen in der Kurve kleine Absätze, bei welchen die Nadel plötzlich nach oben oder nach unten bis 1 mm verschoben wurde und in der neuen Lage jeweilen mehrere Minuten verharrte. Gegen 6 Uhr setzte etwa 10 Minuten lang eine geringe Unruhe ein, die die Kurve über einen Millimeter breit und verwaschen erscheinen läßt, ohne aber ihren Stand zu verändern. Danach trat wieder das gewöhnliche Aussehen der Kurve ein.

Die Horizontalintensität war an diesem Tage nur schwach gestört, Charakter 2, aber zwischen 5 und 7 Uhr treten ebenfalls mehrere stufenförmige Absätze von 5 bis 10 Minuten Dauer auf, bei welchen die Horizontalintensität um mehr als 5 γ gestört ist.

Die Kurve der Vertikalintensität zeigt ebenfalls um 5 Uhr einen solchen Absatz, vorher nur zwei kleine Zacken, während sie sonst ganz ruhig verläuft.

Es ergibt sich somit daraus, daß die Magnetnadel während dieser Trambahnunterbrechung systematisch aus ihrer normalen Lage abgelenkt worden war und zwar um Beträge von solcher

Größe, wie sie bei den Registrierungen nicht vorkommen dürfen.

Gewitterstörungen. Die vorstehende Beobachtung führt unmittelbar zu den Gewitterstörungen. Lamont hat darüber keine eigenen Beobachtungen angestellt; spricht jedoch in seinem Buche „Astronomie und Erdmagnetismus" (Stuttgart 1851, Seite 277) sich dahin aus, daß auch bei den stärksten Gewittern die Magnetometer keine außergewöhnlichen Bewegungen zeigen. Er führt dazu die Tatsache an, daß er im Jahre 1842 gerade in dem Augenblicke beobachtete, als der Blitz in der Nähe des Observatoriums auf freiem Feld einschlug und keine besondere Bewegung wahrnehmen konnte. Ein anderes Mal, am 8. September 1842 abends 5 Uhr, sah er gemäß einer Bemerkung im Beobachtungsbuche die Nadeln bei einem Gewitter schwach schwingen, eine Beobachtung, die er wohl noch öfter machte[1]). Ebenso wurden einmal, am 15. Mai 1869, die Eisenstäbe der Inklinatorien durch Magnetisierung stark geändert gefunden, nachdem in den nahe liegenden Leitungen für Erdstrommessungen bei einem Gewitter starke Entladungen stattgefunden hatten (Wochenberichte der Sternwarte, Nr. 202 vom 9.—15. Mai 1869).

Eine Durchsicht sämtlicher Registrierungen des Münchener Observatoriums seit 1899 ergaben das nachstehende Resultat. Im Jahre 1899 ist bei keinem der 20 beobachteten Gewitter von einem der drei Elemente mit Sicherheit ein Einfluß aufgezeichnet worden.

1900 wurden auf der Sternwarte in München 23 Gewitter
1901 „ „ „ „ „ „ 15 „
1902 „ „ „ „ „ „ 20 „
1903 „ „ „ „ „ „ 22 „
1904 „ „ „ „ „ „ 21 „

[1]) In seinem Buche „Der Erdstrom" (Leipzig 1862), sagt er nämlich Seite 66, daß Stöße, die sowohl die Galvanometernadeln, als auch die magnetischen Instrumente in kleinere oder größere Schwingungen versetzen, bei jedem stärkeren Gewitter, so oft ein Blitz erscheint, beobachtet werden können.

notiert, davon zeigten die meisten ebenfalls keine Einwirkung auf die Registrierungen, wobei freilich zu berücksichtigen ist, daß allfällige kleine Schwankungen unter Tags wegen des Trambahnbetriebs nicht erkannt werden können. Bei einigen Gewittern erscheinen zwar die Kurven etwas mehr verwaschen, als vorher, doch sind die Unterschiede nicht derart, um sie auf diese Ursache sicher zurückführen zu können.

Dagegen sind an folgenden Tagen innerhalb des untersuchten Zeitraumes ausgesprochene Bewegungen der Nadeln aufgezeichnet worden, die allein von den Gewittern herrühren. Dabei waren an sämtlichen Tagen die magnetischen Kurven ungestört, so daß ihnen der Charakter 1 zukommt[1]).

1900, Juni 6. 11 p in D[2]) und H zwei kleine Ausschläge.

Juni 13. 9—10 p und 11 p in D mehrfach verwaschene Stellen mit geringen Ausschlägen, in H ebenfalls und besonders um $^1/_2$11 p ein starker Ausschlag von über 3 mm.

Juli 21. In H ein Ausschlag von 1 mm um $7^3/_4$ p, in D weniger.

1901, Mai 16. Von 4—5 p sind die Kurven stärker verwaschen, außerdem zeigt D eine plötzliche Abnahme von 0!2 und H eine Zunahme von 5 γ, welche später wieder ebenso zurückgeht. Vielleicht hatte Kurzschluß bei der Trambahn stattgefunden.

Juni 3. H zeigt um 1 a und 2—3 a einige kleine Zacken.

Juni 15. Zwischen $9^1/_2$—11 p deutliche Schwankungen der Magnetnadeln besonders in D, auch scheint eine Trambahnstörung dabei gewesen zu sein.

1902, Jan. 25. Von $6^1/_2$—7 p in allen drei Elementen Ausschläge und kleine Zacken.

April 19. Beginn des Gewitters 6^{20} p, in H drei sehr schöne Ausschläge, aber auch in D deutliches Erzittern.

Juli 27/28 in D und H einige kleine Zacken.

---

[1]) Charakter 1 bedeutet völlig ungestörte Kurve, 5 größte Unruhe. Vgl. Veröffentlichung 1. Heft, Seite 31.

[2]) D = Deklination, H = Horizontalintensität.

Aug. 20 in D und H um 1 a und 4—5 a mehrere deutliche Ausschläge.

1903, Juni 14. Vgl. oben S. 137.

Juli 4. 1 a—3 a vielfaches unruhiges Hin- und Herschwanken der Nadeln. Besonders charakteristisches Bild.

Nov. 22. $11^1/_2$ a in H eine größere Ablenkung aus der Ruhelage, in D nichts zu sehen.

1904, Juni 4. Zwischen $4^1/_2$ und $4^3/_4$ p in D sehr deutliche Ausschläge, in H nur schwach angedeutet.

Aug. 5. Zwischen 7—9 p besonders in D unruhige Bilder.

Aug. 21. Um $5^3/_4$ p in D und H eine sehr große Ablenkung.

Sept. 7. In D zwischen 9 und 10 p sehr deutliches, in H nur schwaches Zittern der Nadeln.

Es ist somit nur etwa der achte Teil der aufgetretenen Gewitter von den Magnetometern erkennbar aufgezeichnet worden. Dabei wurde aber niemals der Erdmagnetismus selbst geändert, sondern nur die Nadel jeweilen momentan aus ihrer Ruhelage abgelenkt, etwa ebenso, wie wenn derselben ein Magnet genähert und sofort wieder entfernt worden wäre[1]), worauf sie wieder, um ihre Anfangslage herumpendelnd, entsprechend der vorhandenen Dämpfung rascher oder langsamer in die frühere Richtung zurückkehrte. Meist war es nur ein geringes Zittern der Nadeln, einige Male kamen jedoch auch größere Ausschläge bis etwa 3 mm Ordinate vor, die wahrscheinlich von stärkeren elektrischen Entladungen herrühren. Ob hiebei ein direktes Einschlagen der Blitze in der Nähe der Sternwarte stattfand, konnte nachträglich nicht mehr festgestellt werden. Lamont nahm ja auch einmal in einem solchen Falle gar keine Schwankung wahr. Zu bemerken ist noch, daß nicht immer alle Komponenten gleich stark beein-

[1]) Es versteht sich von selbst, daß die Besucher des Variationsraumes keine magnetischen Gegenstände, Eisenteile u. dgl. mitnehmen; überdies wird die Zeit, zu welcher sich etwa Personen daselbst aufhalten, jeweilen notiert, um allfällige äußere Einflüsse nachweisen zu können.

flußt werden; es kann vorkommen, daß die eine stark abgelenkt wird, während die andere keine Störung erleidet.

Erdbeben. Die Einwirkung der Erdbeben auf die magnetischen Variationsinstrumente kann zweierlei Art sein, nämlich rein mechanische Erschütterungen oder magnetische Störungen.

Durch die mechanische Erschütterung eines magnetischen Apparats gerät der Magnet[1]) plötzlich in pendelartige Bewegung und beruhigt sich gemäß seiner Eigenschwingung und der etwa vorhandenen Dämpfung allmählig wieder. Es entsteht daher in den registrierten Kurven zunächst eine Unterbrechung in Form einer > förmigen, verwaschenen Stelle. Sobald der Magnet wieder in Ruhe gekommen ist, was bei unseren Variationsinstrumenten ohne Dämpfer in etwa 1 Minute der Fall ist, setzt sich die Kurve in der gleichen Richtung wie vorher fort. Die verwaschene Stelle ist eine Folge der kürzeren Belichtungszeit des photographischen Papiers durch den schwingenden Magneten. Es bricht also die Kurve plötzlich mit einem scharfen Striche ab, der die Zeit des Beginns des Bebens angibt. Eine magnetische Wirkung ist in diesem Falle nicht vorhanden. Das Bild ist somit ähnlich den oben beschriebenen Gewitterablenkungen, nur etwas schärfer und regelmäßiger, da eben bei Gewittern die Störung zwar plötzlich eintritt, aber durch mehrfache Entladungen, durch Induktionswirkung und durch allenfällige Luft- und Erdströme erst nach einer etwas längern Zeit wieder aufhört.

Das interessanteste Beispiel dieser Art bietet das große Beben auf der Balkanhalbinsel vom 4. April 1904 Vormittag. Es ist dies zugleich die größte mechanische Störung, die seit der Aufstellung des Magnetographen in München, d. i. seit Ende 1898 beobachtet worden ist. Unifilar und Bifilar haben beide sehr starke Ausschläge aufgezeichnet; die magnetische Wage

[1]) Bei den Variationsapparaten für die Deklination und die Horizontalintensität sind die Magnete an 70 cm langen feinen Drähten aufgehängt. Die Vertikalintensität wird durch einen Magneten, der auf einer Schneide, wie ein Wagebalken ruht, aufgezeichnet.

dagegen, die allerdings nicht sehr empfindlich gestellt war (1 mm = 14 γ), hat fast gar keine Wirkung verspürt.

Die Bewegung des photographischen Papiers des Magnetographen beträgt 20,5 mm in der Stunde; es lassen sich daher die Zeiten auf nicht mehr als $^1/_4$ Minute ablesen. Der Stand der Registrieruhr wird täglich um 9 Uhr Vormittag auf 0,5 bestimmt. Die Gangschwankungen während des Tages betrugen meist nur wenige Sekunden, was man aus der gleichbleibenden Länge der Stundenlinien und der gleichförmigen Schwärzung der Basislinien erkennen kann, so daß der Uhrstand stets recht sicher ermittelt werden kann. Wie bei allen photographischen Kurven bleibt aber immer eine gewisse Unsicherheit beim Ablesen übrig, so daß die unten mitgeteilten Zeiten wohl auf nicht mehr als $\pm$ 0,5 Minuten genau sein werden.

Die erhaltenen Zeiten der Erdstöße in M. E. Z. sind in der beistehenden Tabelle enthalten; bei den Amplituden sind die halben Ausschläge eingeschrieben.

	Unifilar		Bifilar	Bemerkungen
	Zeit	Ampl.	Ampl.	
	h m	mm	mm	
1. Erschütterung	10 32,5	0,2	0,4	Dauer ca. 1^m
2. Erschütterung				
Vorphase . . .	11 5,6	. . .	1,0	Beginn
1. Hauptphase .	7,1	> 0,2	1,7	Beim Unifilar sind die Aufzeichnungen zu schwach, um im Einzelnen abgelesen werden zu können
2. Phase . .	9,6	.	1,0	
3. Phase . . .	11,6	.	0,3	
Ende	13,0	—	—	
3. Erschütterung				
Vorphase . . .	11 28,5	0,3	0,6	
Hauptphase . .	29,8	1,0	7,0	
2. Phase . . .	33,0	1,3	1,6	
Ende	34,3	—	—	
Neuer Stoß . .	36,0	.	1,4	
" " . .	39,1	.	0,7	
" " . .	40,1	.	1,0	
" " . .	40,6	0,6	0,4	
Ende . . .	43,6	.	.	
Stoß . .	50	0,3	0,4	Die beiden letzten Stöße können ev. nur von der Unruhe des Trams entstanden sein.
" . . .	12 2,6	0,2	.	

Beim Unifilar (Deklinationsvariometer) sind die einzelnen Abschnitte weniger deutlich, als beim Bifilar (Horizontalintensität). Die Zeiten stimmen jedoch bei beiden Instrumenten innerhalb der Ablesegenauigkeit überein. Das Aussehen der Aufzeichnungen gleicht demjenigen von Seismographen mit optischer Aufschreibung bei langsamer Bewegung des Papiers, wie z. B. der Milne'schen Seismographen. Man hat es eben hier mit einer rein mechanischen Erschütterung der Variationsinstrumente zu tun, der jede Beimischung von magnetischen Wirkungen oder Erdströmen fehlt. Der Umstand, daß die magnetische Wage fast gar nichts aufzeichnete, läßt sich daraus erklären, daß eben auch bei stärkeren Beben die Vertikalbewegungen äußerst geringfügig sind.

Eine andere, recht deutliche Erschütterung wurde erst kürzlich wieder bei dem großen Erdbeben vom 4. April dieses Jahres, durch welches in Nordindien, besonders in der Gegend von Lahore schreckliche Verwüstungen angerichtet worden sind, aufgezeichnet. Beim Unifilar sind zwei zeitlich getrennte Störungen zu erkennen, die beide spindelförmige Verdickungen der Kurven mit je einem Maximum von etwa 0,5 mm hervorgebracht haben. Die Bewegungen des Bifilars sind noch mannigfaltiger gewesen, indem man deutlich 7 Stöße unterscheiden kann. Der seitliche Ausschlag war allerdings auch nicht größer als 0,5 mm im Maximum. Die einzelnen Phasen lassen sich aus den folgenden Zeitangaben (M. E. Z.) erkennen.

	Unifilar		Bifilar
	h m		h m
Beginn	2 22 a. m.	Beginn	2 19 a. m.
Maximum (Hauptphase)	22,5	Maximum (Hauptphase)	21,5
Ende	25	Ende	23,5
Beginn	2 28,5	Einzelner Ausschlag .	25,5
Maximum	30	" " .	28,5
Ende	31		
		Beginn	31
		Maximum	32
		Letzter Ausschlag .	34
		Ende	34,5

Eine zweite Art der durch Erdbeben erzeugten Störungen kann magnetischer Art sein, woran man besonders bei vulkanischen Beben denken kann, wenn Erdströme entstehen. Diese Störungen unterscheiden sich in dem Aussehen der Kurven in nichts von den sonstigen magnetischen Störungen, so daß ihre Ursache nicht so leicht nachweisbar ist, wie im ersten Falle, insbesondere so lange nicht ein benachbarter Seismograph zur Kontrolle vorhanden ist, was ja in München durch die Aufstellung eines Wiechertschen Pendelseismometers bald der Fall sein wird.

Das auffälligste Beispiel dieser Art hat in neuester Zeit der schreckliche Ausbruch des Mont Peleé auf Martinique vom 8. Mai 1902 geliefert[1]). Vor der Katastrophe war die Bewegung der Magnetnadeln normal und gleichmäßig; genau zur Zeit des Ausbruches aber setzte bei fast allen Magnetographen der Erde, ohne Anzeichen mechanischer Erschütterung, eine heftige Störung ein, die dann über sieben Stunden andauerte. Auch die Kompasse auf den Schiffen, die sich in der Nähe der unheilvollen Insel befanden, wurden unruhig, ein Beweis für die Stärke der so entstandenen Erdströme. Übrigens zeigten die Seismometer in größerer Entfernung von der Insel kein Erdbeben an, von dem auch auf der Insel selbst nur wenig verspürt worden war. Mit sichtbaren Vorgängen auf der Sonnenoberfläche läßt sich dieser magnetische Sturm nicht in Zusammenhang bringen, da zu dieser Zeit die Sonne ohne Flecken war, wie überhaupt das Minimum der Sonnentätigkeit in diese Zeit fällt.

Freilich werden ähnlich verlaufende Störungen, mit einem plötzlichen Einsetzen der Unruhe auch durch kosmische Vorgänge hervorgerufen, wovon das große magnetische Gewitter vom 31. Oktober 1903[2]) das beste Beispiel bietet, das mit dem

---

[1]) Vgl. Terr. Magnetism. Vol. VII, S. 57, 1902 und Meteor. Zeitschr. Bd. 19, S. 316, 1902. Die Münchner Aufzeichnungen sind in den „Annalen der Hydrographie" Bd. 31, S. 150, 1903 diskutiert. Siehe auch Sitzungsber. der Münch. Akad. Bd. 33, S. 201, 1903.

[2]) Diese Berichte Bd. 34, S. 29, 1904.

Durchgange einer großen Sonnenfleckengruppe durch den Zentralmeridian der Sonnenscheibe in auffälliger Beziehung stand. Eine der interessantesten Kurven dieser Art ist erst kürzlich wieder am 3. März 1905 aufgezeichnet worden, als eine der größten jemals gesehenen Fleckengruppen die Sonnenmitte passierte. Es wurden dabei zwar keine besonders große Amplituden in den Schwingungen hervorgerufen, aber die Nadeln, insbesondere der Horizontalintensität, gerieten in fast rythmische Schwingungen, als ob derselbe Einfluß der Erregung in fast gleicher Weise sich mehrfach allmählich aber schwächer werdend, wiederholt hätte. Man könnte daran denken, daß auf der Sonne, diese als Sitz der Störungsursache betrachtet, Ausbrüche in ähnlichen gleichförmigen Perioden stattfanden, wie man sie oft bei den Geysirs beobachtet und diese so oszillierende magnetische Wirkungen erzeugt hätten. Diese Unruhe währte gegen 20 Stunden, während die einzelnen Perioden nicht ganz eine Stunde dauerten.

Man erkennt aus diesen Angaben, daß eine strenge Diskussion jedesmal vorangehen muß, ehe man bei diesem Störungstypus auf Erdbeben schließen darf.

Es gibt noch eine andere Art Störungen, welche möglicherweise mit Erdbebenvorgängen in Zusammenhang stehen, nämlich kurz verlaufende Schwingungen mit geringen Amplituden, die den regelmäßigen Gang nur wenig beeinträchtigen. Ihre Dauer ist meist wenige Stunden. Man kann sie sich so entstanden denken, daß durch die Umlagerungen der Massen und durch die Veränderungen der Spannungen bei tektonischen Vorgängen jeweilen auch Änderungen in den Erdströmen entstehen und damit die Magnetnadel in kleinen Ablenkungen um ihre Mittellage herumgeführt wird.

Um alle diese Fälle prüfen zu können, habe ich die Registrierungen des Jahres 1903, das noch in die Zeit kurz nach dem Minimum der magnetischen Tätigkeit fällt und daher meist ruhige Kurven aufweist, durchgesehen und drei Tabellen ausgezogen. Die erste enthält die kurz andauernden Ausschläge, die dem Typus der mechanischen Erschütterungen entsprechen.

Dabei sind die oben bezeichneten Gewitterzacken fortgelassen worden, da deren Ursache ja bereits sicher nachgewiesen ist.

Die zweite Tabelle umfaßt alle diejenigen Störungen, welche mit einem plötzlichen stärkeren Ausschlage beginnen und dann längere Zeit, oft mehrere Tage, andauern, wie bei dem Vulkanausbruche des Mont Pelé.

Endlich folgen in einer dritten Tabelle die magnetischen Störungen mit kleinen, oft scharfen und spitzigen Pendelungen um den normalen Gang. Die Amplituden sind dabei höchstens 3' in D bez. 15 γ in H; sie dauern nur wenige Stunden oder auch nur Bruchteile davon.

Die Zeiten sind von Mitternacht an, von 0 bis 24^h durchgezählt, in M.E.Z. angegeben. Die halben Amplituden werden in absolutem Maße angegeben, wobei zu bemerken ist, daß bei der Deklination 1 mm nahe gleich 1'.2 und bei der Horizontal-Intensität 0,00005 CGS = 5 γ entspricht. Der Charakter bezeichnet die Art der Kurven, wobei 1 = ganz ruhiger, normaler Gang, 2 = leicht gestörte, 3 = bewegte, 4 = stark gestörte und 5 = ganz unregelmäßige Kurven mit großen, rasch wechselnden Ausschlägen bezeichnen.

Tabelle I.

Störungen mechanischen Charakters.

Nr.	Datum	M. E. Z.	Deklination Ampl.	Deklination Char.	Hor.-Intens. Ampl.	Hor.-Intens. Char.	Bemerkungen
	1903	h m					
1	Jan. 18.	2 55,7	0,1	1	—	1	Am 19. und folgende Tage starke Beben in Andidschan in Turkestan und Provinz Ferghana
2		58,5	0,1	1	—	1	
3	20.	2 22,6	0,1	1	—	1	2 h 20 m Beben in Zaleszczyki (Galizien) und Umgegend, Stärke IV
4		25,6	0,1	1	—	1	
5	22.	2 10,8	0,2	1—2	—	1	
6	30.	5 21,9	0,1	1	—	1	
7	Febr. 10.	22 5,6	—		0,8	1—2	auch in Vert.-Int. angedeutet (Nr. 7–8)
8		9,4	—		0,8	1—2	
9	14.	23 52,1	0,6	1	0,2	1—2	
10	15.	0 50,8	0,1	1	—	1	in H kaum angedeutet, dagegen in V schwach zu sehen (Nr. 10–14)
11		0 59,3	0,1	1	—	1	
12		1 10,8	0,1	1	—	1	
13		15,2	0,1	1	—	1	
14		28,8	0,1	1	—	1	
15	März 4.	0 45,6	0,1	1	—	1	In Eger nachts (Zeit?) starker Erdstoß, um 0 h 40 m in Falkenstein schwaches Beben und später noch mehrfache Stöße im Voigtland
16	10.	23 55,0	0,2	1	—	1	Linie ganz scharf
17	April 2.	3 14,1	0,2	1—2	nichts (Nr. 17–19)	1	Beben in Hechingen und auf der Alb am Vormittag (Zeit?) mit starkem Getöse
18		19,1	0,7	1—2		1	in V ein Zacken von 0,3 mm
19		4 32,6	0,1	1—2		1	in V angedeutet. 2 m später nochmals
20	3.	1 44,8	0,1	1	—	1	
21	8.	1 19,0	0,15	1	—	1	1 m später ein zweiter kleiner Ausschlag

22	11.	0 25,4	0,1	1		1	
23	April 18.	4 37,6	0,2	1		1	
24	Juni 8.	20 38,0	0,2	1		1	bis $8^h\ 47^m$ stärker verwaschene Stelle mit 2 Maxima. In H nichts
25	16.	22 59,7	—	3—2	1,4	3—2	Beginn einer Abnahme. An beiden Tagen nirgends Beben gemeldet
26	21.	23 9,6	—	2	0,1	2—3	
27	Aug. 18.	20 55,6	—	1	—	1	in D etwas später ein kleiner abnehmender Bogen
28	Sept. 10.	0 40,8	0,1	2	0,1	2	Am 10. Sept. morgens im südlichen Graubünden und den anliegenden Gebieten Tirols Beben. Am heftigsten in Pontresina. (Zeit ?)
29	10.	0 50,8	0,1	2	0,1	2	
30	25.	23 15,9	0,1	1	0,1	2	Die Stadt Turshis in Persien wurde (Zeit ?) fast ganz zerstört
31	Okt. 3.	3 11,0	0,6	1	—	1	
32	17.	2 28,4	0,1	1—2	0,1	1—2	
33		6 42,5	—	1—2	1,3	1	in D setzt zur nämlichen Zeit ein abnehmender Bogen ein, etwas später in H ein zunehmender Bogen
34	Nov. 14.	1 53,9	0,1	1	0,1	1	$1^h\ 28^m$ und $2^h\ 15^m$ leichte Beben registriert in Rocca di Papa
35		2 1,1	0,1	1	0,2	1	
36		4 52,4	0,1	1	0,5	1	
37	18.	5 17,9	0,1	1—2	—	1—2	
38	21.	2 42,1	0,1	2	—	2	Vom 21. zum 22. Nov. an vielen Orten des Voigtlands Beben
39	22.	8 57,6	0,1	2	1,1	3	bei Beginn eines stärkeren Ausschlages
40	25.	2 0,8	—	1	0,3	1—2	bei Beginn je eines kleinen flachen Bogens. Am 25. im Ober-Maintal und Saaletal heftige Erschütterung (Zeit ?)
41	26.	23 46,1	0,2	2—1	0,1	2	vielleicht *m*-förmige Wellen?
42	Dez. 23.	3 42,6	—	1	0,1	1	in D beginnt ein kleiner flacher Bogen
43	28.	2 38,1	0,1	1	—	1	in H *m*-förmige Wellen
44		4 18,6	0,1	1	—	1	In Leipzig beginnt $4^h\ 8^m$ ein Beben vom ostindischen Typus (Wiecherts Seismometer) das 90^m dauert; auch in Potsdam, Hamburg, Straßburg u. s. w. registriert.
45		4 27,6	0,1	1	—	1	

Plötzlich einsetzende Störungen. Tabelle II.

Nr.	Datum	M. E. Z.	R	Bemerkungen
	1903	h m		
46	Jan. 26.	9 56,2	7	D beginnt mit einem kleinen Ausschlag von 0,5 mm, dann bei sonst ungestörtem Gange bis Nachmittag 3^h viele scharfe Zacken von 1' Größe. Erst abends 7^h beginnt eine größere Abnahme der Deklination und die Kurve erreicht von 22^h bis zum 27. Januar 2^h den Charakter 3
				H. Plötzliche Zunahme um 6 γ, dann leichte Unruhe, die von $1/2 12^h$ bis 15^h stärker ist (Char. 2 3), doch bleibt der tägliche Gang noch erkenntlich. Um 20^h und 22^h bis Jan. 27. 2^h Charakter 3 –4. Amplituden über 50 γ.
				Auch in V sind diese Bewegungen vorhanden. Charakter 2.
				Die Sonne ist fast fleckenfrei. — Erdbeben in der Pfalz. (Vgl. diese Berichte, Bd. 33, Seite 186, 1903.)
47	Febr. 12.	18 15,6	28	In H rasche bogenförmige Zunahme, dann Unruhe bis 13. Febr. 2^h, mäßige Störung.
				In D nur mit einem flachen Bogen beginnend bleibt die Störung gering (Char. 2).
				In Leipzig ist eine Erdbeben-Störung von $19^h 53^m$—$20^h 40^m$ registriert; die Hauptphase entspricht einem Beben aus mäßiger Entfernung. Die Sonne zeigt mehrere Flecken.
48	März 4.	22 24,2	7	In H plötzliche Zunahme um 21 γ, dann Störung Char. 3 über 24 Stunden.
				In D erster Ausschlag 0.'6 nach Westen, dann Kurve vom Char. 2.
				In V wenig gestört, Char. 2.
				Die Sonne zeigt eine geringe Fleckentätigkeit. — In Stonyhurst (Lanceshire) werden die magnet. Kurven als ungestört bezeichnet; in Pola vom gleichen Charakter wie in München.
				Am 5. von früh an und 6. viele Erdstöße im Erzgebirge und Fichtelgebirge mit Böhmerwald. (Mitteil. der Hamburger Erdb.-Station, März 1903.) Vgl. auch diese Berichte, Bd. 33, S. 186, 1903 und Reindl, das Erdbeben am 5. und 6. und 22. März 1903. Geognostische Jahreshefte, 1903, Jahrg. 16.
				Am 5. März von 1^h an ein von Erdbeben begleiteter Ausbruch des Vulkans Colima in Mexiko, die bis abends dauern.

49	März 22.	13 57,9	16	H nimmt um 11 γ zu, dann mäßig bewegt bis 23. März 2[h]. Keine großen Zacken. Vorher den ganzen Tag ruhig. D zunächst eine kleine Abnahme von 0,2, dann gleich Zunahme von 1,3. Hierauf fast ganz ungestört nur 22[h]—24[h] eine flache konkave Einbuchtung und daran anschließend m-förmige Schwingungen. — Die Sonne zeigt nur eine kleine Fleckengruppe. Am 22. März ziemlich heftiges Beben in der Rheinpfalz, besonders 6[h], 7[h], 1/210[h] und gegen 14[h]. Vgl. die vorhergehend zitierten Abhandlungen. In der Nacht vom 21. zum 22. heftiger mit starken Erdbeben verbundener Ausbruch des Vulkans Soufrière auf St. Vincent. Ebenfalls Vulkanausbruch eines Vulkans in Kolumbien mit Erdbeben, der das Dorf Tiojó bei Galera de Zamba zerstörte. Auch Mont Pele Ausbruch ohne Zeitangabe am 21.
50	April 6.	0 24,3	28	D zuerst Abnahme 0,9, dann Zunahme 4,8. Hierauf Unruhe (3—4) mit vielen kleinen Zacken und großen Amplituden, besonders 3[h]—6[h] und 9[h]—15[h]. Ende 20[h]. H nimmt zwei Minuten später als D um 35 γ plötzlich zu, dann zunächst wieder ruhig, hierauf Störung 4 fast 24 Stunden. Auch V gestört, Char. 2—3. Sonne kleine Fleckentätigkeit. An den deutschen Erdbebenstationen keine Beben registriert. In Italien Vormittag mehrere Beben registriert. 0[h] 25[m] starker Stoß in Spoleto verspürt.
51	Mai 16.	23 2,0	9	D Zunahme 1,3, dann wieder langsame Abnahme mit vielen kleinen Zacken. Ende Mai 17. 6[h]. Char. 2—3. H Zunahme 32 γ, dann viele Schwingungen von über 10 γ bis 15[h], dann langsame Abnahme der Intensität. Anfangs-Char. 3 später 2. In V zuerst Zunahme von 4 γ dann wieder zurück. Char. 2. Geringe Fleckentätigkeit. Keine besonderen Beben bekannt, nur in der Woche 11.—18. Mai wiederholte mit Erdbeben verbundene Ausbrüche des Vulkans Colima (Mexiko). Vier Orte am Fuße des Berges, auch das entfernter belegene Tonila, sind von den Bewohnern verlassen worden.
52	Mai 21.	14 30,9	23	H erst 1 γ Abnahme, dann 9 γ Zunahme und geringe Unruhe mit kleinen Wellen bis Mitternacht (Char. 2—3). In D fast nichts, nur 22[h] zwei flache konkave Buchtungen. Etwas größere Fleckentätigkeit. Vormittag 1[h] 15[m] und 10[h] 23[m] in Bagnères und Pic du Midi mit unterirdischem Geräusche verbundenes starkes Erzittern.

Nr.	Datum	M.E.Z.	R	Bemerkungen
	1903	h m		
53	Juni 15.	10 47.1	14	H erst 1 γ Abnahme, dann 5 γ allmähliche Zunahme. Unruhe 2—3 bis 19^h^. D ruhig. Sonne wenige Flecken. Nach den Taschkenter Angaben Beben in Werny, Semirotschenkgebiet 10^h^ 39^m^.
54	Juni 20.	13 14,1	58	H nimmt um 10 γ zu, bis 22^h^ Char. 2—3. D nichts. Sonne ziemlich viele Flecken.
55	Juni 21.	10 54,6	58	In H Zunahme um 10 γ, dann Störung 2—3 bis 22. Juni 3^h^. In D fast nichts zu sehen, Char. 1. Unruhe erst 20^h^ bis nächsten Morgen 4^h^. (Char. 2—3.) Sonne ziemlich tätig.
56	Aug. 25.	11 57,9	17	D nimmt erst um 1'.1 ab, um sogleich um 1'.8 wieder zuzunehmen, dann während 24 Stunden Störung 3—2. H zuerst Abnahme um 5 γ, dann rasche Zunahme um 30 γ. H bleibt zunächst größer und nimmt erst am 26. Aug. 7^h^ schnell ab. Char. 3. Dauer 24^h^ ca. Sonne wenige Flecken. Ziemlich heftiges Beben in Fiume um 23^h^ 43^m^.
57	Sept. 27.	15 51.9	24	H nimmt plötzlich um 7 γ zu und gleich darauf um weitere 10 γ. Kleine Störungen bis 22^h^, dann größere (Char. 3) bis nach Mitternacht. In D ist der Beginn zu sehen, aber schwach. Kurve erst von 22 p ab: Char. 2—3. Sonne ziemlich Flecken.
58	Okt. 12.	13 59,2	62	Beginn einer großen Störung in D u. H mit Char. 3. An den beiden nächsten Tagen 4—5. Auf der Sonne befindet sich ein außergewöhnlich großer Fleck nahe zentral.
59	Okt. 31.	7 0.0	53	Berühmte große Störung, siehe oben, Char. 5. Ein größerer Fleck befindet sich nahe dem Zentrum der Sonne. Nordlichter. Telegraphenstörungen.
60	Nov. 7.	8 14,0	91	In D Abnahme, in H Zunahme, Störung 3 bis Mitternacht. Größere Sonnentätigkeit.

61	Nov. 18.	13	2,4	10	D zuerst eine kleine Abnahme von 1ʹ3, dann ruhig. Erst von 20^h bis zum nächsten Morgen um 5^h starke Unruhe Char. 4. H nimmt um 20 γ zu und zeigt Störung vom Char. 3—4 bis morgens 4^h. Geringe Sonnentätigkeit.
62	Nov. 21.	23	23,6	12	H vorher Char. 2—1, dann Zunahme um 25 γ in 9^m. D vorher Char. 1—2, dann Abnahme um 6ʹ in 30^m. Unruhe ca. 24^h. Sonne wenig Flecken. Gegen Mitternacht schwache Erschütterung in Auerbach (Vogtland) und bis zum Morgen mehrere Beben im Voigtland.
63	Nov. 22.	20	57,6	14	In D Abnahme um 9ʹ6 in 15^m und dann stärkere Unruhe (3—4) bis Mitternacht. In H erst eine verwaschene Stelle, dann Zunahme um 30 γ in 12^m. Unruhe (3—4) bis Mitternacht. Sonne wenig tätig.
64	Nov. 26.	16	54,6	21	In H erst Zunahme um 3ʹ, dann leichte Unruhe (2—3) bis Mitternacht. In D 16^h $57{,}6^m$ Abnahme um 1ʹ, dann wieder ruhig und erst gegen Mitternacht 2 flache konkave Bogen. Sonne zeigt eine mäßige Tätigkeit. Am 26. und folgende Tage im südwestlichen Bulgarien mehrere ziemlich heftige mit unterirdischem Rollen verbundene Stöße. In Stonyhurst sind die magnetischen Kurven ruhig gewesen, in Pola nur H am Nachmittag Char. 2, sonst 1.
65	Dez. 13.	13	27,9	40	D nimmt plötzlich um 1ʹ1 ab, dann Beginn einer Störung vom Char. 4—5 bis nächsten Morgen 2^h H zuerst Abnahme 3 γ, dann gleich Zunahme 5 γ, dann sehr unruhig, Char. 4—5 bis 14. Dez. 6^h; vorher waren beide Kurven ganz ungestört. Sonne ziemlich viele Flecken.
66	Dez. 30.	4	15,8	44	Zuerst in D Abnahme um 1ʹ6 und gleich darauf Zunahme um 6ʹ5. Dann folgen viele kleine Zacken bis Mittag. In H plötzliche Zunahme um 38 γ und gleich darauf um ebensoviel Abnahme. Hierauf viele kleine Schwankungen bis Nachmittag. Sonne ziemlich tätig.

Tabelle III.

Rasch verlaufende Störungen mit geringen Amplituden, die den regelmässigen Gang wenig beeinträchtigen.

Nr.	Datum	Deklination	Hor.-Int.	R	Bemerkungen
	1903	h m — h m	h m — h m		
67	Jan. 4.	5 50 — 8 21	5 42 — 12 3	16	In D spitze Zacken $8^h\ 10^m$ von 2′, in H $8^h\ 2^m$ von 10 γ. In V angedeutet.
		9 12 — 11 42	— —		Von 6^h—9^h registrieren fast alle Erdbebenstationen auch in Asien und Amerika.
68	Jan. 5.	2 45 — 7 36	0 48 — 11 42	8	Ebenfalls überall registrierte Beben von 2^h—3^h.
69	Jan. 7.	—	18 0 — 19 36	15	Zacken bis 5 γ.
70	Jan. 23.	nur angedeutet	10 0 — 21 0	25	Zacken bis 6 γ. Um $20^h\ 35^m$ in Botosani, Rumänien Erdbeben gefühlt.
71	Jan. 26.	9 50 — 15 0	— —	7	Pfälzer Erdbeben, dann in Mineo und in Taschkent. Siehe oben Nr. 46.
72	Febr. 5.	13 25 — 13 36	— —	7	Nur einige Zacken. In Italien und Südfrankreich Beben.
73	Febr. 20.	18 34	18 34 — 20 46	20	Beben im Vogtland. Den ganzen Tag Stöße.
74	März 14.	—	15 57 — 16 37	10	Zacken bis 5 γ. Mehrfache Stöße im Vogtland an diesem Tage.
75	März 15.	11 59 — 12 42	11 59 — 12 42	14	Ausschläge bis 5 γ (Tramstörung?)
76	März 30.	7 42 — 9 10	7 42 — 9 10	54	Zacken bis 1′ bez. 5 γ.
77	Mai 17.	nur angedeutet	10 0 — 18 0	7	Besonders zwischen 14^h—$15^3/_4{}^h$.
78	Juni 4.	„ „	12 10 — 21 10	4	Besonders von 15^h—19^h viele kleine Schwankungen von 5 γ bis 10 γ, die aber den täglichen Gang nicht beeinträchtigen. Von 16^h—18^h an vielen Stationen Erdbeben aufgezeichnet, besonders auch in Italien, Taschkent und San Fernando.

79	Juni 9.	gut angedeutet	11 40 20 10	8	Vielleicht Tramstörung dabei?
80	Juni 11.	5 10 — 7 40	6 10 8 10	14	In D deutlicher als in H, auch in V angedeutet. Taschkent meldet um $6^h 42^m$, $7^h 2^m$ und $10^h 2^m$ Beben.
81	Juni 15.	-	10 47	14	$10^h 39^m$ Stoß in Werny (Rußland) II.
82	Juni 19.	6 0 19 0	6 0 - 19 0	34	Besonders in H schön. $10^h 8^m$—$11^h 12^m$ mehrere Stöße in England, besonders an der Nordwestküste, in Wales u. s. w.
83	Juni 28.	2 0 — 7 0	2 0 — 7 0	8	Besonders schöne Zacken in D. Vorläufer einiger stark gestörter Tage vom Char. 4—5. Die Sonne war am 29. und 30. Juni fleckenfrei. Keine Beben bekannt.
84	Juli 1.	11 30 — 13 10	11 0 — 24 0	17	In H sehr schön. Keine Beben.
85	Juli 18.	5 0 — 7 0	5 0 — 7 0	29	In H schwächer.
86	Aug. 1.	11 30 — 11 40	11 30 — 11 40	18	Einige kurze Ausschläge bis 5' bez. 20 γ, teilweise treppenförmig. Vielleicht Tramstörung?
87	Aug. 11.	6 0 — 8 0	7 30 — 8 20	57	Auch vorher leicht gestört (1—2). Beben Tirol und östl. Mittelmeer.
88	Sept. 4.	schwach	10 10 — 24 0	0	Besonders um 16^h einige größere Ausschläge bis 50 γ.
89	Sept. 10.	4 0 - 9 0	schwächer	16	Leichte Zacken. $4^h 45^m$ bis 5^h mehrere Stöße in Waldmünchen (Böhmerwald), auch früh Ortler- und Berninagebiet (Zeit?)
90	Okt. 25.	10 0 — 11 30	10 0 — 24 0	17	
91	Nov. 5.	11 0 - 14 0	11 0 — 14 0	113	Besonders in H sehr gleichmäßiger Rythmus in den Ausschlägen bis 10 γ. — Gegen $11^h 30^m$ schwaches Beben in Wels (Ober-Österreich).
92	Nov. 10.	8 30 — 13 0	10 30 — 12 0	58	Die Kurven sind auch sonst gestört (2—3).
93	Dez. 25.	18 0 — 19 0	14 0 — 22 0	15	

Tabelle IV.

Vergleich mit den gefühlten Beben.

a) Norden und Osten.

Datum	Zeit	Gegend	Char. d. Kurven	Bemerkungen
1903	h h			
31. Jan.	0¼ u. 3¾	Krain	1	schwache Störungen
5. März	abends	Straubing	1	nichts
6. März	6	„	1	„
20. März	1 u. 6^{30}	Semmering und Weichselgebiet	1	$1^h 15^m$ einige Zacken
8. Juni	16^2	Ungarn, Siebenbürgen	1	geringe Unruhe
17. Aug.	8^{45}	Agram	1	nichts
31. Aug.	1^5	Krain	1	„
11. Okt.	1^{30} u. 2^{30}	Kroatien, Slavonien	1	$1^{15}-3^0$ ca. in H kleine Wellen. — Eine größere Fleckengruppe passiert den Sonnenmeridian.

Von den Beben an der sächsisch-bayerischen Grenze und im Vogtland sind fast niemals Anzeichen von direkten Stößen oder auch von magnetischen Einflüssen nachweisbar.

Vgl. noch oben: Nr. 3 (Galizien), Nr. 15 (Eger), Nr. 38 (Vogtland), Nr. 40 (Ober-Main und Saale), Nr. 48 (Fichtelgebirg und Böhmerwald), Nr. 62 (Vogtland), Nr. 73 (Vogtland), Nr. 74 (Vogtland), Nr. 80 (Waldmünchen und Ortlergebiet), Nr. 91 (Ober-Österreich).

b) Im Süden, Alpengebiet ev. Italien.

(Von letzterem Lande sind nur die stärkeren nachgesehen worden.)

Datum	Zeit	Gegend	Char. d. Kurven	Bemerkungen
3. Jan.	4^{57}	Chur, St. Gallen	1	Seit $4^h 30^m$ schwache Unruhe
4. Jan.	$6^{30}-7^{30}$	Italien	1	Schwache magn. Unruhe
14. Jan.	$3-4^{30}$	„	1	do., besonders in H
11. Febr.	?	Tirol (Oberinntal)	1	nichts
29. April	1 ca.	Hauptwarten Italiens etc. (vielleicht Asiat Türkei)	1—2	seit 28. IV, 22^h etwas Unruhe
13. Mai	8—9	alle Hauptwarten Italiens	1	nichts
7. Sept.	8^2	Gemona (Urbino)	1	nichts
15. Sept.	4	Rigi u. Engadin	1	nichts
26. Sept.	23^{20}	Kanton Waadt	1	nichts
26. Nov.		Bulgarien	—	siehe oben Nr. 64
14. Dez.	23^{25}	Unteres Inntal, Zillertal auch Wallgau (Oberbayern)	1—3	nichts. 14. XII Größere Sonnenfleckengruppe im Meridian.

Vgl. oben auch: Nr. 28 u. 29 (Tirol, Pontresina), Nr. 50 (Italien), Nr. 87 (Tirol).

c) Im Westen.

Datum	Zeit	Gegend	Char. d. Kurven	Bemerkungen
1903	h			
25. Jan.	?	Pfalz	1	18^h etwas Unruhe
26. Jan.	Vor- und Nachm.	"	1	schwache Störungen
28. Febr.	8	Pic du Midi	1	nichts
22. März	6^4	Pfalz	1	siehe Nr. 49
26. März	9	Friedrichshafen (Württ.)	1	nichts
29. März	21^{30}	Schwarzwald	1	nichts
2. April	9^7 u. 9^{30}	Hohenzollern u. Württemberg	1	nichts
14. April	0^{15}	Württemberg (Rottweil)	1	nichts
24. April	19^{12}	Straßburg i. E.	1	nichts
13. Juli	1^{42}	leicht Jungingen (Hohenzollern)	1	nichts
19. Juli	19	Pfalz	1—2	geringe Unruhe
5. Aug.	12^7	Hohenheim (Württemberg)	—	in D beginnt um 12^h eine Störung (2) bis 18^h. In H Störung seit 12^h (2-3) bis nächsten Tag. Sehr kleine Gruppe nahe der Mitte der Sonne
20. Okt.	22^{36}	Hohenheim	1	nichts. Eine Sonnenfleckengruppe im Meridian
4. Dez.	12^{36}	Hohenheim	1	$12^{40}—1^{40}$ leichte Unruhe mit spitzen Zäckchen.

Vgl. oben auch: Nr. 17 (Hechingen), Nr. 46 (Pfalz), Nr. 52 (Südfrankreich), Nr. 71 (Pfalz), Nr. 72 (Südfrankreich).

d) Entferntere Gegenden.

Datum	Zeit	Gegend	Char. d. Kurven	Bemerkungen
1903				
7. Jan.	8^h ca.	Andishan	1	nichts
21. Febr.	und folgenden Tag	starke Erdbeben mit Ausbrüchen des Vulkans Colima (Mexiko)	1—2	etwas gestört. Am 21. auch Fleckengruppe im Sonnenmeridian
5. März	1^h u. 5^h	do.	3	siehe oben Nr. 48. Keine Sonnenflecken
22. März	10^{30}	Ausbruch des Vulkans Soufrière m. Beben	—	siehe Nr. 49
20. Juli	11 ca.	Beben mit Ausbruch des Soufrière auf St. Vincent	1—2	geringe Unruhe

Datum	Zeit	Gegend	Char. d. Kurven	Bemerkungen
1903 27. Juli	früh	Ligurisch-Toskanisches Beben	2—3—4	In H Unruhe von 10^h an, stärker in D und H von 15^h an. Wenig Sonnenflecken.
11. Aug.	5^{30h}	heftiges Beben in Griechenland und östl. Mittelmeer	2—3	In H von 1^{30}—4^0 und 7^{30}—8^{20} und in D von 3^h—4^h und 6^h—9^h unruhiger. Eine kleinere Sonnenfleckengruppe im Meridian
13. Sept.	9^3	Rumänien, Bulgarien	1	nichts
23. Sept.	2^{45}	Algier	1	aber in D von 3^{30h}—4^{30} und in H von 4^0—5^0 zwei größere Ausbuchtungen.

Vgl. auch oben: Nr. 30 (Persien), Nr. 44 u. 45 (nach Leipzig, ostindischer Typus), Nr. 48 (Ausbruch des Colima in Mexiko mit Beben), Nr. 49, 51 und 53 (Asiat. Rußland), Nr. 64 (Bulgarien), Nr. 67, 68 und 70 (Rumänien), Nr. 78, 80 und 81 (Asiat. Rußland), Nr. 82 (England), Nr. 87 (östl. Mittelmeer).

Die Sonnenfleckentätigkeit und damit zusammenhängend die magnetische Tätigkeit ist im Jahre 1903 zwar in Zunahme begriffen, aber namentlich in der ersten Hälfte des Jahres ganz geringfügig gewesen. Die Wolf'schen Sonnenflecken-Relativzahlen (R) betrugen:

1901	2,7
1902	5,0
1903	24.4

Um einen Anhaltspunkt über die solaren Vorgänge zu haben, sind auch in den Tabellen II und III jeweilen die täglichen Relativzahlen (R) eingeschrieben[1]) und überdies ist angegeben, ob in der Nähe des Zentral-Meridians der sichtbaren Sonnenscheibe sich eine Fleckengruppe befindet.

[1]) Astr. Mitt. gegr. von R. Wolf. Nr. 95, Seite 153 (Sep.-Abdr. aus Vierteljahrschr. der Nat.-Ges. Zürich, Jahrg. 49, 1904).

Die in der zweiten Hälfte des Jahres beobachteten größeren Fleckengruppen sind auch alle um diese Zeit von magnetischen Störungen begleitet gewesen. Bei den Flecken des ersten Halbjahres, die allerdings auch nie eine besondere Größe erreichten, ist keine solche Koincidenz nachzuweisen, nämlich März 27., April 2., April 29. und Juli 7. Nur die beiden größeren Gruppen von Febr. 15. und April 8. hatten magnetische Störungen im Gefolge. Es bietet dies keine Verwunderung, da eben das Gesetz oder die Regel über das Auftreten der Sonnenflecken und der magnetischen Störungen bekanntlich keineswegs so allgemein und so einfach und auch nicht umkehrbar ist. Für unseren Zweck genügt dieser kurze Hinweis und es ist jetzt nur noch anzugeben, welche der oben aufgeführten magnetischen Störungen wohl mit einiger Wahrscheinlichkeit mit dem Sonnenfleckenphänomen in Zusammenhang stehend zu betrachten sind.

Von den 21 Störungen der Tabelle II stehen 12 mit den Sonnenvorgängen[1]), 9 mit Erdbeben[2]) (davon 2 zugleich mit der Sonne) zeitlich nahe, während zu zweien, nämlich Nr. 56 und 63 keines von beiden vorliegt.

Von den „rasch verlaufenden Störungen" der Tabelle III kommen bei 10 Sonnenflecken[3]) in Betracht, bei 14 Erdbeben[4]), davon bei 6 zugleich Sonnenflecken. Für 9[5]) sind weder von der Sonne noch von der Erde Vergleichsvorgänge vorhanden.

Von den größeren Störungen der Tabelle II sind Nr. 46 und 49 mit benachbarten Beben in der Rheinpfalz, von den kleineren der Tabelle III Nr. 71, 87 und 89 mit Beben in der

[1]) Es sind dies: Nr. 47 (Febr. 12), 54 (Juni 20), 55 (Juni 21), 57 (Sept. 27), 58 (Okt. 12), 59 (Okt. 31), 60 (Nov. 7), 61 (Nov. 18), 62 (Nov. 21), 64 (Nov. 26), 65 (Dez. 13) und 66 (Dez. 30).

[2]) Nr. 46, 48, 49, 50, 51 (?), 52, 53 (?), 62 und 64, letztere beide auch oben.

[3]) Nr. 75, 76, 77, 78, 80, 82, 87, 89, 91 und 92.

[4]) Nr. 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 81 und zugleich mit der Sonne: 78, 80, 82, 87, 89 und 91.

[5]) Nr. 69, 79, 83, 84, 85, 86, 88, 90 und 93.

Pfalz, Tirol und dem Böhmer Wald zeitlich nahe. Zu den häufigen Beben im Vogtland, die ja teilweise nach Nordbayern noch fühlbar hinübergreifen, läßt sich nur selten eine Aufzeichnung der magnetischen Kurven herbeiziehen. Es kommen hiebei nur die Nr. 47 und 48 der Tabelle II und die Nr. 73 und 74, in Frage. Es dürften aber wohl bei diesen auch nur zufällig die Zeiten übereinstimmen, um so mehr als bei einigen Beben auch nur unbestimmte Zeitangaben vorliegen und überdies eine genaue Vergleichung aller übrigen Vogtländischen Beben[1]), die manchmal ja ziemlich heftig waren, keinen Anhaltspunkt lieferten, wonach Erdströme aufgetreten seien. Es ist daher der Schluß gerechtfertigt, daß die Vogtländischen Erdbeben keine magnetischen Wirkungen außerhalb des Schüttergebietes hervorbringen. Innerhalb desselben können sie auch nur äußerst gering gewesen sein, da auf besondere Anfrage von Prof. Credner bei den Telegraphenämtern nie irgend welche Wahrnehmungen gemacht worden sind.

Dagegen scheinen mir die oben angeführten Beben der Rheinpfalz und des Alpengebiets mit den beobachteten magnetischen Störungen in einem gewissen Zusammenhang zu stehen.

Die übrigen Beben der Tabelle II, welche mit magnetischen Störungen zusammenfallen, sind weiter entfernt, wie Nr. 50 (Italien), 52 (Frankreich), 64 (Bulgarien) oder gar 53 (Asien). Bei 51 wird neben Erdbeben in Mexiko noch ein Vulkanausbruch daselbst gemeldet, das gleiche gilt von Nr. 49 (Antillen), zu welcher Zeit auch Erschütterungen in der Rheinpfalz stattfanden. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß hierbei ein Zusammenhang besteht, man müßte aber hierfür erst ein größeres Material von anderen magnetischen Observatorien zur Verfügung haben.

[1]) Verglichen wurden insbesondere: Credner H., Der Vogtländische Erdbebenschwarm vom 13. Febr. bis 18. Mai 1903. Abh. d. Sächs. Ges. der W., Bd. XXVIII, Nr. VI, Leipzig 1904 und Etzolds Erdbebenberichte in den Berichten dieser Gesellschaft 1903, Seite 296—321 und 1904 Seite 289—295.

Bei den kleinen magnetischen Störungen der Tabelle III wären besonders Nr. 70 (Rumänien), 72 (Italien und Südfrankreich) zu nennen, aber auch bei diesen sind die Bebenherde schon zu weit entfernt, als daß man sicher eine Beziehung annehmen könnte, noch mehr ist dies bei den übrigen Störungen der Fall.

Von den 45 Störungen „mechanischen Charakters“ der Tabelle I lassen sich nur 10 mit einiger Sicherheit mit bekannten Erdbeben in Zusammenhang bringen, eine immerhin beträchtliche Zahl, wenn man bedenkt, daß fühlbare Beben in München während des Jahres 1903 überhaupt nicht vorgekommen sind. Die übrigen sind aber Störungen mit ganz kleinen Amplituden, die nur während der Ruhezeit des Trambahnbetriebes wahrgenommen werden konnten. Sie können aber auch sehr kleine rasche Bewegungen magnetischen Ursprungs darstellen, mit wenigen Sekunden Schwingungszeit, so daß die einzelnen Phasen wegen der zu langsamen Bewegung des Papiers nicht getrennt werden können, die man eben erst mit den hochempfindlichen Feinregistrierungen trennen kann. Einige größere Ausschläge jedoch, so besonders Nr. 7 und 8 (Febr. 10.!), Nr. 9 (Febr. 14), Nr. 18 (April 2.), Nr. 23 (April 18.), Nr. 25 (Juni 16.!), Nr. 33 (Okt. 17.!) und Nr. 35 (Nov. 14.!) müssen wohl als rein lokale Beben angesprochen werden, da die Art der Amplituden und das Aussehen des Ausschlages nicht von magnetischen Störungen herrühren können. Es wäre also darnach zu schließen, daß unsere Gegend doch nicht so ganz erdbebenarm ist, wie man nach den direkten Wahrnehmungen folgern muß, ein Resultat, das ja durch die Aufstellung eines Wiechertschen Pendelseismometers nunmehr bald verifiziert werden kann. Bei neun Aufzeichnungen liegen Vergleichsbeben vor, welche besonders den Zusammenstellungen der Hauptstationen für Erdbebenforschungen in Straßburg i. E. und Hamburg entnommen worden sind.

Zu Nr. 17—19 sind Beben in Hechingen und auf der Alb, zu Nr. 28 und 29 in Tirol und der Schweiz allerdings ohne genaue Zeitangabe bekannt. Die Nr. 15, 38, 40 lassen sich mit Vogtländischen Beben in Beziehung bringen, es dürfte aber ein Zusammenhang doch wohl ausgeschlossen sein, ins-

besondere da andere, viel stärkere Beben nicht gefühlt worden sind und auch die Zeitangaben teilweise mangeln. Nr. 3 ist mit dem Beben in Galizien gut zu verifizieren. Bei den entfernten Beben zu Nr. 30 in Persien fehlt die Zeit; dagegen sind zu Nr. 44, 45 die Seismometerangaben fast sämtlicher Erdbebenstationen in guter Übereinstimmung.

Es mag auffallen, daß fast sämtliche Erschütterungsangaben in die Nachtstunden fallen. Es rührt dies daher, daß diese kleinen Bewegungen eben erst dann erkannt werden können, wenn der Trambahnbetrieb aufgehört hat. Ob diese Erzitterungen in der gleichen Anzahl und der gleichen Weise auch unter Tags vorkommen, kann daher nicht angegeben werden. Hierüber kann eben erst der eigentliche Seismometer Auskunft erteilen.

Pulsationen und Ausbuchtungen der Kurven.

Bei der Durchsicht der Kurven fallen, besonders an sonst ganz ruhigen Tagen, öfter kleine Erzitterungen auf, die in Form von Sinuslinien sich darstellen. Die Amplituden überschreiten kaum 2 mm, d. h. die Schwankungen gehen in Deklination höchstens bis etwa 3' und bei der Horizontalintensität bis 15 γ. Häufig sind die Oscillationen nahe gleich groß, es kommt aber auch vor, daß sie allmählig bis zu einem maximalen Ausschlag zunehmen und dann wieder abnehmen. Die Schwingungsdauer einer Oscillation liegt ungefähr zwischen 1^m und 6^m; eine genauere Zeitbestimmung läßt sich wegen der langsamen Bewegung des Uhrwerkes nicht angeben. Die Anzahl der Schwingungen ist ebenfalls ganz verschieden, oft sind es nur wenige, manchmal aber auch 20 und noch mehr, dementsprechend kann ihre Dauer von wenigen Minuten bis über eine Stunde schwanken. Meist spielt sich jedoch diese Bewegung in 10^m bis 20^m ab.

Soweit dies Phänomen beurteilt werden kann, ist es mit den von Dr. van Bemmelen[1]) bezeichneten Pulsationen und

[1]) van Bemmelen W., Erdmagnetische Pulsationen. Sonderdruck

wohl meist auch mit den von Dr. Arendt[1]) erwähnten *m*-strichförmigen Bewegungen identisch. Ich habe daher die Bezeichnung van Bemmelens benützt.

Eine andere Form von kurz andauernden Störungen der ruhigen Kurven sind kleinere und größere Ausbuchtungen. Sie unterbrechen den normalen Gang durch eine bogenförmige Linie, wonach die Kurve wieder ihre alte Richtung fortsetzt.

Tabelle Va.

Pulsationen.

Jährliche Verteilung.

Monat	Dekl.				Hor.-Int.				Gleich-zeitig in D und H
	↓	→	↑	Summe	↓	→	↑	Summe	
1903									
Jan.	3	11	3	17	1	25	15	41	12
Febr.	6	12	4	22	—	12	13	25	19
März	6	14	8	28	6	28	19	53	17
April	1	12	2	15	1	15	9	25	12
Mai	4	9	4	17	1	14	6	31	12
Juni	1	19	1	21	1	19	3	23	19
Juli	—	13	1	14	1	17	4	22	12
Aug.	1	1	2	4	2	7	2	11	2
Sept.	1	4	4	9	1	6	3	10	8
Okt.	3	2	3	8	—	3	3	6	3
Nov.	1	—	1	2	1	2	4	7	2
Dez.	—	2	2	4	—	14	13	27	4
Summen	27	99	35	161	15	172	94	281	122

aus Natuurk. Tijdsch. voon Nederlandsch-Indië. Deel LXII, Seite 71—88 mit 1 Tafel, 1902.

[1]) Arendt Th., Beziehungen der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre zum Erdmagnetismus. Das Wetter, 13. Jahrg., Seite 241—253 und 265—280, 1896.

Pulsationen. **Tabelle Vb.**

Tägliche Verteilung.

Stunde	Dekl. ↓	Dekl. →	Dekl. ↑	Dekl. Summe	Hor.-Int. ↓	Hor.-Int. →	Hor.-Int. ↑	Hor.-Int. Summe
h h								
0— 1 a	2	16	8	26	1	18	16	35
— 2	1	21	7	29	2	18	10½	30½
— 3	1	21	4	26	—	16	6	22
— 4	1	11	4	16	—	12	2	14
— 5	1	8	1	10	1	6	1	8
— 6	—	2	—	2	—	2	—	2
— 7	—	—	—	—	—	2	—	2
— 8	—	—	—	—	—	—	—	—
— 9	—	1	—	1	—	3	—	3
—10	—	1	—	1	—	3	—	3
—11	—	—	—	—	—	5	1	6
—12 M	—	—	—	—	1	3	—	4
— 1 p	—	—	—	—	—	3	—	3
— 2	—	—	—	—	—	2	1	3
— 3	—	—	—	—	1	4	—	5
— 4	—	—	—	—	—	7	—	7
— 5	—	—	1	1	1	6	1	8
— 6	1	—	—	1	1	6	3	10
— 7	2	1	—	3	1	9	—	10
— 8	2	—	1	3	—	7	7	14
— 9	4	—	2	6	2	9	9	20
—11	7	2	3	12	1	12	11½	24½
—12	3	7	2	12	1	12	12	25
— MN	2	8	2	12	2	7	13	22
Summen	27	99	35	161	15	172	94	281

Ausbuchtungen. **Tabelle VIa.**

Jährliche Verteilung.

Monat	Dekl. ↓	Dekl. ↑	Dekl. Summe	Hor.-Int. ↓	Hor.-Int. ↑	Hor.-Int. Summe	Davon gleichzeitig in D u. H
1903							
Jan.	27	10	37	18	20	38	26
Febr.	17½	7	24½	6	15	21	19
März	21½	9½	31	6	21	27	24
April	14½	13½	28	9	22	31	19
Mai	18½	4	22½	6	17	23	22
Juni	3	7	10	2	9	11	10
Juli	14½	3½	18	5	13	18	18
Aug.	13½	5½	19	4	16	20	19
Sept.	13½	8	21½	10	21	31	21
Okt.	9	5	14	6	9	15	13
Nov.	11½	1	12½	3	11	14	12
Dez.	18	7	25	11	12	23	22
Summen	182	81	263	86	186	272	225

Tabelle VI b.

Ausbuchtungen.

Tägliche Verteilung.

Stunde	Dekl.			Hor.-Int.		
	$\downarrow$	$\uparrow$	Summe	$\downarrow$	$\uparrow$	Summe
h h						
0—1 a	9	10	19	10	$16\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{2}$
— 2	$6\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$	$19\frac{1}{2}$	1	19	20
— 3	$2\frac{3}{4}$	$8\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	4	$9\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
— 4	—	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	2	5	7
— 5	$\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	7	4	4	8
— 6	2	$2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$
— 7	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	2	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
— 8	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$	1	1	2
— 9	1	—	1	—	—	—
—10	1	—	1	—	—	—
—11	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	—	2
—12 M	2	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	3	1	4
— 1 p	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$
— 2	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$
— 3	4	$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	3	1	4
— 4	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$
— 5	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
— 6	8	—	8	$1\frac{1}{2}$	7	$8\frac{1}{2}$
— 7	16	1	17	$6\frac{1}{2}$	8	$14\frac{1}{2}$
— 8	$20\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	25	7	$18\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$
— 9	27	1	28	8	16	24
—10	$27\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	29	6	22	28
—11	$24\frac{1}{2}$	9	$33\frac{1}{2}$	13	$25\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$
— MN	$23\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{4}$	34	6	27	33
Summen	182	81	263	86	186	272

Die Ausschläge können in Deklination von weniger als 1' bis 20' und mehr gehen, analog bei der Horizontalintensität von einigen γ bis über 80 γ, entsprechend ist die Dauer zwischen wenigen Minuten und mehr als zwei Stunden gelegen. Man kann flache und steile Bogen, bei zunehmenden und abnehmenden Elementenwerten unterscheiden. Es kommt auch vor, daß Zu- und Abnahme sich wellenartig wiederholen; das wichtigste dabei ist, daß nach Verlauf der Störung der normale Gang wieder einsetzt. Häufig sind damit auch die oben beschriebenen Pulsationen verbunden.

Um nun einen ersten Überblick über die Häufigkeit dieser Störungen zu erhalten, ist in den Tabellen V und VI die monatliche und stündliche Anzahl ausgeschieden worden, dabei ist für die Pulsationen unterschieden, ob die Kurve ganz ruhig war, also gleichmäßig verlief (→), oder ob eine Zunahme (↑) bezw. Abnahme (↓) der betreffenden magnetischen Elemente stattfand. Bei den Ausbuchtungen wird unterschieden, ob zuerst eine Zunahme (↑) oder eine Abnahme (↓) stattfindet. Wenn eine Ausbuchtung in zwei aufeinanderfolgenden Stunden fiel, ist in der Tabelle für jede Stunde $^1/_2$ eingeschrieben worden, bei mehr als zwei Stunden mußten noch $^1/_4$ gebucht werden.

Die Pulsationen treten in überwiegender Mehrheit bei ganz ruhigen Kurven auf und sind bei der Horizontalintensität häufiger als bei der Deklination. Doch sind sie auch bei zunehmender Intensität noch recht zahlreich, was zum Teil mit den gleichzeitigen Ausbuchtungen zusammenhängt. Ein großer Prozentsatz der Pulsationen findet fast gleichzeitig in beiden Koordinaten statt. Zuweilen kommt es auch vor, daß das eine Element Pulsationen zeigt, während bei dem anderen zur gleichen Zeit eine kleine, meist ganz flache Ausbuchtung auftritt.

Die Ausbuchtungen finden fast immer gleichzeitig in beiden Koordinaten statt. Dabei ist in mehr als zweidrittel Fällen der Sinn der Ausbuchtung der gleiche wie der der säkularen Variation; d. h. bei der Deklination überwiegt die Abnahme der westlichen Deklination und bei der Horizontalintensität die Zunahme der Intensität. Während der gewöhnlichen Störungen der Horizontalintensität findet fast immer das Gegenteil statt, nämlich eine starke Abnahme der Intensität; bei der Deklination hingegen ist der Sinn in beiden Fällen der gleiche.

In dem hier untersuchten Jahre 1903 sind in der ersten Hälfte des Jahres mehr Pulsationen aufgezählt worden, als in der zweiten; auch bei den Ausbuchtungen ist dieser Unterschied, wenn auch weniger ausgesprochen, angedeutet, was man am besten aus den Summen der Vierteljahre sieht:

	Pulsationen		Ausbuchtungen	
	D	H	D	H
I. Quartal	67	119	92	86
II. „	53	79	60	65
III. „	35	43	58	69
IV. „	14	40	51	52

Ob dieser Gang nur zufällig ist, oder ob er etwa mit der Zunahme der allgemeinen Störungen zusammenhängt, läßt sich während eines so kurzen Zeitraumes nicht entscheiden; für die Pulsationen ist aber auch in den von Bemmelen und Arendt veröffentlichten Reihen keine jährliche Periode zu erkennen.

Anders verhält es sich mit der Verteilung unter Tags. Hier fand Arendt ein Maximum zwischen $9^1/_2$ p und $10^1/_2$ p für die Jahre 1890—94; Bemmelen (1892—98) und für Zi Ka Wei (1897, 1900) ein Maximum zwischen 0^a und 1^a. Diese letztere Zeit ergibt sich auch aus dem vorliegenden Material von München für 1903. Bei den Ausbuchtungen hat das Maximum etwas vor Mitternacht stattgefunden, also zeitlich nur um weniges verschieden. Es ist klar, daß eine solch ausgesprochene tägliche Periode nur in terrestrischen Erscheinungen ihren Ursprung haben kann und man wird nicht fehl gehen, wenn man ihn in den elektrischen Vorgängen der Atmosphäre sucht. Alle hierher gehörigen Erscheinungen, wie z. B. die Halophänomene[1]), deuten auf einen innigen Zusammenhang mit den Polarlichtern hin, deren tägliche Periode für die meisten Orte der Erde ein Maximum ein bis zwei Stunden vor Mitternacht aufweist. Man braucht hiebei gar nicht an die besonders glänzenden, mit blossen Augen sichtbaren Erscheinungen zu denken, da ja Wiechert[2]) nachweisen konnte, daß die Erde in unseren Breiten auf weiten Gebieten mit einer in Polarlicht leuchtenden Schicht überdeckt ist. Die wechselnden Vorgänge

[1]) Messerschmitt J. B., Über Halophänomene. Ann. der Hydr. und Mar. Met., 28. Jahrg., S. 32—41, 1900 und Met. Zeitschr., 18. Jahrgang, S. 120—131, 1901.

[2]) Wiechert E., Polarlichtbeobachtungen in Göttingen. Met. Zeitschr., 19. Jahrg., S. 315—316, 1902.

dieses Phänomens können wohl imstande sein, die Magnetnadel in der hier beschriebenen Weise zu beeinflußen.

Man kann daher die wichtigsten Resultate der vorstehenden Untersuchungen in die folgenden Sätze zusammenfassen:

1. Die Gewitter rufen keine Veränderungen in dem Magnetismus der Erde hervor. Es verursachen nur manchmal die stärkeren Entladungen naher Gewitter ein schwaches Erzittern der Nadeln.

2. Die Erdbeben können auf zweierlei Weise die Registrierungen der magnetischen Elemente beeinflussen; einmal durch mechanische Erschütterung der Instrumente, wodurch die Nadeln in Eigenschwingungen versetzt werden, ohne daß damit eine magnetische Wirkung verbunden ist. Dann aber treten auch, in gewissen Fällen sogar recht starke, magnetische Störungen auf, die zum Teil wohl mit vulkanischen Vorgängen zusammenhängen. Diese können am besten durch Erdströme erklärt werden.

3. Im allgemeinen hat man es in München mit entfernten Erdbeben zu tun, deren Ursprung außerhalb des Landes liegt. Es kommen aber auch öfter, als man bisher vermutete, schwache lokale Beben vor.

4. Häufig wird der ruhige Gang der magnetischen Kurven durch magnetische Störungen besonderer Art, sog. Pulsationen und Ausbuchtungen, unterbrochen. Diese scheinen mit luftelektrischen Vorgängen, insbesondere auch mit den Polarlichtern in naher Beziehung zu stehen und zeigen daher eine ausgesprochene tägliche Periode.

Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreuth und seine kristalline Umgebung.

Ein Beitrag zur Kenntnis der kristallinen Schiefer.

Von Pfarrer **Glungler** in München.

(Eingelaufen 13. Mai.)

Einleitung.

Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreuth kann in Verbindung mit seiner kristallinen Umgebung als eine petrographische Provinz betrachtet werden. Sowohl die geotektonischen wie die petrographischen Verhältnisse dieses Distrikts berechtigen zu der Zusammenfassung aller einzelnen Gebirgsglieder desselben zu einer Art Einheit. Das ostbayerische Grenzgebirg, welches von der Donau bis zum Fuß des Fichtelgebirgs in der Richtung von SO nach NW hinstreicht, gliedert sich naturgemäß in den Bayerischen und in den Oberpfälzer Wald.

Der Oberpfälzer Wald wird im Süden von der Chambeintiefung, im Norden von der Gebirgseinsenkung zwischen Erbendorf, Wiesau, Waldsassen und Eger, im Westen von der Talung der Naab und im Osten von der Kammhöhe des bayerisch-böhmischen Waldgebirgs begrenzt. Es ist augenscheinlich, daß der Oberpfälzer Wald ein in sich geschlossenes Ganzes bildet, dessen Ausläufer nach Böhmen hinein sich allmählich abdachen. Es kann aber auch keinem Zweifel unterliegen, daß dieses in sich geschlossene Gebirgsglied in zwei

von einander wohl unterscheidbare Teile zerfällt. Zwei Hauptrichtungen sind es, welche das ganze „herzynische Gebirgssystem" beherrschen. Es ist die Richtung von SO nach NW, wie sie sich in der Sudetenkette und im bayerisch-böhmischen Waldgebirge ausprägt und die Richtung von SW nach NO, wie sie in der Längserstreckung des Erzgebirgs und des mährischen Mittelgebirgs sich darstellt.

Diese beiden Hauptdirektionslinien begegnen sich innerhalb des Oberpfälzer Waldes unweit Vohenstrauß, wo sie gleichsam stehen bleiben und miteinander ringen. Der Erfolg aber ist der Umschlag der einen in die andere Richtung. Eine Linie von Luhe nach Tachau gezogen, bezeichnet die ungefähre Grenze. Herrscht nördlich dieser Linie in der Schichtenstellung des Gebirges die Richtung des Erzgebirgssystems vor, so führt südlich derselben die Richtung der Sudetenkette die unbedingte Vorherrschaft.

Aber nicht bloß die geologischen, sondern auch die lithologischen Verhältnisse veranlassen und motivieren die angeführte Teilung. Anders sind die granitischen Massen des Tirschenreuther Waldes, anders diejenigen des Naabgebirges. Der „Schuppengneis", welcher das Granitmassiv zwischen Weiden und Tirschenreuth umgrenzt, ist allerdings mit dem benachbarten „Dichroitgneis" viel näher verwandt, als es nach der Darstellung Gümbels scheinen möchte; aber gewisse habituelle und strukturelle Merkmale lassen doch einen Unterschied zwischen diesen beiden Gneisvarietäten nicht verkennen. So ist die Grenzlinie Luhe Tachau wie eine Direktionslinie in geotektonischer so auch eine Demarkationslinie in petrographischer Hinsicht und das Gebiet, welches zur Untersuchung gestellt ist, kann mit Recht als eine petrographische Provinz bezeichnet werden.

Die Hauptmasse unter den Eruptivgesteinen dieses Distrikts bildet zweifellos der Granit. Ihm gegenüber spielen alle andern eruptiven Felsarten nur eine untergeordnete Rolle. Der Granit beherrscht nicht bloß den Untergrund, sondern auch die Oberflächenbeschaffenheit. Das Relief des Bodens ist ganz

wesentlich durch den Charakter dieser Gesteinsart bedingt. Die ganze Gegend muß als der Typus einer Granitlandschaft bezeichnet werden, wie sie im Mittelgebirg ausgebildet zu sein pflegt. Überall findet man kuppel- und domförmige Erhebungen; überall sanfte Gehänge und breite Rücken. Nirgends ist die Neigung des Untergrundes der Art, daß sie den Tagewässern jene Stoßkraft zu verleihen vermöchte, welche der Erosion einen Vorsprung vor der Verwitterung ermöglicht. Die Waldnaab zieht in mäandrischen Windungen um und durch das Granitmassiv mit seinen Ausläufern. Die Schlattein und die sonstigen kleineren Bäche halten ein sehr mäßiges Tempo in ihrem Lauf ein. In den Niederungen trifft man nicht selten Weiher und kleine Seen.

Neben dem Granit treten aber auch basischere Mischungen in größerer oder geringerer Mächtigkeit auf. Syenitische und dioritische Gesteine erscheinen an verschiedenen Lokalitäten. Ja selbst Gabbro und Peridotit finden sich hin und wieder. Auch effusive Bildungen sind vertreten. So durchbricht der Quarzporphyr in bald größeren, bald kleineren Kuppen den „Schuppengneis“.

Auch diese Gesteinstypen sind in ihrer Eigenart nicht ohne Einfluß auf die Bodenkonfiguration. So verdankt der Nikolaiberg bei Floß seine Höhe der Widerstandsfähigkeit des serpentinisierten Peridotits gegen die Einwirkung der Atmosphärilien, während die tiefe Einfurchung des Tales zwischen der Almesbacher Mühle und Theiseil in ursächlichem Zusammenhang mit den tektonischen Erschütterungen steht, welche die verschiedenen Quarzporphyrausbrüche als natürliche Begleiterscheinungen im Gefolge hatten. Im allgemeinen aber ist das Landschaftsbild durch die Vorherrschaft des Granits bestimmt.

Schließlich begegnet man auch allenthalben der dem stark vorwaltenden Gestein entsprechenden Ganggefolgschaft. Aplite und Pegmatite breiten sich in reichlicher Entwickelung aus. Es sind also hier nicht bloß die chemisch verschiedensten Gesteinsfamilien, sondern auch alle Arten der Eruptiv-

bildungen auf einem verhältnismäßig beschränkten Raum vereinigt. Es kann dies nicht auffallend erscheinen. Die Peridotite müssen ja als Grenzformen der Gabbrogesteine gelten. Granite und Gabbroarten sind auch sonst nicht selten vergesellschaftet. Zudem ist die Bildung von Gesteinen vom hypersauern bis zum ultrabasischen Pol hier durch die örtlichen Verhältnisse besonders veranlaßt.

Spaltungsprozesse, so schreibt Weinschenk in seinen Grundzügen der Gesteinskunde, Spaltungsprozesse in mächtigen Eruptivmassen führen oft zu einer ganz allmählichen Änderung des Gesteinscharakters, welche vom Zentrum gegen die Peripherie hin allseitig verfolgt werden kann. So tritt nicht selten die Erscheinung auf, daß der Kern eines granitischen Stockes aus einem an Plagioklas armen Zweiglimmergranit besteht, welcher durch Abnahme des lichten Glimmers und gleichzeitige Zunahme von Plagioklas zu einem normalen Biotitgranit wird. Weiterhin entwickelt sich ein plagioklasreicher Amphibolgranit, der in einen Quarzdiorit und durch Zurücktreten des Quarzes in Diorit übergeht; schließlich können selbst gabbroähnliche Gesteine die äußeren Zonen eines solchen Granitstockes einnehmen, ohne daß dabei die geologische Einheitlichkeit des ganzen Gebildes verloren geht. Man bezeichnet alle diese Modifikationen als Fazies des Granites. Besonders weitgehend pflegen solche Modifikationen dort entwickelt zu sein, wo kieselsäurereiche Gesteine, z. B. Granite, kalkreiche Gesteine durchbrechen."

Es wird sich im Laufe der folgenden Untersuchungen zeigen, wie zutreffend diese Darlegung gerade für unser Gebiet ist. Hier aber soll schon bemerkt sein, daß die genannten Gesteinstypen nicht bloß durch lückenlose Übergänge enge miteinander verbunden sind, sondern ihre Blutsverwandtschaft auch durch ihren mineralischen Bestand deutlich bekunden. Die mikroskopische Untersuchung, welche durch die chemische Analyse vollauf bestätigt wird, zeigt in all diesen Gesteinen einen ungewöhnlich hohen Gehalt an Titansäure auf. Es darf deshalb wohl als höchst wahrscheinlich angesehen werden,

daß alle diese Gesteinsfamilien einem Magmabassin entstammen.

In engster Verknüpfung mit den Eruptivgesteinen stehen die kristallinischen Schiefer der Umgebung. Diese Schiefer beteiligen sich sehr wesentlich an dem Aufbau des ganzen Gebirges. Fast alle Glieder dieser eigenartigen Bildungen kommen hier zu einer mehr oder weniger mächtigen Entwickelung. Da, wo sie die weiteste Entfaltung erreichen, zeigen sie auch die gesetzmäßige Reihenfolge, welche man anderwärts vielfach konstatiert hat. Wohl ist zuweilen der „Gneis" unmittelbar von „Glanzschiefer" überlagert, anderwärts aber schreitet die Entwicklung in strenger Gesetzmäßigkeit vom „Gneis" durch „Glimmerschiefer" zum „Phyllit", an den sich der Tonschiefer anschließt. Die Verbindung der Eruptivgesteine und der krystallinen Schiefer ist aber eine so nahe, daß man von ihr allein schon ziemlich sichere Schlüsse auf Natur und Entstehungsart der letzteren ziehen kann. Nimmt man dann noch die ganze Erscheinungsweise der Schiefer hinzu, so gewinnt man hinreichende Anhaltspunkte zu einer richtigen Beurteilung derselben. Die ganze sogenannte archäische Formationsgruppe liegt wie ein aufgeschlagenes Buch vor unsern Augen und drinnen steht gar manches bedeutsame Wort über die Genesis dieser sogenannten kryptogenen Gesteine. Wohl müssen die einzelnen Blätter dieses Buches manchmal gar unsanft umhergeworfen worden sein. Kataklastische Erscheinungen sind hier keine Seltenheit; aber niemals gewinnen dieselben eine solche Ausdehnung und Intensität, daß über die genetischen Beziehungen ernstliche Zweifel entstehen könnten.

Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreuth bietet mit seiner kristallinen Umgebung sowohl in geologischer wie petrographischer Hinsicht eine Menge höchst interessanter Erscheinungen. Die Ergebnisse der Seigerung und magmatischen Spaltung liegen vor Augen. Gesteinsverwitterung und Gesteinszersetzung lassen sich deutlich in ihrer Verschiedenheit erkennen. Der Umfang der postvulkanischen Prozesse schließt sich vor unsern Blicken auf. Die Prozesse der Kaolinisierung

und Saussüritisierung, der Serizitisierung und Serpentinisierung wie der Talkbildung haben hier ihre Spuren hinterlassen. Nichts aber scheint so beachtenswert und lehrreich zu sein, als die Wechselbeziehungen zwischen den Eruptivgesteinen und den kristallinischen Schiefern, wie sie hier zutage treten. Ihnen sollen denn auch die folgenden Untersuchungen vorzugsweise gewidmet sein.

Das Problem der kristallinischen Schiefer ist ja wohl vielfach behandelt worden. Aber es hat seinen Reiz noch nicht verloren. Man wird auch nicht sagen können, daß es bereits gelöst sei. Mit Recht erklärt Rosenbusch (Elemente der Gesteinslehre 1901, S. 478): „In keinem Gebiet der Gesteinslehre begegnet eine präzise Darstellung unserer Kenntnisse und ihre logische Ordnung solchen Schwierigkeiten, wie bei den kristallinen Schiefern. Es fehlt allenthalben an der nötigen Klarheit der Begriffe und damit der Nomenklatur. Eine solche wie durch einen Schöpfungsakt hervorzuzaubern, ist untunlich; sie muß und wird sich historisch entwickeln mit fortschreitender allgemeiner Erkenntnis und dann aus dem gefühlten Bedürfnis herauswachsen.“ Als eine Lösung des Rätsels will die folgende Abhandlung selbstverständlich nicht gelten. Aber als ein Beitrag zur Lösung desselben wird sie wohl bezeichnet werden dürfen.

Bevor indes in die Erörterung des Wechselverhältnisses zwischen den Eruptivgebilden und ihrer kristallinen Umgebung eingetreten werden kann, sind die beiden Hauptklassen der Gesteine, wie sie sich in unserm Gebiet finden, näher zu betrachten und zu schildern. Eine erschöpfende und abschließende Darstellung aller Verhältnisse ist dabei ebenso unmöglich als unnötig. Sie ist unmöglich, weil z. Z. noch nicht hinreichend gute Aufschlüsse vorhanden sind und sie ist unnötig, weil in dem Rahmen dieser Arbeit nicht sowohl die vorhandenen Gesteine an sich, als ihre gegenseitigen Beziehungen zu einander besprochen werden sollen. So unvollständig jedoch das gesammelte Beobachtungsmaterial auch sein mag, so erscheint es

doch genügend, um auf Grund desselben an die Erörterung der eigentlichen Kernfrage herantreten zu können.

Der Oberpfälzer Wald wurde bereits durch Gümbel eingehend beschrieben, auch der Zusammenhang zwischen den eruptiven Bildungen und den sie umgebenden Schiefergesteinen wurde von ihm ausführlich behandelt. Es wird sich aber zeigen, daß die Gesteinsbeschreibung dieses hervorragenden Forschers teils der Ergänzung, teils der Korrektur bedarf und daß seine Theorie über die kristallinen Schiefer doch wohl als antiquiert betrachtet werden muß. Um indes Mißverständnisse zu verhüten und allenfallsigen Verwechselungen vorzubeugen, soll bei der folgenden Darstellung die von ihm angewandte Terminologie zunächst beibehalten und nur am Schluß der Schilderung der einzelnen Gesteine und ihrer Wechselverhältnisse die abweichende Auffassung zum Ausdruck gebracht werden.

Für die mühevolle Kontrollierung und mannigfache Förderung der Arbeit spreche ich Herrn Professor Dr. Weinschenk, für die freundliche Zuweisung und Überlassung der einschlägigen Literatur Herrn Professor Dr. von Groth meinen verbindlichsten und wärmsten Dank aus.

Beschreibung der Gesteine.

Granit.

Das Granitmassiv des Tirschenreuther Waldes wird der Hauptmasse nach durch eine Linie begrenzt, welche Tirschenreuth, Falkenberg, Neuhaus, Wildenau, Plößberg, Iglersreuth, Schwarzenbach und Liebenstein miteinander verbindet. Gegen Süden springen zwei Ausläufer auf weite Entfernung vor. Der westliche, schmälere streicht gegen Leuchtenberg hin, der östliche, breitere reicht bis Neuenhammer und Georgenberg. Im Norden tritt bei Leugas ein kleiner, isolierter, granitischer Eruptivkörper zutage. Auch gegen Osten treten einzelne Granitkuppen von größerer oder geringerer Mächtigkeit hervor. Das Gesteinsmaterial dieses mächtigen Granitstockes mit seinen verschiedenen Abzweigungen

gehört zu den Zweiglimmergraniten. Es ist nicht sehr mineralreich, aber doch immerhin mineralreicher, als es nach der Darstellung Gümbels scheinen möchte.

Neben der bestimmenden Mineralkombination Quarzalkalifeldspat und Plagioklas erscheinen als glimmerige Gemengteile Biotit und Muskovit in wechselndem Verhältnis. Als Nebengemengteile finden sich fast allgemein Apatit, Zirkon und Eisenerze. An Übergemengteilen sind Titanit, Turmalin und Andalusit vorhanden. Sehr häufig trifft man Chlorit. Auch Sillimanit ist weit verbreitet. Rutil und Anatas scheinen nur Sekundärprodukte zu sein. Dagegen ist in manchen Gesteinen Hussakit als primärer Gesteinskomponent mit Sicherheit nachzuweisen.

Von den Alkalifeldspaten sind Orthoklas, Mikroklin, Albit, Perthit und Mikroklinperthit vertreten. Der Orthoklas zeigt bezüglich der Ausbildungsweise, des Glanzes und der Spaltbarkeit die in normalen Graniten gewöhnlich zu beobachtenden Erscheinungen. Er hat wie in allen Tiefen- und Ganggesteinen dieses Gebietes graulich weiße Farbe. Vielfach erkennt man jedoch deutlich einen Stich ins Bläuliche. Besonders in den Gesteinen von Altenhammer, Flossenbürg und Versdorf besitzt er eine ausgesprochen bläuliche Färbung. Der Mikroklin ist ein nicht seltener Gemengteil. Sind auch die triklinen Feldspate mit doppeltem Lamellensystem nicht alle als Mikrokline zu betrachten, so ist in vielen Schliffen jener Kalifeldspat durch die eigenartige Durchkreuzung der nach dem Albitgesetz gebildeten Lamellen so deutlich charakterisiert, daß Zweifel an seiner Identität nicht aufkommen können. Besonders reich an diesem Mineral ist der Granit von Falkenberg. Auch in den granitischen Gesteinen von Leugas und Liebenstein ist es häufig zu finden. Albit ist als selbständiges Gesteinselement sehr selten. In dem Granit von Münchsgrün konnte er jedoch mit Sicherheit nachgewiesen werden. Hier erscheint er sowohl in einzelnen Kristallen als auch als äußerste isomorphe Schicht auf zu struierten Plagioklasen. Auch in dem Granit von Ell

ist Albit anwesend. Sehr häufig findet man ihn in perthitischer Verwachsung mit anderen Alkalifeldspaten. Besonders sind die Mikrokline oft mit Albitadern reichlich durchtrümt. An Kalknatronfeldspaten ist das ganze Massiv durchaus nicht arm. Sehr häufig beobachtet man Albit-Oligoklas und Oligoklas-Andesin. Makroskopisch sind sie von den Alkalifeldspaten meist kaum zu unterscheiden. Ihre polysynthetische Zwillingsbildung und ihre leichtere Angreifbarkeit durch die Atmosphärilien machen sie zuweilen auch dem unbewaffneten Auge kenntlich. Unter dem Mikroskop aber treten sie sofort durch ihre Lamellierung nach dem Albitgesetz, mit welcher sich nicht selten auch eine solche nach dem Periklingesetz verbindet, stark hervor. Sehr häufig enthalten die Feldspate mehr oder weniger zahlreiche, zuweilen bestimmt orientierte meist aber richtungslose, nadelförmige Kristalle, welche alle Merkmale des Sillimanits an sich tragen. Besonders in den Graniten von Münchsgrün, Altenhammer und Bärnau sind derartige Einschlüsse eine oft wiederkehrende Erscheinung. Zersetzung zu Sericit ist oft wahrzunehmen; Karbonatbildung dagegen nie.

Der Gehalt an farbigen Gemengteilen schwankt in weiten Grenzen. Auch das relative Mengenverhältnis von Kali- und Magnesiaglimmer ist sehr verschieden. Im Diepoltsreuther Granit scheint der Biotit der einzige Glimmer zu sein. In den Gesteinen von Münchsgrün, Flossenbürg und Altenhammer dagegen waltet der Muskovit vor. Ausbildung, Verteilung und Farbe dieser Gesteinsbestandteile sind so normal, daß sie zu einer besonderen Bemerkung keinen Anlaß bieten. Nur die eine Tatsache soll hervorgehoben sein, daß die Zirkoneinschlüsse in den braun durchsichtigen Biotitblättchen das Phänomen der pleochroitischen Höfe mit ihren Besonderheiten bezüglich der Licht- und Doppelbrechung zuweilen in wunderbarer Vollkommenheit und Schönheit bilden.

Quarz ist meist reichlich vorhanden. Er erscheint in kompakten, unregelmäßigen Körnern von grauer Farbe, zeigt

deutlich Fettglanz und muschligen Bruch und erweist sich unter dem Mikroskop fast durchweg als letzte Ausfüllungsmasse. Nur selten begegnet man bei ihm den Spuren der Kataklase, häufig dagegen haar- und stabförmigen Kristalliten als Einschlüssen.

Die Verbreitung der Nebengemengteile ist in den verschiedenen Vorkommnissen sehr wechselnd. Eisenerz ist durchgehends nur spärlich vorhanden. Meist ist es Magnetit. In dem Granit von Altenhammer findet man auch sechsseitige Täfelchen von Eisenglanz, in dem von Diepoltsreuth Titaneisen. Apatit, welcher vielfach nicht in den sonst so häufigen langen Nadeln und prismatischen Kristallen, sondern in Körnerform auftritt, ist in dem Gestein von Münchsgrün spärlich, in dem von Diepoltsreuth reichlich zugegen. Der Zirkon ist allenthalben nicht gerade selten und besitzt die gewöhnliche Ausbildungsform. Der Hussakit, sonst schwer von Zirkon zu unterscheiden, ist in den Gesteinen von Diepoltsreuth und Liebenstein so bestimmt gekennzeichnet, daß eine Verwechselung als ausgeschlossen gelten muß.

Der Titanit ist ein hochcharakteristischer Übergemengteil aller granitischen Gesteine unseres Gebietes. Er erscheint gern in der Briefkuvertform in sehr vollkommener Ausbildung. Scharf und regelmäßig umgrenzte Individuen beherbergt besonders der Granit von Liebenstein. Turmalin und Andalusit, jener durch seine bräunliche beziehungsweise bläuliche Farbenzeichnung, dieser durch seinen bekannten Pleochroismus bestimmt charakterisiert, sind in ihrem Vorkommen naturgemäß lokal beschränkt. Beide, obwohl genetisch so sehr verschieden, haben das miteinander gemeinsam, daß sie so ziemlich ausschließlich auf der Gesteinsgrenze sich einstellen. Der Chlorit, ein sehr häufiger Gesteinskomponent, ist wohl in den meisten Fällen aus Biotit hervorgegangen. Aus dem letzteren scheidet sich auch nicht selten in feinen Nadeln Rutil aus. In dem Granit von Falkenberg erscheint dieser auch öfters in sagenitartigen Aggregaten. Anatas ist selten, aber sicher vorhanden. Der Sillimanit schließlich tritt wie als Einschluß

in Feldspat und Quarz so auch als selbständiges Glied im Gesteinsgewebe in ziemlicher Häufigkeit auf.

Für die chemische Konstitution aller Granitvorkommnisse dieses Distriktes ist der hohe Gehalt an Titan am bezeichnendsten. Die Dünnschliffe zeigen allenthalben einen unverhältnismäßigen Betrag an Titanmineralien. Und die Richtigkeit des mikroskopischen Befundes wird durch die chemische Untersuchung gewährleistet. Ein Vergleich der von Gümbel mitgeteilten Analyse des „Kristallgranits" vom Tirschenreuther Wald mit der von Rosenbusch für verschiedene granitische Gesteine aufgestellten Analysenreihe stellt dies außer Zweifel. Sonst bekunden die einzelnen Gesteinsteile eine unverkennbare Abhängigkeit von ihrer Lage innerhalb des Gesteinskörpers. Hier trägt das Gestein lichten, dort dunklen Charakter. Randliche Modifikationen in Bestand und Struktur sind insonderheit keine seltene Erscheinung. Eine schlierige Differenzierung des Eruptivmagmas zur Zeit der Injektion hat wie anderwärts, so auch hier Anlaß zu mancherlei Faziesbildungen gegeben. In dem Aufschluß von Münchsgrün treten die Glimmer und insbesondere der Biotit stark zurück. Die Kalknatronfeldspate werden seltener. Eisenerz ist kaum mehr in Spuren vorhanden. Die Orthoklasindividuen werden von Schnüren zwillingslamellierter Plagioklase durchzogen. Der Quarz bildet nicht mehr eine Art zementierender Füllmasse; augensichtlich offenbart er das Streben nach idiomorpher Umgrenzung; ja man sieht zuweilen wohlausgebildete Kristallspitzen dieses Minerals in die Feldspate hineinragen. Es liegt also eine aplitische Randfazies vor. Bei Diepoltsreuth dagegen gewahrt man eine solche von lamprophyrischem Charakter. Schöne Illustrationen für die Tatsache, daß im Verlauf des Verfestigungsprozesses in der Mutterlauge die Azidität zu- und die Basizität abnimmt, liefert der Granit von Altenhammer, in dessen Orthoklasen die Plagioklase gleichsam schwimmen und das Gestein von Münchsgrün, dessen zonare Feldspate im Kern aus Albit-Oligoklas oder noch basischeren Mischungen bestehen, während die äußere Schale sich als Albit darstellt.

Der tiefgreifende Unterschied zwischen Gesteinszersetzung und Verwitterung läßt sich gerade an dem Granitmassiv des Tirschenreuther Waldes und seinen Ausläufern trefflich studieren. Die Kaolinisierung charakterisiert sich als das Werk des ersteren, die Bildung der Vegetationsdecke als dasjenige des letzteren der beiden Vorgänge. Die Kaolinisierung des Granites ist offenbar eine bloß lokale Erscheinung. Bekannt ist das Kaolinvorkommen auf der Schmelz bei Tirschenreuth, bekannt die kaolinisierten Aplitgänge bei Wondreb. Rößler hat in seiner Abhandlung über Kaolinlagerstätten überzeugend nachgewiesen, daß diese Kaolinbildungen das Produkt postvulkanischer Prozesse sind, bei denen der atmosphärischen Verwitterung sonst kräftig widerstehende Gesteinselemente, wie z. B. der Apatit, verloren gingen. Andrerseits liefern die prächtigen Waldbestände dieses Granitgebietes, welche sogar zu Ortsnamen wie Schönficht und Hohenthann Anlaß gegeben haben, den besten Beweis für die Tatsache, daß die normale Verwitterung des Granites den Pflanzen ihren notwendigen Bedarf an Nährsalzen nicht entzieht.

Die Absonderung der granitischen Massen ist im großen und ganzen durchaus normal. Wie weit dabei die vertikalen Kluftsysteme voneinander abstehen können, zeigen die Dimensionen der Granitplatten, welche bei Flossenbürg gewonnen werden. Eigenartig hat sich der Absonderungsprozeß nur an dem Granit bei Neuhaus gestaltet, wo derselbe zu rautenförmigen Gebilden führte.

Beachtenswert und für den Zweck der vorliegenden Arbeit nicht ohne Bedeutung sind die strukturellen Verhältnisse. Im allgemeinen herrscht ja freilich die hypidiomorph körnige Struktur der Tiefengesteine bei grobem bis kleinem Korn. Charakteristisch aber ist schon die außerordentliche Neigung zum Porphyrartigen. So bilden bei Hohenwald die Karlsbader Zwillinge Individuen von 4 cm und darüber. Auch bei Versdorf und Diepoltsreuth ist ein gewisser Gegensatz zwischen Grundmasse und Einsprenglingen gar nicht zu verkennen. Gümbel unterscheidet drei Arten des Stockgranites

Er nennt sie Kristallgranit, Steinwaldgranit und Passauer Waldgranit. Ob diese Klassifikation besonders glücklich ist, mag dahingestellt bleiben; für die granitischen Gebilde des Tirschenreuther Waldes ist die Häufigkeit des Auftretens größerer und vielfach kristallographisch gut begrenzter Feldspatkristalle immerhin bezeichnend. Besonders hervorzuheben ist aber die öfters hervortretende Parallelstruktur. In dem Granit von Münchsgrün zeigen die Biotittäfelchen eine solche gleichsinnige Anordnung, daß das Gestein ein gneisartiges Aussehen gewinnt. Würde man dasselbe losgelöst von seinem Zusammenhang in völliger Isolierung finden, so könnte man versucht sein, es geradezu als „Gneis" anzusprechen. Zwar unterscheidet es sich in seinem ganzen Habitus sehr wesentlich von den in diesem Gebiet häufigen Gneisschichten. Selbst von den unmittelbar am Kontakt mit dem Granit sich befindenden Schieferlagen hebt es sich durch seine ganze Erscheinungsweise scharf ab. Aber die Parallelordnung besonders der farbigen Gemengteile ist doch so vollkommen, daß sich das Gestein als ein förmlicher Gneis darstellt. Es ist aber zweifellos nichts anderes als ein parallel struierter Granit. Ob diese Parallelstruktur ein Fluidalphänomen oder das Produkt einer Resorption des Nebengesteins ist, ist mit Sicherheit kaum zu entscheiden. Die Anwesenheit des Andalusits in diesem Gestein macht das letztere wahrscheinlich. Die Gegenwart dieses Tonerdesilikates deutet darauf hin, daß einzelne Schollen der angrenzenden Schiefer in das schmelzflüssige Granitmagma hineingesunken und von diesem aufgelöst worden sind. Es ist also anzunehmen, daß in dem gneisartigen Granit lediglich eine Resorptionsschliere vorliegt. In keinem Fall aber hat man es hier mit einem metamorphen Gebilde in dem Sinne zu tun, indem man dieses Attribut den sogenannten kristallinen Schiefern beilegt. Nach Rosenbusch sind die kristallinen Schiefer unter wesentlicher Mitwirkung geodynamischer Phänomene zu geologischer Umgestaltung gelangte Eruptivgesteine oder Sedimente. Jenes Gestein vereinigt die Merkmale der Kristallinität mit denen der Schiefrigkeit. Es hat

aber keinerlei Metamorphose erfahren. Eine unveränderte, primäre Bildung ist es also nicht zu den kristallinen Schiefern zu rechnen.

Aplit und Pegmatit.

Die aplitischen Ganggesteine sind in dem Gebiet des Tirschenreuther Waldes und seiner Umgebung überaus stark verbreitet. Wo immer größere Gesteinsmassen aufgeschlossen sind, sieht man die Aplite in schmäleren oder breiteren Bändern das Hauptgestein durchsetzen, von dem sie sich durch die wesentlich lichtere Färbung abheben. Man begegnet ihnen teils in dem Eruptivgestein, zu dessen Ganggefolgschaft sie gehören, teils aber auch in dem Nebengestein der Eruptivbildungen. Im Granit, im Syenitgranit oder Quarzmonzonit, ja selbst in dem Hornblendeschiefer oder Hornblendegabbro sind sie zu treffen und der angrenzende „Gneis" ist vielfach durchzogen und durchtränkt von aplitischen Adern. Das Gestein zeigt allerwärts die normale Ausbildung und gibt zu besonderen Bemerkungen wenig Anlaß. Bei der weiten Verbreitung desselben und seinen engen Beziehungen zu den kristallinen Schiefern des vorliegenden Gebietes muß aber doch eine kurze Besprechung angemessen erscheinen.

Das Gestein besteht im wesentlichen aus einem feinkörnigen Gemenge von Alkalifeldspat und Quarz. Neben Orthoklas tritt Mikroklin mit ausgezeichneter Gitterstruktur, Mikroperthit und Albit auf. Zu den herrschenden Alkalifeldspaten gesellen sich stets sauere Plagioklase. Albit-Oligoklas, Oligoklas-Andesin, ja sogar Andesin konnten nachgewiesen werden. Der Quarz behauptet meist die unbedingte Vorherrschaft; manchmal jedoch tritt er auch so zurück, daß das Gestein mehr den Charakter des Syenitaplits erhält. Die Glimmer können kaum mehr als wesentliche Gemengteile bezeichnet werden. Muskovit ist zwar überall anwesend, aber doch nur in geringer Menge; der Biotit aber fehlt in manchen Vorkommnissen vollständig. Der Apatit erreicht zuweilen ansehnliche Größe, ist aber ebenso wie der Zirkon

wenig häufig. Eisenerze sind nur in geringen Quantitäten, manchmal überhaupt nicht vorhanden. Ein häufiger Übergemengteil ist dagegen der Turmalin. Besonders in dem „Gneis" von Tirschenreuth begleitet er gern die Aplite. Bald sind kleine, braune oder auch grünliche und blaugrüne Kriställchen zu größeren oder kleineren Gruppen zusammengehäuft bald auch einzelne bedeutendere Individuen mit deutlicher hemimorpher Umgrenzung im Gesteinsgewebe zerstreut. Neben Turmalin findet sich auch gar nicht selten Granat in verschieden großen Körnern mit ganz unregelmäßigen Konturen, zuweilen förmliche Perimorphosen bildend. Endlich stellt sich auch Topas hin und wieder ein.

Die Strukturverhältnisse bedürfen um so weniger einer eingehenden Erörterung, als sie bei der Beschreibung der aplitischen Randzone des Münchsgrüner Granits genügend gekennzeichnet worden sind.

Für die Widerstandsfähigkeit des Aplits gegenüber den umwandelnden Prozessen liefert der Syenitgranitbruch bei Hardt eine vorzügliche Illustration. Durch die lockeren Massen von Verwitterungsgrus, in welchen die einzelnen Quarzmonzonitblöcke eingebettet liegen, zieht sich skelettartig das Netzwerk der Aplitadern hindurch. Wie ein festes Rückgrat stehen diese Gangfüllungen da, die sandiggrusigen Steilwände haltend und tragend.

Vergesellschaftet mit diesen aplitischen Bildungen sind vielfach auch pegmatitische Gänge. In dem Bahneinschnitt bei Bärnau z. B. treten beide miteinander auf, wo sie den prächtig aufgeschlossenen Gneis in der Weise durchsetzen, daß der Pegmatit die randliche Lage hat und in fast horizontaler Richtung hinstreicht, während der Aplit mehr saiger gestellt ist. Auch in dem Gneis von Tirschenreuth sind Aplit und Pegmatit enge verknüpft. Sie sind immer stofflich, mineralisch und strukturell so nahe miteinander verwandt, daß eine ausführliche Beschreibung des letzteren nach der Schilderung des ersteren überflüssig erscheint. Beide bekunden den höchst saueren Charakter, beide führen die bor-fluor- und

chlorhaltigen Übergemengteile, beide zeigen die Unbeständigkeit in der relativen Menge der einzelnen Gesteinselemente; und ist für die Pegmatite der Mangel einer gesetzmäßigen Sukzession in der Bildung der verschiedenen Gemengteile charakteristisch, so liegt in der panidiomorphen Strukturform der Aplite die entsprechende bezeichnende Eigenschaft vor; und endlich hat die gesetzmäßige Verwachsung der beiden Hauptkomponenten in den schriftgranitischen Pegmatiten ihr Analogon in der poikilitischen Durchdringung der Feldspate mit Quarzkörnern und den myrmekitischen und granophyrischen Strukturtypen bei den Apliten. So bleibt schließlich als unterscheidendes Merkmal nur noch die Korngröße und die in unserem Untersuchungsgebiet nicht selten wahrzunehmende bläuliche Färbung der Feldspate. Pegmatite mit großkörniger Ausbildung finden sich an verschiedenen Lokalitäten. Außer dem Vorkommen von Tirschenreuth ist besonders dasjenige an der Straße von Plößberg nach Wildenau zu nennen. In jenem zeigen sich auf den basischen Spaltflächen der Feldspate die eckigen Durchschnitte der Quarzstengel oft in vorzüglicher Deutlichkeit; in diesem sind die ungewöhnlich großen Muskovitindividuen durch eine federförmige Kannelierung ausgezeichnet.

Über die Abhängigkeit dieser aplitischen und pegmatitischen Gangbildungen von dem Nebengestein, wie sie sich in der Granatentwickelung Ausdruck gibt, wird später eingehender zu reden sein.

Granulit.

Der Granulit Gümbels tritt innerhalb unseres Territoriums an den verschiedensten Orten auf. Er findet sich in der Nähe von Schlattein, an der Straße von Plößberg nach Wildenau unweit des erstgenannten Dorfes, am Edenbach, bei Holzmühle am Heiligen Bach, unfern Bärnau, bei Altglashütten und verschiedenen anderen Orten. Immer ist es jedoch nur ein beschränktes Gebiet, über das sich dieses Gestein erstreckt. Nur bei Bärnau gewinnt es eine größere

Ausdehnung. Der Aufschluß aber bei „Unser Herrgott auf der Wies", welchen Gümbel gezeichnet hat, läßt erkennen, welch mannigfaltige Gesteine auf diesem Granulitgebiet vereinigt sind.

Gümbel gliedert die Granulite in Granat- und Turmalingranulite. Diese Teilung ist indes in der Natur keineswegs streng durchgeführt. Wohl waltet in den Gesteinen von Bärnau der Granat vor, aber in dem sogenannten Schörlgranulit von Plößberg sind Turmalin und Granat zugleich reichlich vertreten. Auf keinen Fall ist es erforderlich, die durch mannigfache Zwischenglieder miteinander verbundenen Varietäten in der Beschreibung auseinander zu halten.

Granulit ist nach Rosenbusch bei typischer Ausbildung ein glimmerfreies und granathaltiges, deutlich schiefriges bis dünnschiefriges Gneisgestein. Auch Gümbel nennt die Granulite eine dem Gneis verwandte Gesteinsgruppe. Der Granulit unseres Distrikts aber steht zwar allewege mit „Gneis" in innigster Beziehung, unterscheidet sich aber von diesem doch sehr wesentlich. Mineralbestand, Struktur und Vorkommen verbieten, ihn als eine Art Gneis zu betrachten. Die „Gneise" dieses Gebietes führen allenthalben viel Tonerdesilikate; ja nicht selten enthalten sie auch Aluminate. Im Granulit treten diese sehr stark zurück. Dagegen deckt sich der Mineralbestand so vollkommen mit dem der Aplite, daß eine Beschreibung desselben unnötig ist. Selbst die charakteristischen Übergemengteile sind in den beiden Gesteinssorten die gleichen. Die „Gneise" sind allerwärts, soweit sie nicht hornfelsartig ausgebildet sind, durch wohl erkennbare Schichtstruktur charakterisiert. Der Granulit läßt dieselbe vermissen. Gümbel spricht zwar von einem mehr oder weniger deutlichen Schiefergefüge, es ist aber zu bemerken, daß allerorten nur das weniger deutliche wahrgenommen werden konnte. Beim Hammerschlag scheint es manchmal, als ob nach bestimmten Richtungen das Gestein leichter spaltete; aber von einer eigentlichen Schichtstruktur war nirgends etwas zu finden. Dagegen zeigt sich in allen Vorkommnissen die structure granulitique in typischer

Ausprägung. Nirgends beobachtet man besser als hier die Tendenz des an mikrolithischen Bildungen reichen Quarzes nach selbständiger Formenentwickelung. Schließlich spricht auch die geologische Verknüpfung dieses Gesteins mit seiner Umgebung gegen die Zusammenstellung desselben mit den Gneisgebilden. In der Nähe von Plößberg setzt ein schmaler, kaum handbreiter Gang im „Gneis" auf. Er durchsetzt in diskordanter Lagerung das Nebengestein. Dieser Granulitgang weist eine geradezu überraschende Ähnlichkeit mit den Aplitgängen von Geyer in Sachsen auf. Es ist dasselbe feine Korn, es ist dieselbe lichtgraue Farbe, es sind dieselben wohl ausgebildeten Turmalinsonnen, welche sich in beiden Gesteinen finden. Die mineralische Zusammensetzung, das innere und äußere Gefüge und das Auftreten sprechen also dafür, daß der Granulit dieses Gebietes nicht mit „Gneis", sondern mit Aplit identisch ist. Es soll nicht bestritten werden, daß andere Granulitvorkommnisse sich als eine Gneisabart darstellen. Aber der im nördlichen Oberpfälzer Wald auftretende Granulit ist nichts anderes als Aplit. Wenn er vielfach in konkordanter Lagerung mit Gneis erscheint, so ist dies natürlich ebensowenig ein Beweis gegen seine eruptive Natur als die Beeinflussung des Auftretens des Syenitgranits oder Quarzmonzonits durch die Schichtenstellung des Gebirges gegen dessen Erstarrung aus Schmelzfluß. Es muß also dieser Granulit ebenso wie der Münchsgrüner gneisartige Granit aus der Reihe der „kristallinen Schiefer" ausgeschaltet werden.

Quarzporphyr.

Im Osten von Weiden hat der Bach, welcher von Theiseil zur Almesbacher Mühle in munterem Laufe herabeilt, eine tiefe Talrinne quer in das Westrandgebirge, das gerade hier durch geotektonische Vorgänge stark erschüttert war und in seinem Gefüge tiefgehende Störungen erlitten hatte, eingefurcht. Zu beiden Seiten steigen die Talwände so steil an, daß sie den Eindruck einer Hochgebirgslandschaft hervorrufen. So-

wohl links als rechts vom Bach treten an verschiedenen Punkten der Gehänge die Felsen des Quarzporphyrs hervor. Auch in der Richtung gegen Irchenreuth, Edelsdorf und Letzau erheben sich vereinzelte Quarzporphyrkuppen. Am mächtigsten aber ist die genannte Felsart an den Rändern des angeführten Tales entwickelt. Da das Baumaterial für das neue Gymnasium in Weiden hier gebrochen wird, so ist das Gestein vorzüglich aufgeschlossen.

Der Quarzporphyr enthält in einer dichten bis feinkörnigen, graugrünen bis bräunlichen Grundmasse von flachmuschligem bis erdigem Bruch Einsprenglinge von Alkalifeldspaten, mehr oder weniger Kalknatronfeldspaten und Quarz; daneben auch solche von Biotit in wechselnder Menge. Die Feldspate unterscheiden sich von denen der Granite durch ihre rötlichbraune Farbe und ihren mehr isometrischen Bau, sie teilen aber mit diesen die Neigung zur Zwillingsbildung nach dem Karlsbader bezw. Albitgesetz. Der Orthoklas ist in manchen Vorkommnissen von Albitschnüren perthitisch durchzogen. An Kalknatronfeldspaten konnten Albit-Oligoklas und Oligoklas-Andesin nachgewiesen werden. Die Quarzeinsprenglinge zeigen die gewöhnlichen Erscheinungen. Der Biotit bildet sehr ansehnliche Tafeln, ist jedoch meist nur da frisch, wo er von Quarz umschlossen wird. Wo er frisch geblieben ist, hat er tiefbraune Farbe, sonst erscheint er lichtbraun, goldgelb und grünlich. Bei der häufigen Umwandlung in Chlorit scheiden sich gern Rutilnädelchen aus. An Nebengemengteilen sind mehr oder weniger reichlich Zirkon und Apatit vertreten, welche nicht selten erhebliche, ja ungewöhnliche Dimensionen erreichen. Eisenerze sind nicht vorhanden. Das bei der Limonitbildung auftretende Eisen scheint aus dem Glimmer zu stammen. In einer Gesteinsprobe konnte auch ein stark umgewandelter Cordierit-Durchkreuzungsdrilling konstatiert werden. Chlorit und Anatas wie die nicht seltenen Karbonatbildungen sind wohl durchgehends Sekundärprodukte.

Die Grundmasse besteht aus einem Gemenge von Feld-

spat und Quarz mit viel Muskovit oder Sericit. Die Einwände Gümbels können unmöglich mehr als stichhaltig gelten. Die Struktur ist sehr ausgeprägt porphyrisch. Die den kieselsäure- und alkalireichen Ergußgesteinen eigentümlichen sphärischen Aggregationsformen finden sich auch in diesem Quarzporphyr. Die kugeligen Gebilde in demselben lassen sich freilich weder hinsichtlich ihrer Größe noch ihrer Homogenität mit den Sphäroiden mancher Liparite vergleichen. Aber sie sind doch noch sehr deutlich. Daß die Einsprenglinge der porphyrischen Gesteine noch während der Ergußperiode weiterwachsen, dafür liefert gerade dieser Quarzporphyr unzweifelhafte Belege. Die kleinen Quarzausscheidungen innerhalb der Grundmasse zeigen in der Nähe der Einsprenglinge vielfach genau dieselbe Orientierung wie diese.

Das Gestein ist auch in dem begrenzten Gebiet, welches untersucht wurde, nicht überall gleich. Gümbel teilt die Porphyre des ostbayerischen Grenzgebirges in Quarzporphyr, Regen- oder Pinitporphyr und Pechsteinporphyr. Die porphyrischen Gebilde östlich von Weiden rechnet er zum Quarzporphyr. Pechsteinporphyre scheinen hier in der Tat nicht vorzukommen. Wenigstens konnte in keiner Gesteinsprobe eine hyaline Ausbildung der Grundmasse wahrgenommen werden. Dagegen zeigen die untersuchten Gesteinsproben zuweilen eine augensichtliche Annäherung an die sogenannten Regen- oder Pinitporphyre. Das unterhalb Tröglersricht aus einem Steinbruch an der Straße von Weiden nach Vohenstrauß gesammelte Material scheint noch den reinsten Typus des Quarzporphyrs im Sinne Gümbels darzustellen. Es ist allerdings nicht richtig, daß dieses Gestein bloß eine Klasse von Feldspat beherberge. Wenn Gümbel sich von der Anwesenheit einer zweiten Feldspatspezies bei dieser Porphyrart nicht überzeugen konnte, so mußte dies nur in einer gewissen Mangelhaftigkeit der Untersuchung oder des Materiales begründet sein. Es sind in diesem Gestein zweifellos neben Orthoklas auch Plagioklase vorhanden. Man beobachtet im Dünnschliff nicht allzu selten trikline Feldspate mit feinster polysynthetischer

Zwillingsbildung. Auch Plagioklase mit doppeltem Lamellensystem zeigen sich und gar manches Mal sieht man lamellierte Feldspate eingeschlossen in Orthoklas. Aber das steht fest, daß in diesem Gestein die Kalknatronfeldspate ebenso hinter die Alkalifeldspate zurücktreten wie die farbigen Gemengteile bis zum Verschwinden selten werden. Es sind offenbar kieselsäure- und alkalireiche, an den Oxyden der bivalenten Metalle aber arme Gesteine. Auch Apatit ist äußerst spärlich und Titanmineralien sind kaum zu sehen. Es kann also auch Phosphor- und Titansäure nur in sehr geringen Mengen vorhanden sein. Ganz anders dagegen ist der Gesteinstypus an anderen Lokalitäten. So zeigt das Gestein in dem Kellerschen Bruch unfern Theiseil einen von jenem durchaus verschiedenen Charakter. Die Kalknatronfeldspate nehmen zu: große Blätter von Biotit treten auf; Apatitnadeln werden häufig, Anatas erscheint in großer Menge; an einer Stelle finden sich auch Pseudomorphosen von Pinit nach Cordierit. Und mit dieser Änderung im mineralischen und damit zugleich im chemischen Bestand gehen strukturelle Modifikationen Hand in Hand. Der Hiatus zwischen der intratellurischen und der Effusionsperiode gibt sich ja wohl überall in einem scharfen Gegensatz von Einsprenglingen und Grundmasse zu erkennen. Übergänge von der porphyrischen zur körnigen Struktur finden sich nicht. Aber dies schließt doch gewisse Unterschiede in der Struktur nicht aus. In den Gesteinen von Theiseil nimmt nicht bloß die Korngröße erheblich zu, so daß die Feldspate Dimensionen von 2 cm und darüber erreichen, sondern es zeigen sich in der Grundmasse auch ausgeprägte mikrogranitische und granophyrische Strukturformen. Daneben steigert sich auch die Erosionswirkung des kristallisierenden Magmas. Die Änderungen in Bestand und Struktur sind indes zwar innig miteinander verbunden, aber nicht gegenseitig bedingt. Der Wechsel im Gefüge ist nicht sowohl in der Verschiedenheit des Bestandes als in der Lage der einzelnen Gesteinsteile innerhalb des Gesteinskomplexes begründet. Die untersuchten Proben aus der Nähe des letzt-

genannten Ortes stammen aus beträchtlicher Tiefe und die angeführten Struktureigentümlichkeiten sind wohl durch die in derselben länger erhalten gebliebenen Molekularbeweglichkeit veranlaßt. Der letztgeschilderte Gesteinstypus hat offenkundig sehr viele Ähnlichkeit mit dem von Gümbel als Regen- oder Pinitporphyr bezeichneten Gestein. Will man ihn nicht geradezu dieser Varietät zurechnen, so muß man ihn wenigstens als granitporphyrische Zentralfazies von dem typischen Quarzporphyr abtrennen. Bemerkenswert sind bei diesem Gestein aber auch noch die Änderungen, welche es in der metasomatischen Periode seiner Geschichte erfahren hat.

Selbst in bedeutender Tiefe lassen ganz frisch abgesprengte Blöcke weitgehende Spuren der Verwitterung und Zersetzung erkennen. Es muß durch mächtige Bodenerschütterung eine solche Zermalmung des Gesteinskörpers stattgefunden haben, daß die umwandelnden Agenzien ausgedehnte und zahlreiche Angriffsoberflächen vorgefunden haben. Karbonatbildung, Chloritisierung und Sericitisierung sind hier in großem Umfang zu beobachten. Bei der ersteren hat sich Magnesit und Kalzit zugleich entwickelt. Beide sind ja freilich im Dünnschliff schwer voneinander zu unterscheiden; aber wenn Chloritblättchen ganz angefüllt sind von Karbonat, so liegt wohl kohlensaure Magnesia vor, während die in den Feldspaten angesiedelten Karbonate als kohlensaurer Kalk zu betrachten sind.

Für die Beurteilung des Verhältnisses des Ergußgesteines zu den durchbrochenen Schiefern endlich scheint die Cordierit- bezw. Pinitbildung nicht ohne Belang zu sein.

Syenitgranit.

Der Syenitgranit ist ein wegen seiner technischen Verwendbarkeit sehr geschätztes Gestein. Es ist in jenem Gebiete sehr verbreitet. Zwar haben die einzelnen Vorkommnisse immer nur verhältnismäßig geringe Ausdehnung. Sie bilden meist nur ganz schmale Zonen. Aber sie stellen sich doch sehr häufig ein. Der Distrikt zwischen Wondreb und Bärnau ist be-

sonders reich an diesem Gesteinstypus. Eine ganze Reihe von Syenitgranitzügen finden sich hier, mehr oder weniger parallel geordnet, auf beschränktem Raum vereinigt. Aber auch das Westrandgebirge ist nicht arm an dieser Felsart. Ein langer Streifen zieht sich von Pfaffenreuth über Ilsenbach gegen Gailersreuth hin. Bei Wilchenreuth bildet der Syenitgranit einen Zug von sehr geringer Mächtigkeit, aber recht erheblicher Längenausdehnung. Auch zwischen den beiden nach Süden ausgestreckten Granitflügeln gehen schmale Syenitgranitgänge zutage. So bei Kalmreuth, Hardt und Goldbrunn. Endlich mag auch noch des inselartigen Vorkommens bei Ödschönlind Erwähnung geschehen. Im Bärnauer Gebirge folgen diese Syenitgranitzüge der Richtung des Erzgebirgssystems, im Westrandgebirge aber der Direktionslinie des herzynischen Gebirges im engeren Sinn. Im allgemeinen aber zeigt sich bei all diesen verschiedenen Vorkommnissen große Übereinstimmung. Gümbel teilt allerdings die Syenitgranite in die drei Varietäten: Kugelsyenitgranit, porphyrartiger und aphanitischer Syenitgranit. Allein die letztere Spielart, von der ein Vorkommnis aus der Gegend von Ellenfeld untersucht wurde, scheint infolge der Basizität ihrer Feldspate und der ungewöhnlich starken Anreicherung der dunklen Bestandteile dem Hornblendegabbro näher zu stehen als den Graniten und Syeniten, und was die zweite Abart anlangt, so stellt dieselbe in der Hauptsache lediglich eine strukturelle Modifikation der ersten dar. In unserem Gebiete sind beträchtliche Abweichungen von dem Grundtypus nirgends zu konstatieren.

Was den Syenitgranit den granitischen Gesteinen gegenüber vorzugsweise charakterisiert, das ist die Häufung der dunkleren Farbentöne. Als wesentliche Gemengteile sind neben den verschiedenen Feldspaten, welche im großen und ganzen die Verhältnisse bei den Graniten wiederholen, Biotit, eines oder mehrere Glieder der Pyroxenfamilie und Hornblende zu nennen. Quarz ist überall vorhanden, tritt jedoch meist stark zurück. Als Nebengemengteile erscheinen verschiedene Eisenerze, Apatit und Zirkon. An Übergemengteilen ist

das Gestein nicht arm. Titanit und Orthit sind beide reichlich vertreten. Chlorit, Kalzit, Zoisit, Leukoxen, Rutil und Anatas sind wohl nur sekundäre Bildungen. — Das relative Mengenverhältnis zwischen den Alkali- und Kalknatronfeldspaten schwankt nur in engen Grenzen. Wohl überall herrscht der letztere vor. Gümbel behauptet allerdings, daß in diesem Granit der Orthoklas immer weitaus das Übergewicht über den klinoklastischen Feldspat behalte, aber in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, ist dieser Satz gewiß unrichtig. Dies geht doch schon aus der einfachen Tatsache hervor, daß selbst in dem porphyrartigen Syenitgranit von Hohenstein nach Gümbel der Natrongehalt 4,988 % beträgt, während der Gehalt an Kali sich nur auf 0,200 % beläuft. Die Täuschung ist wohl durch den Umstand veranlaßt, daß der Orthoklas, wie die mikroskopische Untersuchung mit der höchsten Evidenz erhärtet, vielfach die Umhüllung, der Plagioklas dagegen den Kern der Feldspate bildet. So erklärt sich auch leicht die Tatsache, daß die Orthoklasanalysen vielfach einen nicht unbeträchtlichen Gehalt an Kalk- und Baryterde aufweisen, sowie die Erscheinung, daß die Verwitterung gern im Zentrum der Feldspatindividuen einsetzt. Bei den gleichmäßig gemengten Gesteinen unseres Distriktes vollends steht die Vorherrschaft des Plagioklases außer Zweifel. Im übrigen soll nach der ausführlicheren Schilderung der Feldspate in dem Granit nur noch erwähnt sein, daß sich dem Auge des Beobachters eine besonders hübsche Erscheinung bietet, wenn Plagioklase mit doppeltem Lamellensystem als Einschlüsse in solchen mit einfachem auftreten. — Der Biotit hat in diesem Gestein allgemeine Verbreitung. Im auffallenden Lichte erscheint er schwärzlichbraun mit starkem metallischen Glanz; unter dem Mikroskop wird er mit brauner Farbe und deutlichem Pleochroismus durchsichtig. In dem Vorkommnis von Kleinklenau bildet er ansehnliche Tafeln, welche vorzüglich einspiegeln, sonst tritt er meist in kleinen Individuen auf, welche nicht selten zu putzenförmigen Haufen geordnet sind. Manchmal bildet er eine Art Strukturzentrum, um das sich die anderen

Gemengteile herumlegen. Lamellare Verwachsung mit Chlorit ist nicht selten. Das Mineral-Assoziationsgesetz, nach dem in den Eruptivgesteinen sich der Kaliglimmer nicht als primärer Gemengteil neben Pyroxen und Hornblende finden soll, findet im allgemeinen in dem Syenitgranit seine Bestätigung. In dem Gestein von der letztgenannten Fundstätte jedoch konnte Muskovit in Verbindung mit den angeführten Metasilikaten nachgewiesen werden. In gleicher Häufigkeit wie der Biotit tritt auch die Hornblende auf. Sie zeigt durchweg starke Absorptionsunterschiede. Parallel c ist sie blaugrün, parallel b schmutziggrün, parallel a lichtgrün bis farblos. Ob sie immer primärer Gemengteil ist, kann kaum entschieden werden. In manchen Fällen ist sie zweifellos aus Pyroxen hervorgegangen. Die Vorkommnisse von Ilsenbach lassen die fortschreitende Uralitisierung erkennen. Wenn in den Gesteinen von Ödschönlind und Hardt Pyroxen nicht nachgewiesen werden konnte, so hat dies vielleicht nur in der bereits vollzogenen Umwandlung seinen Grund. In anderen Gesteinen ist Pyroxen ohne Zweifel vorhanden. Er ist schwach pleochroitisch und scheint dem Salit nahe zu stehen. Der Quarz liefert durch seine Ausbildung auch hier den Beweis, daß die Reihenfolge der Ausscheidungen aus dem kristallisierenden Magma nicht eine Funktion der Schmelzpunkte ist. Nicht selten aber erscheint er in gesetzmäßiger Verwachsung mit Feldspat. Sehr häufig begegnet man bei ihm den Spuren mechanischer Deformationen. In Reihen geordnete oder sporadisch zerstreute Flüssigkeitseinschlüsse findet man bei ihm wie in dem Quarz der normalen Granite. Die häufigen Nebengemengteile Magnet- und Titaneisen nehmen oft ansehnliche Dimensionen an. Letzteres, oft in schmalen Leisten auf den Spaltflächen des Biotits auftretend, ist manchmal ganz umrahmt von einem Kranz von Titanit, während der Magnetit öfters von einem Eisenoxydstreifen begrenzt wird. Der in großer Häufigkeit sich einstellende Magnetkies bildet auf den Kluftflächen der Gesteine zuweilen förmliche Überzüge und Spaltenausfüllungen; der nur wenig seltenere Pyrit ist meist durch gute kristallographische Be-

grenzung ausgezeichnet. Der häufigste Nebengemengteil aber ist der Apatit. Manche Schliffe weisen einen geradezu auffallenden Reichtum an diesem Mineral auf. Hinsichtlich seiner Ausbildung verdient hervorgehoben zu werden, daß er in dem Syenitgranit seltener in Körnerform auftritt als in dem Granit. Terminale Flächen sind bei ihm ebenso häufig wahrzunehmen, als bei dem weit verbreiteten und meist hochgradig idiomorphen Zirkon. Daß beide Mineralien oftmals als Einschlüsse in den älteren Gesteinskomponenten erscheinen, bedarf kaum der Erwähnung. Der ungemein oft erscheinende Titanit, im allgemeinen demjenigen des Granits gleich, zeigt in diesem Gestein seinen Pleochroismus von rötlichbraun zu fast farblos licht sehr schön. Nicht so häufig, aber doch auch gar nicht selten, ist der zweite Übergemengteil. In den Gesteinen von Ilsenbach konnte der Orthit nicht entdeckt werden; ebensowenig in denen von Gailersreuth; dagegen ist er in allen anderen reichlich vorhanden. Manchmal erscheint er in einfachen, manchmal in Zwillingskristallen; am meisten bildet er mehr oder weniger gerundete Körner. Seine verhältnismäßig große Auslöschungsschiefe gibt sich oft in der deutlichen Wahrnehmbarkeit der Zwillingsbildung kund. Zuweilen ist ein zonarer Aufbau unverkennbar. Die Farbenabtönung wechselt von gelblichbraun zu grünlichbraun. Die gesetzmäßige Sukzession der Mineralbildungen findet in einem Vorkommnis einen trefflichen Ausdruck, indem ein Orthitkorn von Biotit und dieser wieder von einem zonar struierten Plagioklas umschlossen wird. Zersetzungs- und Verwitterungserscheinungen offenbaren sich hin und wieder in Zoisit- und Karbonatbildung. Daß in Gesteinen, welche so reich an Titanit, Orthit, Hornblende, Biotit und Zirkon sind, das Phänomen der pleochroitischen Höfe sehr häufig auftritt, muß als selbstverständlich gelten. Erwähnung aber verdient doch die Tatsache, daß die Doppelbrechung in jenen Höfen so stark zunimmt, daß die Interferenzfarbe sich zuweilen um *eine* halbe Farbenordnung erhöht. Über das Auftreten des Chlorits und Rutils kann füglich mit Stillschweigen hinweggegangen werden.

Der Mineralbestand, welcher durch das Zurücktreten des Quarzes und die Anreicherung der farbigen Gemengteile gekennzeichnet ist, läßt hinsichtlich des chemischen Typus für den Syenitgranit gegenüber dem normalen Granit einen wesentlich basischeren Charakter erwarten. Die von Gümbel mitgeteilte Analyse des Gesteines an der großen Arberhütte, welches von ihm als sehr ausgeprägt nach dem normalen Typus des Kugelsyenitgranits bezeichnet wird, bestätigt jene Annahme, indem sie einen Kieselsäuregehalt von 57,500 % konstatiert. Bezeichnend für den chemischen Bestand ist auch bei diesem Gestein der nach der Fülle von Titanmineralien zu erwartende hohe Gehalt an TiO_2, welcher auf 1,310 % berechnet ist.

Sehr bemerkenswert sind bei diesem Gesteinstypus die Strukturformen. Und unter diesen verdienen zwei ganz besondere Beachtung. Es ist die Kataklasstruktur und die kugelige Ausbildung. In keiner Felsart dieses ganzen Gebietes sind die kataklastischen Erscheinungen von solcher Ausdehnung und Intensität wie in dem Syenitgranit. Die Apatitnadeln sind zerbrochen, die Feldspate vielfach zerrissen, die Hornblenden verbogen, die Glimmermineralien geknickt. Ein Biotitblättchen zeigt einmal nicht weniger als zehn Knickungen. Die undulöse Auslöschung tritt nicht bloß beim Quarz hervor, sondern auch bei Feldspat, Glimmer und Hornblende. Die Mörtelstruktur ist zuweilen vorzüglich ausgebildet. Kurz dieser Syenitgranit veranschaulicht die mechanischen Strukturordnungen in der schönsten Weise. Nicht minder bedeutsam sind die sphäroidalen Entwickelungsformen dieser Gebirgsart. „Es ist eine besondere Eigenart dieses Syenitgranites, schreibt Gümbel, nicht in bankartiger Absonderung, wie sie gewöhnlich bei dem Granit vorkommt, sondern in großen kugelschaligen Partien ausgebildet zu sein, deren innerster fester Kern sich durch Verwitterung der äußeren Schale an der Oberfläche nach und nach herausschält. Man kann daher keine regelmäßigen Steinbrüche behufs Gewinnung dieses Materiales anlegen, weshalb schöne große Stücke sehr selten zu erlangen sind.“ Damit ist im allgemeinen die Ausbildungs-

kristallisierten, durch die freiwerdenden Gase eine Steigerung des Druckes eintreten mußte und daß mit der teilweisen Kristallisation des Magmas auch Diffusionsvorgänge und dadurch erzeugte Strömungen notwendig verbunden waren, so begreift sich die oben geschilderte Zertrümmerung und Knickung der anfänglich gebildeten, meist höchst idiomorphen Kristallindividuen bei den immerhin beträchtlichen Dimensionen der syenitgranitischen Massen nicht schwer. Es scheint sich die Bildung dieser letzteren unter ähnlichen physikalischen Bedingungen vollzogen zu haben, wie sie, freilich in gesteigertem Maße, bei der typischen Piëzokristallisation in gefalteten Gebirgen obwalteten. Zur Bestätigung dieser Annahme können sowohl die deutlichen Ansätze einer Parallelstruktur wie die im ganzen Verbreitungsgebiet zu beobachtenden eigenartigen Lagerungsverhältnisse dienen. Wenn es gelungen ist, in einem einzigen Schliff 19 Oligoklas-Andesine nach der Methode von Fouquet zu bestimmen, so deutet dies doch auf eine gleichsinnige Anordnung der Feldspate, welche unmöglich das Werk des Zufalls ist. Mag diese Parallelstruktur auch makroskopisch nicht so in die Augen fallen wie bei dem früher aufgeführten Granitvorkommnis, so ist sie doch zweifellos vorhanden. Besonders beachtenswert aber sind die Lagerungsverhältnisse. Es wurde eingangs schon hervorgehoben, daß die Syenitgranitzüge in langen, schmalen Zungen den Hauptdirektionslinien des herzynischen Gebirgssystems folgen. Bei der Wichtigkeit, welche gerade diese Tatsache für die ganze Tendenz der vorliegenden Untersuchung hat, ist auf diese Erscheinung noch einmal zurückzukommen. Gümbel betrachtet die Syenitgranitvorkommnisse unseres Gebietes als Lagermassen, welche mit dem Gneis, in welchen sie eingebettet sind, gleichalterig sein sollen. „Die Kugelsyenitgranite, schreibt er, sind hauptsächlich in dem Schuppengneisdistrikt östlich von Tirschenreuth gegen Mähring und Bärnau entwickelt. Sie bilden hier zusammenhängende Lagerzüge, welche sich an zahlreichen über die Oberfläche ausgestreuten kugeligen Blöcken verfolgen lassen. In ursprünglicher Lagerstätte finden sie sich zwischen Gneisschichten

normal eingebettet, oft in linsenförmig erweiterten Lagern, welche sich in der Richtung des Fortstreichens stellenweise ausbauchen, stellenweise zusammenschnüren." Es wird später gezeigt werden, daß die Auffassung dieses Autors bezüglich der gegenseitigen Beziehungen zwischen den Lagermassen und ihrer Schieferhülle nicht geteilt werden kann. Das Bild der äußeren Erscheinung aber — und darauf kommt es hier an — ist in der zitierten Ausführung richtig gezeichnet. Dieses Bild aber deutet an sich schon auf ein enges Wechselverhältnis zwischen den Intrusivmassen und ihrer Umgebung. Offenbar ist das schmelzflüssige Magma in die Schieferspalten hineingepreßt worden, sei es daß diese Schieferspalten schon vorausgebildet waren, oder durch die dem Magma unter großem Druck innewohnende Energie erst aufgerissen wurden. Und diese Intrusion folgte auch dann noch der Streichrichtung der aufgeblätterten Schiefer, als die Direktionslinie umschlug und sich um einen Winkel von nahezu 90° drehte. Die Weiterentwickelung dieser Gedankenreihe kann indes, nachdem das Auftreten und der innere Zusammenhang der beiden am meisten ins Auge fallenden Strukturordnungen genügend erläutert ist, der späteren Besprechung vorbehalten bleiben.

Was endlich die Bezeichnung dieses Gesteinstypus als Syenitgranit betrifft, so kann diese Nomenklatur bei der Flüssigkeit aller Gesteinsbegriffe wohl als erträglich betrachtet werden. Man könnte das Gestein, um es als Übergangsglied zu kennzeichnen, mit demselben, vielleicht auch noch mit mehr Recht, Granodiorit nennen. Im Volksmund heißt diese amphibolgranititische Felsart kurzweg Syenit, so daß dieser Begriff seinen ursprünglichen Inhalt wieder erhalten hat. Am zutreffendsten dürfte bei der unverkennbaren Ähnlichkeit mit den monzonitischen Gesteinen der von Weinschenk vorgeschlagene Name „Quarzmonzonit" sein.

Diorit.

Das Gebiet des „Schuppengneises" unterscheidet sich von dem des benachbarten „bunten Gneises" außer anderm

auch dadurch, daß in ihm häufig hornblendereiche Gesteine auftreten. In all den einzelnen Bezirken unseres Gneisdistriktes treffen solche Hornblendegesteine in größerer oder geringerer Mächtigkeit auf. Sie bilden schmale, aber langgezogene Streifen, deren Längserstreckung augenscheinlich durch die beiden [illegible] bestimmt ist, welche in der Gebirgsbildung im Oberpfälzer Walde ihren Einfluß geltend machen. Es ist nicht zu verkennen, daß diese Hornblendegesteine verschiedenen Familien angehören, aber ihre gegenseitige Abgrenzung begegnet in der Natur meist sehr großen Schwierigkeiten. „Die Hornblendegesteine, schreibt Gümbel, scheiden sich in massige und geschichtete, oder in Hornblendefels und Hornblendeschiefer. Doch ist diese Trennung keine durchgreifende, indem häufig beide Modifikationen ineinander überspielen. Sie bilden mit den dioritartigen Gesteinen eine innig verwandte Gruppe, bei welcher es in den meisten Fällen nicht möglich ist, in der Natur zwischen den einzelnen Gliedern eine feste Grenze zu ziehen. Selbst gegen Syenit, Syenitgranit und Syenitgneis sind die Unterscheidungsmerkmale durch Zwischenformen oft so verwischt, daß eine Ausscheidung auf der Karte nicht ausführbar schien." Die Untersuchung von Gesteinsproben aus verschiedenen Lokalitäten hat mit unzweifelhafter Sicherheit ergeben, daß eine lückenlose Reihe von Zwischengliedern von dem typischen Diorit zu dem ausgesprochenen Hornblendegneis und Hornblendeschiefer hinüberführt.

Selbst auf dem beschränkten Raum einer Fundstelle zeigen diese hornblendehaltigen Gesteine oft sehr verschiedenen Charakter. Der Kalvarienberg bei Neustadt a/Wn. liefert dafür ein ausgezeichnetes Beispiel. Die geologische Karte bezeichnet das Gestein, welches diesen Berg zusammensetzt, als Diorit. Aber es sind augenscheinlich zwei verschiedene Varietäten dieser Familie, welche sich an dem Aufbau dieses Berges beteiligen. Beide Spielarten weichen in Bestand und Struktur so voneinander ab, daß sie in der Beschreibung auseinander gehalten werden müssen. Die eine stellt sich als ein lichtes Gestein, in welchem der graulich weiße Feldspat vorherrscht,

ebengemengteile Eisenerz und Apatit kommen, während
nit und Granat die Übergemengteile bilden. Unter den
paten erscheint hier zum erstenmal der normale Labrador.
n ihm finden sich aber auch die saureren Mischungen des
t-Oligoklas und des Andesin. Die Hornblende
t den einzigen farbigen Gemengteil. Sie wird im allge-
en mit grüner Farbe durchsichtig; parallel a ist sie licht-
grün, parallel b bräunlichgrün und parallel c grün mit
ins Violette. Quarz ist nur sehr wenig vorhanden;
lich ist dagegen Apatit in der gewöhnlichen Ausbildung
eten. Eisenerz durch die braundurchsichtigen Ränder in
indung mit geringem Metallglanz als Titaneisen cha-
risiert, findet sich oft in großen lappigen Fetzen. Da-
n fehlt auch Magnetit nicht. Titanit erscheint in
en Individuen, ermangelt aber des Idiomorphismus, wie
den granitischen Gesteinen konstatiert werden konnte.
nat ist ein sehr häufiger Übergemengteil, meist stark
g, nur selten wohl umgrenzt.

Die Häufigkeit des Auftretens von Labrador und Granat
erbindung mit dem Reichtum an Eisenerzen grenzt dieses
in ziemlich scharf von den saureren Typen ab. Charak-
isch ist auch für diese Gesteinsart der reichliche Gehalt
Titansäure, welcher nicht bloß in dem häufigen
nit, sondern auch in der Hornblende als Bei-

auch dadurch, daß in ihm häufig hornblendereiche Geste
auftreten. In all den einzelnen Bezirken unseres Gneisdistrik
tauchen solche Hornblendegesteine in größerer oder gering
Mächtigkeit auf. Sie bilden schmale, aber langgezogene Strei
deren Längserstreckung augensichtlich durch die beiden Ri
tungslinien bestimmt ist, welche in der Gebirgsbildung
Oberpfälzer Waldes ihren Einfluß geltend machen. Es
nicht zu verkennen, daß diese Hornblendegesteine verschied
Familien angehören, aber ihre gegenseitige Abgrenzung
gegnet in der Natur nicht selten großen Schwierigk
„Die Hornblendegesteine, schreibt Gümbel, scheiden si
massige und geschichtete, oder in Hornblendefels und H
blendeschiefer. Doch ist diese Scheidung keine durchgrei
indem häufig beide Modifikationen ineinander überspielen
bilden mit den dioritartigen Gesteinen eine innig verw
Gruppe, bei welcher es in den meisten Fällen nicht m
ist, in der Natur zwischen den einzelnen Gliedern eine
Grenze zu ziehen. Selbst gegen Syenit, Syenitgrani
Syenitgneis sind die Unterscheidungsmerkmale durch Zw
formen oft so verwischt, daß eine Ausscheidung auf de
nicht ausführbar schien.“ Die Untersuchung von G
proben aus verschiedenen Lokalitäten hat mit unzweif
Sicherheit ergeben, daß eine lückenlose Reihe von Zw
gliedern von dem typischen Diorit zu dem ausgespr
Hornblendegneis und Hornblendeschiefer hinüberführt.

Selbst auf dem beschränkten Raum einer Fundstelle
diese hornblendehaltigen Gesteine oft sehr verschieden
rakter. Der Kalvarienberg bei Neustadt a/Wn
dafür ein ausgezeichnetes Beispiel. Die geologische K
zeichnet das Gestein, welches diesen Berg zusammens
Diorit. Aber es sind augensichtlich zwei verschieden
täten dieser Familie, welche sich an dem Aufbau dieses
beteiligen. Beide Spielarten weichen in Bestand und S
so voneinander ab, daß sie in der Beschreibung aus
gehalten werden müssen. Die eine stellt sich als ei
Gestein, in welchem der graulich weiße Feldspat vo

zu beobachten. Allgemein verbreitet ist der zonare Aufbau der Feldspate und die poikilitische Durchdringung der Hornblende durch die übrigen Gesteinselemente. Die Verwitterung setzt auch hier im Kern der Feldspate ein und führt zu serizitartigen Aggregaten, während bei der Hornblende sich gerne Eisenoxydhydrat ausscheidet.

Das Hauptgestein des Kalvarienberges aber, dem gegenüber der körnige Diorit nur wie ein malchitischer Gangstock erscheint, ist von dem Hornblendegneis und Hornblendeschiefer, wie sie a. a. O. in Floß und Wildenau auftreten, makroskopisch kaum zu unterscheiden. Auch mikroskopisch sind mancherlei Ähnlichkeiten zwischen den beiden Felsarten zu konstatieren. Die Zonarstruktur der Feldspate, wie sie den massigen Diorit so vorzüglich charakterisiert, und die polysynthetische Zwillingsbildung treten in den beiden Gesteinstypen zurück. Gleichwohl steht das gebänderte Gestein des Kalvarienberges dem Diorit noch näher als den genannten Bildungen von Floß und Wildenau. Abgesehen von dem Charakter der Hornblende und der Vorherrschaft des Oligoklas-Andesin und Andesin vor den basischeren Mischungen sind es besonders zwei Merkmale, welche die Abtrennung jenes Gesteins von diesen Vorkommnissen gebieterisch fordern und es noch als echten Diorit charakterisieren. Einmal der Mangel an einem Pyroxenmineral, und sodann die Anwesenheit von mehr oder weniger Quarz. Pyroxen ist in den Hornblendegesteinen der angeführten Lokalitäten sehr reichlich vorhanden, in dem von mir untersuchten Gestein des Kalvarienberges aber nirgends gefunden worden.[1]) Was den Quarz anlangt, so scheint derselbe in einer Gesteinsprobe vom Kalvarienberg allerdings eine nachträgliche Infiltration zu sein. In langen, gewundenen Adern, in denen zuweilen Aggregate von unter sich gleich orientierten Plagioklaspartikeln schwimmen, zieht er sich durch das Gestein. In anderen Schliffen aber schließen Hornblende und Feldspate nicht selten einzelne ge-

[1]) v. Luczizky hat inzwischen in anderen Partien des komplizierten Gesteinskomplexes Diallag konstatiert.

rundete Quarzkörner ein, welche offenbar primär sind und in ihrem Auftreten an granulitische Strukturformen erinnern. Rutil findet sich zwar auch in den Hornblendegesteinen von Floß und Wildenau, tritt aber in ihnen hinter Titanit zurück, während sich hier das Widerspiel dieser Erscheinung zeigt. Jene lichtgelben Rutilkörner, welche man in den Amphiboliten und Eklogiten so vielfach wahrnimmt, sind in dem Neustädter Dioritvorkommen sehr häufig anzutreffen. Eigentümlich ist diesem Gestein noch der Reichtum an radial gestellten oder auch rosettenförmig angeordneten Chloritblättchen. Auch Biotit erscheint in einzelnen größeren Blättern. Apatit und Zirkon sind selten. Das Eisenerz ist durch seinen Titanitrand deutlich als Ilmenit gekennzeichnet. Der Kalzit, welcher sich öfters in den Plagioklasen ansiedelt, ist jedenfalls nur Sekundärprodukt. Bei der Verwitterung überzieht sich das Gestein mit einer bräunlichen, mehr oder weniger glatten Kruste. Für die Spaltfähigkeit granitodioritischer Magmen liefert der Kalvarienberg einen trefflichen Beleg. Finden sich doch neben den beiden Dioritvarietäten, welche allein schon auf bedeutende Differenzierung im Magma schließen lassen, in jenem Gesteinskomplex auch noch aplit- und pegmatitartige Bildungen in ansehnlicher Entwicklung. Das von Düll als weißer Granitgneis bezeichnete Gestein ist wohl als Aplit anzusprechen.

Auf eine Erscheinung aber muß zum Schluß noch ganz besonders aufmerksam gemacht werden. Es ist die Bänderung der einen Dioritabart; dieses Gestein ist so hornblendereich, daß man es auf den ersten Blick für Hornblendit halten könnte. Bei genauer Betrachtung aber nimmt man den Feldspat nicht bloß wahr, sondern sieht auch zugleich, daß derselbe dünne lamellenartige Lagen bildet. Diese Bänderung ist lange nicht so deutlich wie in den später zu besprechenden basischeren Gesteinen, aber die Ansätze zu einer schlierigen Sonderung der Gemengteile sind doch zu erkennen. Die Neigung zu Schlierenbildungen beherrscht die eruptiven Gesteine unseres Gebietes in hohem Maße.

Hornblendegneis und Hornblendeschiefer.

Zwischen der Almesbacher Mühle und Theiseil findet sich an den Gehängen der nördlichen Talwand ein Hornblendegestein, welches als vermittelndes Zwischenglied zwischen dem Dioritschiefer von Neustadt a. d. Wn. und dem eigentlichen Hornblendegneis betrachtet werden kann. Ist jener als der basische Pol der dioritischen Gesteine zu bezeichnen, so ist dieses als der sauere des Hornblendegneises anzusehen. Aus seinem Mineralbestand, welcher sich im großen und ganzen mit dem des Diorits deckt, sei als charakteristisch der eisenarme, apatitähnliche Orthit mit seinen pleochroitischen Höfen in der Hornblende, der durch seine Parkettierung gekennzeichnete Prehnit und der durch die Größe seines Achsenwinkels gegen eine Verwechselung mit Ziosit β sicher gestellte Klinozoisit hervorgehoben. Was dieses dioritähnliche Gestein aber dem Hornblendegneis naherückt, das ist der Farbenton der Hornblende. Parallel $\mathfrak{a}$ lichtgelb, parallel $\mathfrak{b}$ gelblich und parallel $\mathfrak{c}$ bräunlichgrün markiert diese Hornblende den Übergang von den dioritischen zu den basischeren Gliedern der Hornblendegesteine in deutlicher Weise.

Hornblendegneis und Hornblendeschiefer unterscheiden sich lediglich dadurch voneinander, daß in dem letzteren der Feldspatgehalt erheblich zurückgeht. Zu einer gesonderten Behandlung beider Gesteinsarten besteht daher keinerlei Nötigung. Diese basischen Hornblendegesteine sind in allen Gneisdistrikten unseres Gebietes vertreten. Freilich ist nicht überall da, wo die geologische Karte Hornblendegneis verzeichnet, dieses Gestein auch wirklich vorhanden. An verschiedenen Lokalitäten, wo nach der Karte Hornblendegneis sein sollte, konnte nur gewöhnlicher Glimmergneis ohne jede Spur von Hornblende nachgewiesen werden, wie umgekehrt im Gebiet des Glimmergneises Hornblendegesteine eingeschaltet gefunden wurden. Aber immerhin sind die basischen Hornblendegesteine in dem ganzen Gebiete weit verbreitet. Sie stellen sich als feinkörnige, dunkelfarbige Gesteine mit deutlicher Sonderung der farbigen und farblosen Gemengteile dar, in welchen ein

basischer Kalknatronfeldspat mit einem oder mehreren Gliedern der Pyroxen- und Amphibolfamilie die herrschende Mineralkombination bildet. Als Nebengemengteile sind Apatit, Zirkon und Ilmenit zu nennen. Außerdem treten Magnetkies, Pyrit, Rutil, Titanit und spärlich Granat auf.

Der Kalknatronfeldspat ist wesentlich basischer als in den Dioriten. Es ist Labrador, Labrador-Bytownit und Bytownit. Er hat weißgraue Farbe und bildet Zwillinge nach dem Albit- und Periklingesetz. Im übrigen kann hier auf die Beschreibung der Kalknatronfeldspate in den Dioriten verwiesen werden, wo die unterscheidenden Merkmale bereits namhaft gemacht worden sind. Die Hornblende zeigt allenthalben eine ausgesprochen bräunliche Färbung. Es ist allerdings nicht die eigentliche braune Hornblende, aber der bräunliche Farbenton kommt doch überall recht deutlich zum Vorschein. In dem Gestein von Floß ist die Hornblende parallel $\mathfrak{a}$ lichtgelblichgrün, parallel $\mathfrak{b}$ bräunlichgrün und parallel $\mathfrak{c}$ grün. In dem Gestein von Wildenau ist die braune Färbung noch tiefer. Seine Hornblende ist parallel $\mathfrak{a}$ lichtbraun, parallel $\mathfrak{b}$ gelblichbraun und parallel $\mathfrak{c}$ grünlichbraun. In dem sogen. Hornblendeschiefer ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$; nach beiden Richtungen aber zeigt sich eine tief braungrüne Färbung. Spaltbarkeit, Zwillingsbildung, Licht- und Doppelbrechung wie Auslöschungsschiefe sind durchaus normal. Bemerkenswert erscheint nur noch, daß die farbige Hornblende terminal vielfach zerfasert ist und in die farblose ausläuft. Der Pyroxen, welcher neben der Hornblende in wechselnder Menge auftritt, ist ein lichtgefärbter Augit mit sehr schwachem Pleochroismus von lichtgrün nach lichtgelb. Er bildet rundlicheckige Körner, deren Größe zwischen 0,01 und 0,02 mm schwankt. Einigermaßen gut ausgebildete Kristalle sind eine Seltenheit, auch die Spaltbarkeit nach dem Prisma tritt nur hin und wieder deutlich hervor; meist ziehen sich nur ganz unregelmäßige Risse durch das Mineral. Einmal konnte eine Auslöschungsschiefe von 54° konstatiert werden. Im Dünnschliff sieht das Mineral dem Olivin vielfach zum verwechseln ähnlich. Um die Richtigkeit

der Identifizierung aber außer Frage zu stellen, wurde von einem Schliff ein Teil abgetrennt, bloß gelegt und geglüht. Dabei ging die grünbraune Hornblende in die basaltische über, der Pyroxen aber ließ keinerlei Änderung erkennen. Apatit ist im allgemeinen selten; doch finden sich zuweilen Individuen von ansehnlicher Größe. Noch seltener ist Zirkon; dagegen erscheint Titaneisen mit Titanitumsäumung ziemlich häufig, ebenso Pyrit. Der Titanit hat in den Gesteinen von Floß spindelförmige Gestalt; in denen von Wildenau finden sich meist Agglomerationen von keinen, gerundeten Körnern. Neben Pyrit erscheint zuweilen auch Magnetkies. Granat konnte nur in einem Probestück nachgewiesen werden. Die Gesteine zeigen an den verschiedenen Fundstellen sehr verschiedenen Charakter. In den Wildenauer Vorkommnissen tritt der Pyroxen sehr zurück, während er in denen von Floß reichlicher ist. In dem sogen. Hornblendeschiefer nimmt der Feldspat bis fast zum Verschwinden ab, scheint aber saurer zu sein.

Daß der stufenweise abwärtssteigende Grad des Idiomorphismus der einzelnen Gemengteile in den basischen Gesteinen minder deutlich ist, als in den saureren, dafür liefert dieses Hornblendegestein gute Beispiele. Wie lange die Bildung der Hornblende neben der der Plagioklase noch herging, ersieht man aus dem Umstande, daß erstere öfters Kalknatronfeldspate umschließt. Die auffallendste strukturelle Eigentümlichkeit dieser Hornblendegesteine ist indes ihre Bänderung. Während man bei dem Dioritschiefer nur mehr oder weniger deutliche Ansätze in dieser Richtung wahrnimmt, gewahrt man hier eine ausgesprochene Parallelordnung in Verbindung mit einer weitgehenden Sonderung der Gemengteile. Zeilenförmig ziehen sich die Hornblendeaggregate durch die Schliffe und es wechsellagern kontinuierlich hornblendereiche mit hornblendearmen, ja hornblendefreien Schichten. Die lichtgefärbten Lagen bestehen im wesentlichen nur aus Feldspat und Pyroxen; die dunkelfarbigen aus Hornblende mit ganz sporadischem Feldspat und Augit. Letztere könnte man für sich allein als

Hornblendit bezeichnen, erstere als Forellenstein. Diese Struktureigenart war es ohne Zweifel, welche zu der irreführenden Bezeichnung dieses Gesteinstypus als Hornblendegneis, bezw. Hornblendeschiefer Anlaß gegeben.

Es muß im Interesse des weiteren Verlaufes dieser Abhandlung schon hier nachdrücklichst betont werden, daß dieser sogen. Hornblendegneis samt dem mit ihm innig vergesellschafteten Hornblendeschiefer nicht in die Kategorie der „kristallinen Schiefer" gehört. Diese Hornblendegesteine sind keine metamorphen Bildungen irgendwelcher Art. Es sind primäre Gabbrogesteine vom Typus der Bojite. Zwar zeigen sich in einzelnen Schliffen teils dynamische Einwirkungen teils Kontakterscheinungen. Aber Bestand und Gefüge jener Gesteine sind an sich weder das Werk der Dynamo- noch das der Kontaktmetamorphose. In vielen Fällen beobachtet man auch bei der vollkommensten Parallelstruktur keine Spur einer mechanischen Deformation und wo eine solche sich zeigt, ist sie gewöhnlich nur wenig intensiv. Kontaktwirkungen sind vielfach überhaupt nicht wahrzunehmen. Wo sie aber auftreten, zeigen sich ganz die Erscheinungen, wie sie basische Tiefengesteine am Kontakt mit Granit an sich tragen. Der Feldspat ist saussüritisiert, der Pyroxen uralitisiert. Wie vielfach durchbrochene Gürtel ziehen sich Klinozoisitaggregate durch die Schliffe. Von den ursprünglichen Pyroxenen sind oft nur noch kleine von Amphibolmänteln umhüllte Kerne vorhanden. Die primäre Hornblende zeigt noch deutlich die bräunliche Farbe, die sekundäre aber den charakteristischen blaugrünen Farbenton. In einer stark umgewandelten Gesteinsprobe aus der Umgebung von Floß finden sich Granatkörner bis zu 3,33 mm im Durchmesser. Auf den zahlreichen Rissen dieses Minerals haben sich dieselben blaugrünen Amphibole gebildet, wie sie die Pyroxene mantelartig umsäumen. Selbst in Granat eingeschlossene Pyroxene sind von uralitischen Bildungen umstellt. Der Umwandlungsprozeß ist also bis zur gegenseitigen Reaktion der einzelnen Gemengteile untereinander fortgeschritten, ganz wie es bei der Berührung von gabbroiden

Gesteinen mit einem granitischen Magma geschieht. Kurz die Hornblendegesteine mit basischem Charakter sind nicht Derivate, sondern Primitivbildungen. Die meist geringfügigen mechanischen und die manchmal weitgehenden kontaktmetamorphischen Beeinflussungen sind sekundärer Natur. Was in dieser Anschauung bestärken muß, ist der vielfach zu beobachtende violette Farbenton der Hornblende. Becke[1]) schreibt in dieser Hinsicht: „Nie noch hat man, soviel mir bekannt ist, in kristallinen Schiefern jene violettbraunen Augite oder jene dunkelbraunen Hornblenden angetroffen, welche in Erstarrungsgesteinen so häufig auftreten und deren eigentümliche Farbennuancen man dem Titangehalt wohl mit Recht zuschreibt." Wären jene Gesteine das Produkt einer Metamorphose, so hätten sie bei der erlittenen Umbildung jene Farbenerscheinung verloren.

An jener Auffassung kann auch weder die Tatsache hindern, daß diese Gesteine vielfach lagerartig auftreten, noch der Umstand, daß von ihnen ausgegangene Kontaktwirkungen nicht nachgewiesen werden konnten. Auch die Diabaslager treten ja oft schwarmartig auf und abgesehen davon, daß wenig gute Aufschlüsse vorhanden sind, senden die weniger mit Mineralbildern beladenen basischen Tiefengesteine keine weit fortsetzenden Ausläufer aus. Die basischen Hornblendegesteine unseres Gebietes sind also Eruptivbildungen. Bestand und Struktur nötigen zu ihrer Eingliederung in die gabbroiden Gesteine. Der Reichtum an Hornblende berechtigt zu der Bezeichnung als Hornblendegabbro. Ihre Bänderung ist jedenfalls nur das Produkt einer Art Seigerung im schmelzflüssigen Magma.[2])

---

[1]) Becke, Über Mineralbestand und Struktur der kristallinischen Schiefer 1904.

[2]) Laut Sitzungsbericht der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften vom 6. April 1905 bezeichnete Professor Dr. Bergt die sogen. Dioritschiefer und Amphibolite vom Hohen Bogen als flasrig bis schiefrig ausgebildete Gabbros und Hornblendegabbros. Seine Ausführungen können wohl als eine Stütze für die obige, schon vor geraumer Zeit abgeschlossene Darlegung gelten.

Serpentin.

Serpentin bricht in unserem Gebiet überall in Verbindung mit den Hornblendegesteinen zutage. Außer anderen Orten erscheint er auch bei Wildenau und Floß in ziemlich starker Entwickelung. Es ist ein dunkelfarbiges, grünliches, auch bisweilen bräunlich geflecktes, manchmal fettig anzufühlendes, splittrig brechendes, mildes, aber sehr zähes Gestein. Bald ist es ausgezeichnet schieferig, bald zeigt es keine Spur einer Schieferung oder Schichtung, hat massiges Aussehen und setzt der Zerkleinerung den größten Widerstand entgegen. An seiner Zusammensetzung beteiligen sich vorzugsweise Olivin und Chrysotil in äußerst wechselndem Mengenverhältnis von reinem Olivinfels zu reinem Serpentin. Daneben stets Aktinolith und Chlorit. Ferner sind Magnetit, Eisenglanz und Chromit, Pyrit und Magnetkies vertreten. Biotit, Brucit, Talk, Pleonast spielen meist nur eine untergeordnete Rolle. Magnesit in Adern als spätere Infiltration findet sich reichlich in dem Vorkommen von Wildenau. Sehr häufig endlich tritt ein Gesteinsbestandteil in ansehnlichen Dimensionen auf, welcher wahrscheinlich mit dem von Weinschenk als Batavit bezeichneten Mineral zu identifizieren ist.

Der Olivin bildet meist ganz unregelmäßige, rissige Körner, die manchmal eine Größe von 4—5 mm erreichen. In der Regel erscheint er in einfachen Individuen, doch ist Zwillingsbildung nicht ausgeschlossen. Außer Pikotit enthält er auch öfters Flüssigkeitseinschlüsse mit deutlichen Libellen. Der Strahlstein, ein überaus häufiger Gemengteil, stellt sich nicht bloß als Nebenprodukt bei der Serpentinbildung dar. Ist er doch gerade in solchen Gesteinen, in denen der Serpentinisierungsprozeß noch verhältnismäßig wenig weit vorgeschritten ist, in radialstrahligen Aggregaten oder rosettenförmiger Gruppierung weit verbreitet. Die durch die Zerdrückung der langen, dünnen Nadeln bewirkte Parkettierung verleihen ihm nicht selten große Ähnlichkeit mit Prehnit. Was das als Batavit eingeführte Mineral betrifft, so bildet dasselbe 3—10 mm große Individuen, welche sich makroskopisch

durch ihren weichen Seidenglanz scharf von dem dunkeln Gesteinsgrund abheben. Das Mineral ist durch höchst vollkommene Spaltbarkeit nach der Basis aus gezeichnet. Seine Lichtbrechung ist sehr schwach, seine Doppelbrechung aber sehr bedeutend. Während die Lichtbrechung mit der des Nephelins etwa auf gleicher Stufe steht, ist die Doppelbrechung so stark, daß in den normalen Schliffen gar nicht selten das Grün der zweiten Ordnung erscheint. Die Spaltblättchen liefern ein vollkommenes Achsenbild. Der optische Charakter ist negativ. Die im Vergleich zu den Dimensionen der übrigen Gesteinsbestandteile beträchtliche Größe des letztgenannten Minerals verleiht dem Serpentin ein porphyrartiges Aussehen. Die vorzüglich entwickelte Maschenstruktur und die sonstigen Strukturformen bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Die Abstammung des Serpentins von Peridotit schließlich muß trotz der Einwendungen Gümbels gegen Sandberger als gesichert gelten. Ist doch nicht bloß eine reiche Fülle von Olivinindividuen noch vorhanden, sondern auch klar ersichtlich wie der Chrysotil Schritt für Schritt den Olivin ersetzt. Deutlich beobachtet man, wie die auf den Klüften des Olivins sich bildenden Chrysotiladern sich immer weiter ausbreiten und schließlich das ganze Gefüge desselben zersprengen. Immer kleiner sieht man das Muttermineral werden, bis endlich der letzte Rest verschwunden ist.

Gneis.

Das Granitmassiv zwischen Weiden und Tirschenreuth wird fast vollständig von Gneisschichten umrahmt. Der „Gneis“ geht nicht überall zutage. So schließen sich im Norden unmittelbar an den Granitstock quartäre Ablagerungen. Aber es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß diese jüngeren Sedimente mehr oder weniger ausgedehnte Gneispartien überdecken. Bei Tirschenreuth steht der „Gneis“ in einem mächtigen Schichtenkomplex an und überlagert den schief einfallenden Granit. Von Tirschenreuth aber zieht sich ein ununterbrochener

Gneisgürtel am Ostrand des Eruptivkörpers hin. Ebenso besteht der ganze Westrand des Gebirges aus Gneisgesteinen. Schließlich sind auch die Innenseiten jener beiden Granitzüge, welche von dem Massiv aus weit nach Süden vorspringen, vielfach von Gneisgebilden umsäumt. Bei Schlattein, Plößberg und Wildenau tritt der gewöhnliche „Gneis" auf; ebenso in der Gegend von Waldthurn und Vohenstrauß. Dazwischen breitet sich Hornblendegneis und Hornblendeschiefer aus. Wir haben erkannt, daß diese dunkelfarbigen, parallel struierten Gesteine nichts anderes als gebänderter Hornblendegabbro sind. Es muß aber als sicher festgestellt gelten, daß dieser Hornblendegabbro keineswegs das ganze Gebiet einnimmt, das ihm auf der geologischen Karte zugewiesen ist. Das ausgezeichnete Material, welches beim Bau des Berglerschen Eiskellers in Floß zutage gefördert und das, welches auf der rechten Bachseite durch Schürfung gewonnen wurde, schließt darüber jeden Zweifel aus. Auch in der nächsten Umgebung von Bergnersreuth und Versdorf findet man echten Zweiglimmergneis. Nur gegen Nord-West verbindet eine schmale Granitbrücke das Massiv des Tirschenreuther Waldes mit dem Granitstock des Steinwaldes. So legt sich also um die ganze Granitmasse eine fast lückenlose, breitere oder schmälere Gneiszone mantelartig herum. Und über dies alles muß hier schon der doppelten Tatsache Erwähnung getan werden, daß es einerseits oft nur ganz schmale Granitstreifen sind, welche die einzelnen Gneisdistrikte voneinander trennen, und daß andrerseits größere Gneisschollen inselartig im Granit gleichsam schwimmen.

Der Gesteinscharakter läßt bei aller Übereinstimmung im großen doch sehr merkliche Unterschiede an den verschiedenen Lokalitäten erkennen. Der Mineralbestand der Gneisgesteine, um von diesem zunächst zu reden, ist ein überaus reichhaltiger und mannigfaltiger. Außer den in den Gneisen allverbreiteten Gemengteilen gehören zur Mineralparagenesis dieser Gesteine: Apatit, Zirkon, Pyrit, Magnetkies, Magneteisen, Eisenglanz, Titaneisen, Turmalin, Anatas, Rutil, Titanit,

Leukoxen, Granat, Sillimanit, Cordierit, Andalusit, Monazit, Hussakit, Prehnit, Epidot, Spinell, Chlorit und Orthit.

Von den Feldspaten sind Orthoklas, Mikroklin, Mikroperthit, Albit, Albit-Oligoklas, Oligoklas und Oligoklas-Andesin vertreten. Sie haben niemals rote, sondern immer weißlichgraue bis gelbliche Färbung. Ihre sonstigen Eigenschaften zeigen keinerlei Abweichung von denen der granatischen Gesteine. Das Mengenverhältnis zwischen Alkali- und Kalknatronfeldspaten ist hier noch einem größeren Wechsel unterworfen als im Granit. Allenthalben sind die Feldspate reich an Einschlüssen. Bald sind es nadel- und stabförmige Mikrolithe, bald mehr oder weniger gerundete Körner. Zeigen jene vielfach die Charaktere des Sillimanits, so gehören diese nicht selten dem Quarz an. Wirr durcheinanderliegend bringen sie zuweilen eine starke Trübung der Feldspate hervor. Bei der Verwitterung, welche überall die normalsten Erscheinungen veranlaßt, bekundet der im ganzen seltene Mikroklin auch hier seine große Widerstandsfähigkeit den umbildenden Agenzien gegenüber.

Von den Glimmermineralien sind Magnesia- und Kaliglimmer zu nennen. Der Biotit bildet im allgemeinen unregelmäßige Blätter und Blätteraggregate, die sich nicht selten zu kontinuierlichen Häuten über und aneinander reihen. In dem Gneis von Neustadt a. d. Wn. beobachtet man oftmals scharf umgrenzte sechsseitige Täfelchen. In anderen Fällen sind die Blättchen mehr gerundet oder eiförmig gestaltet. So treten in dem „Gneis“ von Floß öfters kreisförmige Scheibchen auf. Das Vorkommnis von Ellenfeld dagegen zeigt vielfach ruinenhafte Endausbildung. Der Achsenwinkel ist stets sehr klein. Die Farbe wechselt an den verschiedenen Fundstätten. Im allgemeinen braun im auffallenden und durchfallenden Licht, ist sie an manchen Orten, wie z. B. in der Nähe von Schlattein, schwarzbraun im reflektierten, tiefrotbraun im transmittierten Licht. In dem Gneis von Naab nimmt der Biotit sogar zitronengelben Farbenton an. Bei der

Zersetzung geht die braune Farbe in die grüne über. Pleochroismus und Auslöschung sind normal. Der reichliche Eisengehalt gibt sich bei der Zersetzung durch die Ausscheidung von Eisenerzen zu erkennen, während der Reichtum an Titansäure durch die Bildung von Rutilnadeln und Leukoxen zum Vorschein kommt. Nicht selten erscheint der Biotit stark gebleicht, noch öfter chloritisiert. Besonders ward der Gneis von Tirschenreuth einer weitgehenden Chloritisierung unterworfen. Die in Quarz eingeschlossenen Blättchen und Täfelchen sind allerdings durch einen vorzüglichen Erhaltungszustand ausgezeichnet; die übrigen aber meist hochgradig umgebildet. Der mit Biotit vielfach vergesellschaftete, manchmal mit ihm auch parallel verwachsene Muskovit legt große Neigung zu radialstrahliger Gruppierung an den Tag, hat vielmals löcherige Beschaffenheit und ist nicht selten verzwillingt. Das Mengenverhältnis zwischen Kali- und Magnesiaglimmer ist großen Schwankungen ausgesetzt. In dem Gneis von Floß tritt der Muskovit sehr hinter Biotit zurück; in dem Steinbruch Bergler fehlt er sogar ganz. Dagegen führt er die unbestrittene Vorherrschaft in dem Gneis von Bärnau. Als Einschlüsse führen die Glimmer neben Apatit und Zirkon gar nicht selten mehr oder weniger gerundete Quarzkörner, eine Erscheinung welche für die verschiedenen Gneistypen dieses Gebietes als besonders bezeichnend hervorgehoben werden muß. In der Regel liegen die Glimmerblättchen in der Strukturebene, nicht selten jedoch schneiden sie dieselbe auch unter wechselndem Winkel.

Der Quarz bildet mit Feldspat zumeist allotriomorph körnige Aggregate, doch ist vielfach das Streben nach kristallographischer Formenentwickelung nicht zu verkennen. Der muschlige Bruch und der fettige Glanz sind überall da deutlich zu erkennen, wo die Körner etwas größere Dimensionen aufweisen. Häufig schließen sich die einzelnen Körner zu linsenförmigen Aggregaten zusammen. An Einschlüssen ist der Quarz meist sehr reich. In dem Gneis von Naab finden sich Gaseinschlüsse, sonst begegnet man nicht selten Flüssigkeitseinschlüssen, welche förmliche Bänder bilden und ohne Richtungs-

änderung von einem Korn in das andere übersetzen. Von den innerhalb der Quarzkörner auftretenden mikrolithischen Bildungen sind neben Sillimanit und Biotit besonders Rutilstäbchen zu nennen. An myrmekitischen Verwachsungen mit Feldspat ist besonders der Quarz in dem Gneis zwischen Iglersreuth und Bärnau reich, während das Vorkommen von Floß das sonst seltene Phänomen der Kataklase mit großer Deutlichkeit zeigt.

Der Apatit ist, wie es scheint, nur in den die Gneisschichten häufig durchsetzenden Aplitgängen in langen, nadelförmigen Kristallen ausgebildet; meist erscheint er in rundlichen oder ovalen Körnern; manchmal auch in Täfelchen, die leicht zu Täuschungen hinsichtlich seines optischen Charakters Anlaß geben. Seine Verteilung in den Gesteinen ist äußerst wenig konstant. Ist der „Gneis“ von Plößberg ganz vollgepfropft von Apatit, so ist in manchen Schliffen des „Gneises“ von Tirschenreuth kein einziges Individuum zu finden. Auch der „Gneis“ von Wondreb zeigt nur ganz lokal eine erhebliche Anreicherung dieses Minerals. Nur selten erreichen die Körner eine ansehnliche Größe. Durchmesser von 0,522 mm sind schon eine Ausnahme. Der Zirkon ist, wenn auch oft in geringer Menge, überall vorhanden. In dem „Gneis“ von Plößberg ziehen sich ganze Streifen dieses Minerals durch den Schliff. Die Dimensionen sind meist sehr gering. Eine Größe von 0,219 mm ist schon verhältnismäßig beträchtlich. Gerade die kleinsten Individuen aber sind meist durch hochgradigen Idiomorphismus ausgezeichnet. Pleochroitische Höfe bildet der Zirkon nicht bloß in Biotit und Chlorit, sondern auch manchmal im Muskovit. Besonders bezeichnend aber ist diese Erscheinung im Cordierit. Der Pyrit ist gar nicht selten. Besonders reichlich führen ihn die Gesteine aus dem Bahneinschnitt zwischen Iglersreuth und Bärnau, und diejenigen von Floß. Oft ist er in Eisenoxydhydrat umgewandelt; aber auch in dieser Umbildung ist er durch seine Krystallform noch leicht zu erkennen. Der „Gneis“ von Tirschenreuth enthält besonders schöne Pseudomorphosen nach Pyrit.

Der Magnetkies ist vor allem in dem Gneis von Bergnersreuth reich entwickelt. Das Magneteisen, so ziemlich allgegenwärtig, trifft man selten in guter Kristallform. Dagegen bildet der Eisenglanz, in seinem Auftreten etwas seltener, gern sechsseitige Täfelchen; das Titaneisen ist durch seine skelettartige Ausbildung und durch seinen Leukoxenrand meist deutlich charakterisiert, oft bildet es auch lange schmale Leisten mit Titanitsaum im Biotit. In dem „Gneis" von Holzmühle und Naab findet sich auch die glimmerartige Varietät. Der Turmalin ist, wenn auch nicht gerade überall anzutreffen, doch ein außerordentlich häufiger Gemengteil dieses „Gneises". So sind in dem Vorkommnis von Tirschenreuth oft zahlreiche Individuen auf engem Raum vereinigt. Meist gedrungen prismatisch zeigt er in der Prismenzone oft schöne trigonale Durchschnitte und an den Enden hemimorphe Ausbildung. Die Farbe, in der Regel braun und blau, manchmal auch grünlich und bläulichgrün, wechselt öfters in einem Kristall. Größere Individuen sind wohl auch zonar gebaut. Der Anatas ist allgemein verbreitet. Zuweilen beobachtet man, wie sich Anatas aus Leukoxen entwickelt, während umgekehrt aus Anatas öfters Rutil herauswächst. Der Rutil, manchmal in nadelförmigen Kristallen, meist in kurzen Prismen, gar nicht selten in mehr oder weniger gerundeten Körnern ausgebildet, erscheint gewöhnlich nur in einfachen Kristallindividuen, doch sind auch knie- und herzförmige Zwillinge verbreitet. Die Farbe ist oft lichtgelb, zuweilen auch braun mit unverkennbarem Pleochroismus. Längs der Hauptachse findet meist eine starke Absorption statt. Ganze Aggregate von pleochroitischen Höfen nimmt man im Chlorit des „Gneises" von Tirschenreuth wahr, während die Sagenitbildung in den Gesteinen von Naab vorzüglich zu sehen ist. Der Titanit ist im ganzen selten. Wo er erscheint, tritt er gewöhnlich in Form der Insekteneier auf. Leukoxen umsäumt oft Glimmermineralien und Titaneisen. Der fast allgemein verbreitete Granat beherbergt häufig Feldspat, Quarz und Biotit als Einschlüsse. Auf den Spaltrissen siedeln sich vielfach Chloritblättchen an. Peri-

morphosen sind keine seltene Erscheinung. Sehr oft begegnet man in den Gneisgesteinen dieses Gebietes dem Sillimanit und Cordierit. Der Sillimanit stellt sich nicht selten in stabförmigen Einzelkristallen dar; meistens aber erscheint er in büschelformigen Aggregaten. Außer in Quarz und Feldspat tritt er besonders häufig im Cordierit als Einschluß auf. Hier sind die einzelnen Fasern zu vielfach gewundenen und gebogenen Garben vereinigt, während der Wirt als einheitlicher Kristall keinerlei dynamische Beeinflussung erkennen läßt. Besonders reich an Sillimanit ist der „Gneis" zwischen Iglersreuth und Bärnau, aber es gibt in der ganzen Gegend kaum einen „Gneis", der nicht dieses Mineral führte. Der Cordierit, welcher den Sillimanit so oft umschließt, bildet hin und wieder unregelmäßige, wasserhelle, quarzähnliche Körner, in den meisten Fällen aber ist er in Pinit umgewandelt. Wo die auf den Spaltrissen und an den Rändern einsetzende Umbildung große Fortschritte gemacht, bewirkt sie eine starke Trübung des Minerals. Wie verschieden der Achsenwinkel sein kann, geht aus einem Vergleich zwischen den Cordieriten von Neustadt a. d. Wn. und Iglersreuth hervor. Sehr schön sieht man auch oft die Tatsache bestätigt, daß in den vom Zirkon verursachten pleochroitischen Höfen der nach a schwingende Strahl lebhaft gelb erscheint, die Lichtbrechung erhöht und die Doppelbrechung vermindert wird. Eine ganz vereinzelte Erscheinung ist der Monazit. Nachgewiesen konnte er nur in dem Gneisvorkommen von Naab werden. Die hier im Gesteinsgewebe zerstreuten kreisförmigen Körner sind durch den gelblichen Farbenton sowie durch den kleinen Achsenwinkel vor Verwechselung mit anderen Mineralien sichergestellt. Dasselbe Gestein enthält auch den durch die Höhe seiner Doppelbrechung und durch seinen Pleochroismus genügend gekennzeichneten Hussakit. Ein sehr charakteristischer Übergemengteil ist in dem „Gneis" von Floß der Prehnit. Fast in jedem Schliff trifft man ihn hier an. Die ihm eignende Parkettierung macht ihn sehr leicht kenntlich. Mit ihm ist häufig der Epidot verbunden, welcher sich zu

Haufwerken von kleinen gelblichen Körnern zu gruppieren pflegt. In dem „Gneis" von Tirschenreuth und Bergnersreuth stellt sich öfters Andalusit mit seinen bekannten Kennzeichen ein. An der letztgenannten Lokalität ist auch ein grüner Spinell reichlich vertreten. Chlorit findet man überall. In einem Vorkommen bei Neustadt a. d. Wn. bewirkt der Reichtum an diesem Mineral eine grünliche Färbung des Gesteins. Orthit endlich ist an verschiedenen Orten in einzelnen Körnern und Zwillingskristallen vorhanden. Es sind also nicht weniger als 33 Mineralien, die in diesem Gneis nachgewiesen werden konnten.

Auch an begleitenden Bestandmassen ist dieser Gesteinstypus überaus reich. Die erwähnten Quarzlinsen allerdings können kaum als solche bezeichnet werden. Sie finden sich so oft und in so verschiedenen Dimensionen, daß sie als dem „Gneis" wesentliche Bildungen gelten müssen. Dies um so mehr als sie in geringen Mengen wenigstens immer noch Feldspat und Muskovit enthalten. Dagegen finden sich oftmals pegmatitische Nester und granitische wie aplitische Gänge. Bei der Herstellung des mehrerwähnten Eisenbahneinschnitts bei Iglersreuth aber wurde eine Menge von mehr oder weniger linsenförmigen, sich fettig anfühlenden, glimmerartigen Massen zutage gebracht. Es sind serizitische Aggregate und wohl als Reibungsprodukte, welche bei der Verschiebung fester Bestandteile der Erdrinde gegeneinander entstanden sind, zu betrachten.

Was den chemischen Typus anlangt, so ist vor allem zu erwähnen, daß jene Unbeständigkeit in der Zusammensetzung, welche Gesteine, bei deren Bildung nicht sowohl die Gesetze der chemischen Affinität als rein mechanische Kräfte sich auswirkten, naturgemäß charakterisiert, in dem großen Gneiskomplex fortgesetzt zu beobachten ist. Es ist augensichtlich, wie in den verschiedenen Gesteinsproben bald der Quarz bald der Feldspat die unbestrittene Vorherrschaft gewinnt. Und die chemische Analyse besiegelt die Richtigkeit der mikroskopischen Untersuchung. Nach Gümbel wechselt bei vier Probestücken aus diesem Gneisterritorium der Kiesel-

säuregehalt zwischen 66,030 % und 80,225 %. Sodann läßt der Reichtum an Tonerdesilikaten, wie Sillimanit, Granat, Andalusit, Glimmer und so fort sowie das Auftreten von Spinelliden auf einen hohen Tonerdegehalt bei der Mehrzahl der Gneisvorkommnisse schließen und endlich deutet das sehr beachtenswerte Auftreten von reichlichem Prehnit und Epidot auf größere Quantitäten Kalks in den Schiefern.

Von größter Wichtigkeit sind aber nun die verschiedenen Strukturordnungen, welche bei dieser Gesteinsklasse auftreten und ihr ein eigenartiges Gepräge aufdrücken. Was in dieser Richtung vor allem in das Auge fällt, das ist die weitgehende Parallelordnung der Gemengteile. Dieselbe ist ja wohl zuweilen etwas verschleiert. Da, wo die Schiefer dem eruptiven Herd nahe liegen, entwickelt sich manchmal eine typische Hornfelsstruktur. Aber im allgemeinen ist jene Parallelordnung evident. Mit ihr verbindet sich fast allenthalben eine mehr oder weniger deutliche Sonderung der Gesteinselemente. So zeigt der „Gneis" von Oedwaldhausen eine ausgesprochene Lagenstruktur. Ein schönes Beispiel für die zentrische Strukturform liefert der „Gneis" von Versdorf, in dem um größere Granatkristalle als Strukturkerne sich Glimmermineralien wie ein Kranz herumlegen. Den Vergleich der kristallinen Schiefer in ihren strukturellen Beziehungen mit einem Palimpsest rechtfertigt so recht augensichtlich der transversale Gneis von Wondreb, in welchem Schicht- und Schieferstruktur nebeneinander auftreten. Die ursprüngliche Schichtung ist hier durch ein zu ihr senkrecht stehendes Kluftsystem durchschnitten, welches als Schieferung zu bezeichnen ist. Wichtiger als die Lagen- und Ocellarstruktur und die transversale Schieferung ist die echte Schieferung, welche gern in die flasrige Strukturform übergeht. Gümbel bezeichnet den Gneis unseres ganzen Distriktes als „Schuppengneis." „Das Eigentümliche dieser Gneisvarietät, schreibt er, besteht in dem schuppigen, dichten glimmerartigen Gemengteil, welcher meist das Aussehen besitzt, als sei er nur eine dichtverfilzte, schalige, graue Glimmer-

substanz, die in Glimmerschuppen gleichsam übergeht, oft auch die Beschaffenheit eines seidenglänzenden, weißen Minerals annimmt und sich dem Buchholzit anzunähern scheint. Zuweilen tritt diese Substanz zurück und dafür nimmt eine schalig-schuppige Anhäufung von braunem und weißem Glimmer in innigster Zusammenmengung ihre Stelle ein." Was den Gneis unseres Gebietes fast allerwärts vorzugsweise charakterisiert, das sind eben die schieferigen und flasrigen Strukturtypen, bei denen Biotit, Muskovit und Chlorit vielfach verbunden mit einem größeren oder geringeren Reichtum an Sillimanit und anderen der aufgeführten Mineralien sich zu kontinuierlichen Häuten zusammenschließen, um die einzelnen Quarz-Feldspatlagen mehr oder wenig ebenflächig voneinander abzugrenzen oder flaserig zu umhüllen. Am bedeutsamsten aber unter all den verschiedenen Strukturarten, wie sie unser Gneisgebiet zeigt, ist die structure granulitique. Sie ist es, welche auf die genetischen Beziehungen und Verhältnisse ein helles Licht wirft. Auf sie wird im weiteren Verlauf dieser Abhandlung noch zurückzukommen sein. Nach dieser Darstellung des Mineralbestandes und der Struktur sind die nötigen Voraussetzungen für eine Systematik der einzelnen Gneisvorkommnisse unseres Gebietes gegeben. Man kann eine solche auf Grund der mineralischen Konstitution, der Strukturformen und der genetischen Verhältnisse versuchen und durchführen. Macht man das Auftreten oder Fehlen einzelner charakteristischer Mineralien zum Einteilungsprinzip, so kann man Chlorit-, Andalusit-, Prehnit- und Epidotgneise unterscheiden. Eine Gliederung in Sillimanit-, Cordierit- und Granatgneise, wie sie sonst wohl vorgenommen wird, scheint untunlich zu sein. Zwar konnte nicht jedes dieser Mineralien in jedem Schliff nachgewiesen werden. Aber im allgemeinen müssen diese Bestandteile, von einer einzigen Lokalität abgesehen, doch als allverbreitet gelten und der Eintritt beziehungsweise Mangel des einen oder des andern dieser Mineralien als eine zufällige Erscheinung betrachtet werden. Dagegen scheint die Ausscheidung der oben genannten Varietäten wohl berechtigt und

durchführbar. Gümbel unterscheidet neben dem typischen lediglich einen grünen Schuppengneis. „In manchen Varietäten schreibt er, nimmt der dichte schuppige Bestandteil mehr die Beschaffenheit eines grünen Glimmers oder einer chloritischen Substanz an. Aus dieser Abänderung bildet sich allmählich eine Modifikation des Gneises heraus, bei welcher der intensiv braune Glimmer fehlt oder selten wird, dafür aber ein mattgrüner eintritt.“ Die Untersuchung des „Gneises“ von Neustadt a. d. Wn. bestätigt dies im allgemeinen. In zwei Gesteinsproben bildet der optisch negative Chlorit mit kleinem Achsenwinkel den hauptsächlichsten farbigen Gemengteil. Man kann jene Gneisspielart Chloritgneis nennen. Sehr charakteristisch aber ist für den „Gneis“ in der Umgebung von Floß das sonst nur ausnahmsweise beobachtete Auftreten von Prehnit und Epidot. Ebenso wurde Andalusit nur in dem Gneis von Tirschenreuth und Bergnersreuth nachgewiesen. So dürfte neben der Aufstellung von Chloritgneis auch die Abtrennung von Prehnit-Epidot- und Andalusitgneis gerechtfertigt sein. Etwas Fließendes hat diese Klassifikation ohne Zweifel. Zu dem grünen Schuppengneis rechnet Gümbel jenen Gesteinskomplex, der von Erbendorf in südlicher Richtung gegen Leuchtenberg hinstreicht, immer an den Rand des Granitmassivs sich haltend. Aber einerseits findet man in diesem Gneisgebiet Vorkommnisse, in denen neben Chlorit der braune Biotit nicht bloß auftritt sondern prädominiert, andereits ist auch an anderen Orten, wie z. B. Tirschenreuth, außer Biotit auch Chlorit in reicher Entwicklung zu konstatieren. Und so mag auch Andalusit außer den angeführten Lokalitäten sich noch an manchen anderen einstellen. Aber Übergänge und Zwischenglieder sind auch sonst in der petrographischen Systematik keine seltene Erscheinung.

Strukturelle Eigentümlichkeiten berechtigen den Schuppengneis unseres Gebietes von dem „Dichroitgneis“ Gümbels, wie er im Bayerischen Wald vielfach verbreitet ist, abzutrennen. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß bezüglich des Mineralbestandes zwischen diesen beiden Gneisabarten kein nennens-

werter Unterschied besteht. Zwar waren in dem ersteren verschiedene Mineralien nicht zu finden, welche in dem letzteren vorhanden sind. So konnten Aluminit, Winnebergit, Pissophan, Hisingerit, Thraulit, Jollyt u. a. mehr oder weniger seltene Bildungen nicht entdeckt werden. Es mag dies aber weniger in dem Mangel an diesen Mineralien als in dem Fehlen so guter Aufschlüsse, wie sie sich bei Bodenmais finden, gelegen und begründet sein. Sonst zeigt sich eine große Übereinstimmung in der mineralischen Zusammensetzung der beiden Gneisvarietäten. Cordierit mit typischer Umwandlung in Pinit, Sillimanit, Andalusit, Granat und Spinell sind die charakteristischen Gemengteile, welche beide Gneisarten miteinander gemein haben. Auch die eigenartigen Einlagerungen von Magnet- und Schwefelkies finden sich bei beiden Gneisarten. Was man den eisernen Hut nennt, ist hier und dort vertreten. „Durch die Zersetzung des Schwefelkieses, schreibt Gümbel, sind die an vielen Orten bekannt gewordenen, meist nur oberflächlichen Brauneisenerzputzenwerke entstanden.“ Daß unserem Gneisgebiet überhaupt der Erzadel nicht fehlt, beweisen schon Ortsbezeichnungen wie Pleistein, Silberhütte, Goldbrunnen. Selbst in nebensächlichen Kleinigkeiten ist eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den beiden Gneisspielarten nicht zu verkennen. „Sehr bemerkenswert, schreibt Gümbel mit Beziehung auf den Dichroitgneis, sind die wasserhellen Knollen von Quarz, welche mit völlig abgerundeter, glatter Oberfläche in Form von kartoffelähnlichen Knöllchen in Kies eingesprengt vorkommen.“ Bei Plößberg wurde im Schuppengneisgebiet eine Quarzbildung gefunden, welche in der äußeren Gestalt genau der Form jener Erdfrucht gleicht. Es sind im letzten Grund nur strukturelle Eigenarten, welche den Unterschied von „Schuppen- und Dichroitgneis“ begründen. Will man den Schuppengneis unseres Gebietes nach Merkmalen der Struktur gliedern, so kann man ihn teilen in Hornfels, Lagengneis und Flasergneis. Die Vorkommnisse von Tirschenreuth, Ödwaldhausen und Schlattein liefern dafür typische Beispiele.

Wichtiger und gerade für die vorliegende Arbeit bedeut-

samer als die Klassifikation nach Bestand und Struktur ist die nach den genetischen Verhältnissen. Nach diesen lassen sich mit Sicherheit zwei Arten von „Gneis" unterscheiden. Es ist der „Ortho- und der Metagneis". Möglicherweise gehören einzelne Vorkommnisse dieses Distrikts auch in die Kategorie der „Paragneise". Deutlich und scharf heben sich die beiden erstgenannten Gneisarten voneinander ab. Zu dem Orthogneis ist das Vorkommen von Ödwaldhausen zu rechnen. Gümbel erklärt allerdings, daß eruptive Gneismassen in unserem Gebiete entschieden nicht vorkommen und daß nirgends an uns die Nötigung herantrete, andere Ursachen der Schichtung zu suchen, als die der Sedimentation sind. Aber die bei der Herstellung der Bahneinschnitte unweit Ödwaldhausen zutage geförderten Gesteine sind Eruptivbildungen. Sie tragen makroskopisch und mikroskopisch viel von den Charakteren an sich, welche für die „Gneise" als bezeichnend gelten. Sie bekunden schon bei der Betrachtung mit unbewaffnetem Auge nicht bloß eine deutliche Parallelordnung der Gemengteile, sondern auch eine weitgehende Sonderung derselben. Sie sind es, denen die ausgeprägte Lagenstruktur eignet. Bei der mikroskopischen Untersuchung aber fällt sofort der Mangel einer gesetzmäßigen Sukzession der Mineralausscheidungen auf. Der Apatit, sonst als Erstling der Kristallisation vielfach in langen Nadeln und wohlbegrenzten prismatischen Kristallen ausgebildet, erscheint in unregelmäßigen Körnern. Es kommt wohl vor, daß der Quarz den Biotit umschließt, aber auch die Erscheinung ist nicht selten, daß der Biotit Quarzeinschlüsse führt. Die poikilitische Durchwachsung der Feldspate mit Quarzkörnern ist überaus häufig wahrzunehmen. Die Formengestaltung nicht bloß des Orthoklases sondern auch der Plagioklase ist vielfach durch Quarzausscheidungen beeinflußt. Anderseits aber unterscheiden sich diese Gesteine doch augensichtlich von den übrigen Gneisarten. Außer ihrer Lagenstruktur ist es besonders ihr Mineralbestand, durch den sie sich von den übrigen Gneisbildungen abheben. Sie sind es, die weder Cordierit noch Andalusit noch Granat führen. Sillimanit

findet sich zwar stellenweise, tritt aber anderwärts bis zum Verschwinden zurück. Auch Magnet- und Schwefelkies, sonst so häufig, fehlen hier. Ihre Mineralparagenesis ist die der Granite. Es kann kaum zweifelhaft sein, daß in diesen Gesteinen eruptive Bildungen vorliegen, welche durch die Besonderheit der örtlichen Verhältnisse die Erscheinungsform kristalliner Schiefer erhielten. Ob Paragneise vorhanden, mag dahingestellt bleiben; die große Mehrzahl der tonerdesilikatreichen, schiefrig flasrigen Bildungen sind zu den Metagneisen zu zählen. Sie werden noch besonders besprochen werden müssen, wenn einmal die Gesamtheit der genetischen Beziehungen zur Erörterung gelangt.

Glimmerschiefer.

An dem nördlichen Ufer der Wondreb zieht sich eine Bergkette hin, welche durch eine Reihe von mehr oder minder tiefen Taleinschnitten mannigfach gegliedert erscheint. Das Gesteinsmaterial dieser Bergreihe ist „Glimmerschiefer." Es ist eine lange, aber verhältnismäßig schmale, einerseits von „Phyllit" und „Quarzphyllit", anderseits von „Gneis" und quartären Sedimenten begrenzte Zone, welche dieses Gestein bildet. Der „Glimmerschiefer" setzt sich aus Glimmer und Quarz als herrschenden Gemengteilen zusammen. Akzessorisch erscheinen verschiedene Eisenerze und Zirkon. Als ein charakteristischer Übergemengteil tritt Andalusit sehr häufig auf. Turmalin und Rutil fehlen fast nie. Sehr häufig ist auch Graphit. Mehr zufällig sind Feldspate und Titanit. Als Einschluß findet sich nicht selten ein eigenartiges, unten näher zu beschreibendes Mineral. Chlorit ist wohl meist Umwandlungsprodukt.

Von den Glimmermineralien sind Biotit, Muskovit und Serizit vertreten. Der Biotit zeigt im allgemeinen dieselben Eigenschaften bezüglich der Verteilung im Gestein, der Einschlüsse und der aus ihm hervorgehenden Neubildungen wie im Gneis. Zu bemerken ist nur, daß er nicht selten in grüner Farbe erscheint, wobei die Höhe der Doppelbrechung verbietet,

diese Farbenverschiedenheit durch Chloritisierung bedingt zu denken. Damit soll indes nicht in Abrede gestellt werden, daß der Chlorit vielfach das Umwandlungsprodukt des Biotits ist. Nie ist der letztere das einzige Glimmermineral. Mit ihm ist vielmehr stets in wechselnder Menge Muskovit verbunden. Derselbe ist öfters rosettenförmig geordnet, meist aber parallel mit Biotit verwachsen, vor dem er durch seinen guten Erhaltungszustand ausgezeichnet ist. Serizit ist durch seinen kleinen Achsenwinkel deutlich von Muskovit unterschieden. Er findet sich sehr häufig als Umrahmung des Andalusits und ist jedenfalls als Zersetzungsprodukt desselben anzusehen. Die einzelnen mikroskopisch kleinen Individuen sind sehr verschieden orientiert, so daß diese Glimmeraggregate zwischen gekreuzten Nikols niemals völlig dunkel erscheinen.

Die eckigrundlichen Quarzkörner führen nicht selten zahlreiche Einschlüsse. Zuweilen sind es Glimmerleistchen, welche sie beherbergen, zuweilen stabförmige Mikrolithe, welche sehr viel Ähnlichkeit mit Sillimanit verraten. Manchmal sind auch von den Rändern her fremde Mineralien in den Quarz hineingewachsen. Durch Libellenbildung deutlich charakterisierte Flüssigkeitseinschlüsse sind keine Seltenheit. Die Körneraggregate bilden linsenförmige Massen und kontinuierliche Lagen, die von Glimmermineralien eingefaßt sind. Auch förmliche Quarzgänge treten auf, in denen die einzelnen Individuen oft einen hochgradigen Idiomorphismus erreichen. Und diese gute kristallographische Umgrenzung scheint durchaus primär zu sein. Zwar sind in manchen Individuen die Einschlüsse zentral gehäuft, so daß es den Eindruck erwecken könnte, als ob diese regelmäßige Formentwickelung durch orientierte Anwachshüllen, wie in den sogen. Kristallsandsteinen bedingt wäre; aber diese Häufung der Einschlüsse ist nicht eine konstante Erscheinung und nirgends ist eine scharfe Grenze zwischen einem allenfallsigen ursprünglichen Quarzkorn und einer Fortwachsung durch Kieselzement zu entdecken.

Unter den Eisenerzen ist der Eisenglimmer weitaus am stärksten vertreten. Die hexagonalen, stark glänzenden Täfel-

chen werden öfters mit roter Farbe durchsichtig. Das Titaneisen, auch nicht gerade selten, erscheint in der glimmerartigen, braundurchsichtigen Varietät. Der Pyrit ist in Eisenoxydhydrat umgewandelt, aber seine charakteristische Kristallform läßt die Umwandlungsprodukte mit Sicherheit als Pseudomorphosen erkennen. Der Zirkon ist hin und wieder überaus häufig; selten aber tritt er in prismatischen Kristallen auf. Der Andalusit liebt es in großen Individuen zu erscheinen. So erreichte ein Kristall in der Hauptentwickelungszone die verhältnismäßig respektable Höhe von 9,86 mm. Von seiner Häufigkeit in diesem Gestein zeugt die Tatsache, daß in einem einzigen normalen Schliff 20—30 mehr oder minder große Individuen zu zählen sind. Fast immer gibt er sich leicht durch seinen bezeichnenden Pleochroismus von blaßrot nach farblos zu erkennen. Stets ist er von Einschlüssen vollgepfropft. Es sind besonders die Hauptkomponenten des „Glimmerschiefers", die ihn in großer Zahl erfüllen. Aber auch das kohlige Pigment häuft sich mit Vorliebe in ihm an. Zuweilen ordnet sich dasselbe in ihm zu dem bekannten Chiastolithkreuz. Oft ist er ganz und gar zu einem Haufwerk von glimmerartigen Mineralien zersetzt und es ist dann nur noch diese eigenartige Anordnung der kohligen Substanz, die Aufschluß über das ursprüngliche Mineral erteilt. Bei gutem Erhaltungszustand tritt die prismatische Spaltbarkeit scharf hervor. Während der Andalusit mikroskopische Dimensionen meidet, erscheint der Turmalin ausschließlich in winzigen Individuen. Manche Gesteinsprobe schließt eine reiche Fülle dieses Minerals ein. Schnitte ⊥ zur Hauptachse zeigen oft scharfe ditrigonale Umgrenzung, solche ∥ zur Hauptzone die hemimorphe Ausbildung. Die Absorption ist normal, die Farbe wie in den Gneisen. Auch der Turmalin ist häufig erfüllt mit kohligen Einschlüssen. Rutil erscheint öfters in feinen Fasern bei der Umwandlung des Biotits in Chlorit; trägt aber auch manchmal die Form und Farbe wie das Vorkommen in den Eklogiten und Amphiboliten. Der Titanit tritt nur in der Form der Insekteneier auf. Feldspat ist nur in den Schliffen von Themenreuth nach-

zuweisen. Der starke Metallglanz des kohligen Pigmentes berechtigt, es mit Graphit zu identifizieren.

Was schließlich das oben erwähnte, häufig als Einschluß im Andalusit auftretende Mineral anlangt, so hat es bei optisch positivem Charakter negative Hauptzone. Die Ebene der optischen Achsen liegt parallel der Hauptentwickelungszone und senkrecht zu der höchst vollkommenen Spaltbarkeit. Seine Lichtbrechung ist erheblich geringer als die des Andalusits und seine Doppelbrechung ungefähr so stark wie die des Sillimanits. Seine Auslöschungsschiefe ist auch in den Schliffen ∥ zur optischen Achsenebene nur unbedeutend. Ganz auffallend ist die Erscheinung, daß diese Schliffe nicht das Maximum in der Höhe der Interferenzfarben zeigen.

Der Mineralbestand dieser Gesteine ist an den verschiedenen Fundstätten verschieden. In dem „Glimmerschiefer" von Themenreuth halten sich Kali- und Magnesiaglimmer so ziemlich das Gleichgewicht; in dem von Rothenberg hat der Muskovit die Vorherrschaft. In den Gesteinen von Größensees tritt der Glimmer überhaupt sehr zurück und es vermittelt sich so der Übergang in die nahegelegenen Quarzitschiefer. Mit dem Mineralbestand wechselt auch die Farbe der Gesteine von braungelb zu weißlichgrau. Reichliche Limonitbildung verleiht den Schiefern von Größensees eine gelbliche Färbung.

Von den verschiedenen Strukturformen herrscht die schieferig flasrige vor. Quarzarme und glimmerreiche Schichten wechseln mit quarzreichen und glimmerarmen und nicht selten werden sowohl Quarzlinsen als auch größere Kristallindividuen von Flaserzügen der Glimmermineralien umflochten. Zuweilen wird die Struktur porphyrartig. Indem die Quarzkörner im allgemeinen nur 0,016—0,217 mm im Durchmesser halten, während die Andalusite Zentimetergröße erlangen, bildet sich ein scheinbarer Gegensatz von Grundmasse und Einsprenglingen heraus. Auf dem Hauptbruch zeigt sich zuweilen eine äußerst feine Fältelung, welche sich unter dem Mikroskope als eine Art Sattel- und Muldenbildung darstellt. Gleichwohl sind kataklastische Erscheinungen nur in sehr geringem Maaße vor-

handen. In den Gesteinen ohne jene Miniaturgebirgsfaltung sind kaum Spuren einer dynamischen Beeinflussung zu finden. Es liegt auf der Hand, wie wichtig gerade diese Tatsache für die richtige Deutung der Glimmerschiefergenese ist. Beachtenswert ist in dieser Hinsicht aber auch die Anordnung der Pseudoeinsprenglinge. Dieselben folgen nicht den Kristallisationsgesetzen des Wirtes, sondern behalten die Orientierung bei, welche ihresgleichen im übrigen Gesteinsgewebe innehaben. Manche Biotitblättchen scheinen hinsichtlich ihrer Lage nicht durch das Schichtgefüge bedingt zu sein, indem sie sich quer zur Schieferung stellen. Solche Biotitindividuen sind in der Regel prismatisch ausgebildet, so daß sie nach der C-Achse gestreckt erscheinen. Die wichtigste aller Struktureigentümlichkeiten aber ist das Auftreten zahlreicher Knötchen, in denen die Andalusit- und die Graphitsubstanzen angehäuft sind.

Phyllit und Quarzphyllit.

Unweit Mitterteich wendet sich die Wondreb in scharfem Bogen gegen Norden. Gerade da, wo der Flußlauf von der westlichen in die nördliche Richtung umbiegt, steigen die Gehänge, welche das rechte Ufer desselben begleiten, ziemlich steil an. Droben auf der Bergeshöhe liegt das Dorf Leonberg mit seiner prächtigen Fernsicht. Hier ist die Grenze zwischen Glimmerschiefer und Phyllit, die von da aus in östlicher Richtung hinläuft. Gegen Nordosten liegt, etwa eine halbe Stunde entfernt, Zirkenreuth. Hier geht der Phyllit bereits in Quarzphyllit über. Beide Gesteinstypen sind so nahe miteinander verwandt, daß sie füglich miteinander behandelt werden können. An dem Aufbau derselben beteiligen sich im großen und ganzen dieselben Gemengteile in derselben Ausbildung und derselben Verteilung wie an der Zusammensetzung des Glimmerschiefers. Der Unterschied tritt mehr makroskopisch als mikroskopisch hervor, indem die Glanzschiefer den Eindruck geringerer Kristallinität machen. Die Darstellung des Mineralbestandes kann sich deshalb auf einige wenige Bemerkungen beschränken.

Gümbel bezeichnet es als eine auffallende Erscheinung, daß sich nirgends Spuren von braunem, optisch einachsigen Glimmer bemerken lassen. „Derselbe scheint, schreibt er, von dem Phyllochlorit vollständig ersetzt zu werden.“ Tatsache aber ist, daß sich in dem Gestein von Zirkenreuth sehr viel brauner Glimmer vorfindet. Und ist derselbe auch nicht geradezu optisch einachsig, so ist doch sein Achsenwinkel durchweg so klein, daß er bis auf 0° herabzusinken scheint. Bezeichnend ist seine lappige Ausbildungsform. Den weißen, in dünnen Blättchen ausgebildeten, seidenartig schimmernden Bestandteil der Phyllite nennt Gümbel Promizit. Die mikroskopische Untersuchung von Gesteinsproben aus Leonberg und Zirkenreuth bietet keinen Anlaß, dieses Mineral von Muskovit abzutrennen. Es stimmt hinsichtlich der Ausbildungsform, Licht und Doppelbrechung, Größe des Achsenwinkels und Zwillingsbildung so mit dem Kaliglimmer überein, daß es wohl mit diesem als identisch zu betrachten ist. Der sehr reichlich vertretene Chlorit zeichnet sich vor dem Glimmer durch seine Korngröße aus. Nicht selten ist er zu Putzen ohne gesetzmäßige Anordnung zusammengehäuft; häufig aber sind die putzenförmigen Aggregate gitterartig ineinander verflochten; auch radialstrahlige Gruppierung zeigt sich zuweilen. Gümbel bezeichnet das chloritische Mineral als Phyllochlorit. Es scheint aber zu einer solchen Spezialisierung ebensowenig Grund vorzuliegen wie zu der Abtrennung des Promizits von Muskovit. Zirkon wird von Gümbel nicht aufgeführt, ist aber oft reichlich zugegen. Im übrigen ist nur noch zu erwähnen, daß auch Granat sich nicht selten einstellt. Er ist ebenso wie der Andalusit oft mit zahlreichen Einschlüssen angefüllt. Hinsichtlich der Struktur ist ebenso wie bezüglich der mineralischen Konstitution große Übereinstimmung mit den Verhältnissen bei dem Glimmerschiefer zu konstatieren. Zu bemerken ist nur, daß sich diese Gesteine meist aus sehr dünnen Schichten aufbauen und daß sich auf dem Hauptbruche die Glimmerblättchen zu schimmernden Häuten zusammenschließen, von denen sich oft Flecken mit grünlicher Färbung mehr oder

weniger scharf abheben. Quarzadern endlich durchziehen auch diese Gesteine nach den verschiedensten Richtungen.

Lydit.

Oberhalb Dobrigau finden sich Einlagerungen im Glimmerschiefer, welche auf der geologischen Karte als Lydit bezeichnet werden. Sie besitzen nur eine sehr geringe Ausdehnung. Ihr Mineralbestand ist äußerst einfach. Sie bestehen im wesentlichen nur aus einem sehr feinkörnigen Gemenge von Quarz. Außerdem finden sich in geringen Mengen Glimmermineralien. Biotit wird als Einschluß im Quarz mit brauner Farbe und starkem Pleochroismus durchsichtig. Sonst ist er meist grün gefärbt. Etwas häufiger, aber doch auch nur in Spuren, ist Muskovit. Es sind immer nur kleine Individuen, die sporadisch in den einzelnen Proben verbreitet sind. In einem Schliff wurde ein verhältnismäßig großes Magnetitkorn gefunden. In feiner Verteilung sieht man im Gestein ein kohliges, zuweilen stark glänzendes Pigment. Makroskopisch erscheint das Gestein völlig dicht. Unter dem Mikroskop aber erweist es sich doch als ein Gemenge von feinen Quarzkörnern mit Spuren von Glimmer. Das kohlige Pigment verleiht dem Gestein eine intensiv dunkle Farbe, ähnlich derjenigen der Tonschiefer und Schiefertone. Der Bruch ist im großen flachmuschelig, im kleinen splitterig, die Struktur ist deutlich schichtig. Auf dem Hauptbruch fällt eine gewisse Unebenheit auf. Es sind wellenförmige Furchen, die sich, gleichsinnig geordnet, über die Schichtfläche hinziehen. Auch feine, nadelstichförmige Poren zeigen sich allenthalben. Die eckigrundlichen, unregelmäßigen Quarzkörner erscheinen im Schliff manchmal in zeilenförmiger Anlage. Von einem Gegensatz zwischen klastischem Material und Zement kann nicht gesprochen werden. Die einzelnen Körner greifen gelenkartig ineinander ein, wobei sich das kohlige Pigment gern auf den Grenzlinien sammelt und gleichsam die einzelnen Körner umrahmt. Wie Fremdkörper ziehen sich manchmal angenähert parallel, meist aber regellos Quarzadern von verschiedener

Größe und Mächtigkeit durch das Gestein. Sie heben sich durch zwei Merkmale von dem eigentlichen Gesteinsmaterial scharf ab. Vor allem sind sie durch eine erheblich bedeutendere Korngröße ausgezeichnet. Sie erreichen zuweilen Dimensionen von 1,3 mm, während die mittlere Größe der übrigen Körner nur etwa 0,02 mm beträgt. Sodann erscheinen sie wasserhell und ohne jede Pigmentierung. Sie sind jedenfalls als spätere Infiltrationen zu betrachten.

Es ist gar nicht zu bestreiten, daß dieses Gestein makroskopisch mit dem Lydit sehr viel Ähnlichkeit hat. Der mikroskopischen Untersuchung aber kann es nicht entgehen, daß ihm verschiedene Charaktere fehlen, die für diesen Gesteinstypus als wesentlich gelten.

Rosenbusch rechnet den Lydit zu den Gesteinen, die sicher nicht klastischen Ursprungs sind und er bezeichnet ihn als eine Bildung, welche vorwiegend aus einem Gemenge von dichtem Quarz mit Chalcedon und etwas Opal besteht. Auch Gümbel führt als Bestandteil des Lydits amorphe Kieselsubstanz an. Er unterscheidet zwar Varietäten mit mehr und solche mit weniger amorpher Masse. Aber so schwankend das Verhältnis zwischen kristallisierter und nicht kristallisierter Substanz in den verschiedenen Vorkommnissen auch sein mag, ein kleiner Betrag an Kristallisationsrückstand ist nach ihm als bezeichnendes Merkmal immer vorhanden. In dem Gestein von Dobrigau aber findet sich weder Chalcedon noch amorphe Kieselsubstanz. Reste von Radiolarien, Diatomeen und anderen Organismen sind dem Lydit zwar nicht wesentlich; aber sie finden sich öfters in ihm. Hier ist keine Spur von ihnen zu entdecken. Nichts deutet auf biogenen Ursprung. Dagegen lassen die abgerundeten, unregelmäßigen Quarzkörner auf Transport durch ein bewegendes Medium schließen. Unter diesen Umständen scheint die Annahme wohlbegründet, daß in dem Gestein von Dobrigau nicht Lydit, sondern Quarzit vorliegt. Der Reichtum an kohliger Substanz kann gegen diese Diagnose nicht sprechen. Derselbe ist auch in größerem Maße in dem benachbarten „Glimmer-

schiefer" anzutreffen. Der angebliche Lydit ist nichts als eine Modifikation des Glimmerschiefers. Er ist ein Glimmerschiefer, in dem der Gehalt an Glimmer dem Quarz gegenüber stark zurückgeht. Gümbel macht bei der Besprechung der Graphitgneise des Bayerischen Waldes darauf aufmerksam, daß die Häufigkeit des Graphits und des Biotits im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen. Mit der Zunahme des kohligen Pigments nimmt auch hier der Glimmer ab. Es ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß diese Zu- und Abnahme in ursächlichem Zusammenhang miteinander stehen. Will man die Schichtnatur dieses Gesteins noch zum Ausdruck bringen, so kann man es als Quarzitschiefer bezeichnen.

Wechselbeziehungen zwischen den Eruptivgesteinen und den kristallinen Schiefern.

Es hat sich bei der Untersuchung der einzelnen Gesteinstypen ergeben, daß eine Anzahl von Felsarten von vorneherein aus der Reihe der sogenannten kristallinen Schiefer auszuschalten ist. Hornblendegneis und Hornblendeschiefer, Dioritschiefer, Granulit und Serpentin sind als reine Eruptivgebilde zu betrachten. Selbst der Orthogneis muß zu diesen gerechnet werden. Die Hornblendegesteine sind gabbroide Bildungen. Der Dioritschiefer ist nur eine strukturelle Modifikation des normalen Diorits. Die Granulite sind als gangartige, aplitische Gebilde anzusprechen; der Serpentin stellt sich als metamorphosierter Peridotit dar. Und was den Orthogneis anlangt, so ist dies ein echter Granit, der aller Wahrscheinlichkeit nach nur durch Druckwirkung eine gneisartige Erscheinungsform erhalten hat. Als Gesteinsarten nicht eruptiven Ursprungs bleiben sonach lediglich Metagneis, Glimmerschiefer, Phyllit und Quarzphyllit sowie Lydit oder Quarzitschiefer.

Die Hauptfrage aber, welche sich nach diesen Feststellungen ergibt, ist die Frage nach dem Verhältnis der zweifellos eruptiven Bildungen zu den als kristalline Schiefer bezeich-

neten Gesteinen ihrer Umgebung. Dieses Verhältnis aber muß sogleich beim Beginne der Erörterung als ein sehr enges und nahes bezeichnet werden. Eine genaue Untersuchung des mineralischen Bestandes, der strukturellen Verhältnisse und der geologischen Erscheinungsform muß zu der Überzeugung führen, daß beide Gesteinsklassen nicht vollständig unabhängig voneinander sind, sondern in den innigsten Wechselbeziehungen zueinander stehen. Bestand und Struktur der Eruptivgesteine zeigen sich beeinflußt durch die angrenzenden Schiefer und hinwieder lassen die Schiefer in ihrer mineralischen Zusammensetzung und in ihrem Gefüge die Einwirkung der Eruptivmassen klar erkennen. Gesteinsproben aus Münchsgrün, Tirschenreuth, Plößberg u. a. O. liefern die schönsten Illustrationen für das gegenseitige Abhängigkeitsverhältnis jener beiden Gesteinsklassen. Nach der Darstellung Gümbels allerdings muß der Zusammenhang derselben als ein ziemlich lockerer angesehen werden. Von einer beiderseitigen Beeinflussung kann nach ihm höchstens in rein mechanischem Sinne die Rede sein. „Soweit unsere Beobachtungen reichen, erklärt dieser Forscher ausdrücklich, lassen sich bei all diesen Berührungen einer offenbar eruptiven Gesteinsmasse mit schon vorausgebildeten kristallinischen Schiefern dadurch hervorgebrachte Veränderungen in der Beschaffenheit nicht wahrnehmen." Aber die mikroskopische Untersuchung begegnet derartigen Veränderungen so vielfach, daß die Auffassung jenes scharfen Beobachters nicht mehr haltbar erscheint.

Untersucht man nun die Wechselbeziehungen der beiden in sehr nahem Verhältnis zueinander stehenden Gesteinsklassen, so dürfen zwei Tatsachen vor allem als feststehend gelten. Einmal, daß die Eruptivgesteine als aus Schmelzfluß erstarrte Massen und sodann, daß die kristallinen Schiefer unseres Gebietes als ursprünglich normale Sedimente zu betrachten sind. Gümbel erklärt auch die Eruptivgesteine als Produkte der Sedimentation. Wasser, erhöhter Druck und Wärme sind nach ihm auch für sie die Faktoren, die sie bedingt haben. Granit und Gneis haben nach seiner Schilderung

das miteinander gemeinsam, daß sie sedimentiert sind und sie unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß der erstere sich als ein massenhafter Niederschlag darstellt, während der letztere sein mannigfach gegliedertes Schichtensystem ganz allmählich unter fortwährender Änderung des Absatzprozesses und des Absatzmateriales herausgebildet hat. Es ist bei dem gegenwärtigen Stand der Anschauungen nicht nötig, alle die Einwände, welche dieser Autor unter Berufung auf Scheerer, Bischof, Delesse, Rose, Sorby, Fuchs u. a. gegen die pyrogene Natur der Eruptivgesteine erhoben hat, eingehend zu erörtern. Es genügt, auf die Ausführung Rosenbuschs zu verweisen: „Nun zeigen uns die geologischen Vorgänge der Jetztzeit eine Extrusion von Gesteinsmassen nur im Zustande vollständigen oder partiellen Schmelzflusses. Wir vindizieren daher durch Analogieschluß allen Eruptivgesteinen die Verfestigung aus Schmelzfluß und können die Richtigkeit dieser Deduktion in zahllosen Fällen durch das Studium ihres Bestandes und ihres Gefüges mit solcher Evidenz erhärten, daß eine Verallgemeinerung unbedenklich ist.“ Dagegen waren die kristallinen Schiefer ursprünglich zweifellos normale Sedimente.

Zwar ist es nicht richtig, daß die Lage der Gesteinselemente immer der Schichtenbildung folgt; es ist vielmehr eine gar nicht seltene Erscheinung, daß Glimmer- und Chloritblättchen sich quer zur Strukturebene stellen. Auch aus den Einlagerungen in den Schiefern sind zwingende Beweisgründe keineswegs zu ziehen. Aber der allmähliche Übergang der kristallinischen Schiefer in darauf liegende geschichtete Tongesteine und der Parallelismus der Schichtenfugen der beiden Gesteinsarten sowie die in ihnen zu beobachtende Gleichsinnigkeit der Dislokationswirkungen lassen keinen Zweifel über die ehemalige Natur der „kristallinischen Schiefer“ aufkommen.

Der weitere Verlauf dieser Untersuchung aber wird den Beweis erbringen, daß die Beziehungen der nahe miteinander verknüpften Eruptivbildungen im modernen Sinne des Wortes und der in kristalline Schiefer umgewandelten, ursprünglich normalen Sedimente, so innige sind, daß die letzteren ihre

gegenwärtige Beschaffenheit nur dem Einfluß der ersteren verdanken. Rosenbusch schreibt im Eingang zu seiner Abhandlung über die kristallinischen Schiefer: „Die Prozesse, durch welche aus Eruptivgesteinen und Sedimenten irgendwelcher Art kristalline Schiefer wurden, faßt man zusammen als Dynamometamorphose und Kontaktmetamorphose.“ Es ist gar nicht in Abrede zu stellen, daß in dem Bereiche unseres Schiefergebietes dynamische Beeinflussungen stattgefunden haben. Die Schieferung, welche die Gneisschichten von Wondreb fast rechtwinklig durchschneidet, ist ohne Zweifel ein Resultat der Dynamometamorphose. Die feine Fältelung, welche der „Glimmerschiefer“ von Größensees zeigt, ist sicher als eine Druckwirkung zu betrachten. Und die kataklastischen Phänomene, welche allenthalben hervortreten, lassen gewiß auf mechanische Einwirkungen schließen. Aber diese Erscheinungen, und insbesondere die der Kataklase, sind doch zu unbedeutend, als daß man die Metamorphose der Schiefer auf den Druck gebirgsbildender Prozesse zurückführen könnte. Das ursprüngliche Gesteinssubstrat war ja allerdings Tonschiefer gewesen. Tonschiefer haben ein hohes Maß von Plastizität. Aber ihre Elastizitätsgrenze ist doch immer noch so eng, daß man bei der mikroskopischen Untersuchung der Kataklase in viel höherem Maß als es wirklich der Fall ist, begegnen müßte. Ja die mechanischen Wirkungen, wie sie hier zutage treten, sprechen direkt gegen die Theorie des Dynamometamorphismus. Die Glimmerschieferschliffe von Größensees lassen unter dem Mikroskop, wie oben hervorgehoben wurde, eine förmliche Sattel- und Muldenbildung erkennen. Aber gerade die Gesteinsproben, welche eine sehr weitgehende Fältelung zeigen, tragen sehr geringe kataklastische Erscheinungen an sich. Daraus geht aber mit unzweifelhafter Sicherheit hervor, daß die Wirkungen des Gebirgsdruckes der Mineralneubildung vorausgegangen sind. Dazu kommt noch ein Moment, das mit jener Theorie schwer in Einklang zu bringen ist. Man hat zu Gunsten derselben öfters auf die Tatsache hingewiesen, daß in den kristallinischen Schiefern sich die Tendenz

nahe, aus dieser Erscheinung auf Spannungen zu
ßen, wie sie bei einem enormen Seitendruck in Verbindung
leichzeitiger, bedeutender vertikaler Belastung sich ein-
müssen. Aber in unserem Gebiet ist von jener Tendenz
wahrzunehmen. Nirgends wurde Disthen, überall Anda-
gefunden. Grubenmann, welcher dem von ihm näher
kterisierten Dynamometamorphismus eine überaus wichtige
bei der Bildung der kristallinen Schiefer zuschreibt, be-
allerdings, daß das Volumgesetz nicht in allen Schiefer-
zur Auswirkung gelangen könne, aber er bezeichnet
Andalusit, Cordierit und Spinell als typische Kontakt-
ralien.[1]) Das überaus häufige Auftreten des spezifisch
eren Tonerdesilikates, wie es oben konstatiert wurde,
tet schlechterdings, die Umwandlung der ursprünglich
len Sedimente zu krystallinen Schiefern auf den Gebirgs-
als Agens zurückzuführen. So bleibt zur Lösung des
ems nur der Kontaktmetamorphismus. Er ist aber
in der Tat imstande, die verschiedenen Erscheinungen
digend zu erklären.

Zu den denkwürdigsten Erscheinungen im Gebiete des
ges, schreibt Gümbel, gehören die mannigfachen Bezie-
n des Granites zum Gneis. Weniger mächtige Lagen von
und linsenförmige Ausscheidungen desselben, von Gneis-
n umschlossen, gehören zu den gewöhnlichsten Vor-
nissen, die uns jedes Profil enthüllt. Ebensowenig fehlt
Beispielen, welche das Querdurchbrechen von mehr oder

zu tragen." Diese Ausführungen können im allgemeinen bestätigt werden. Die Gneisschichten, welche am Mühlbühl bei Tirschenreuth anstehen, sind ganz durchtränkt von gangartigen Abzweigungen des nahen Granits. Zwischen Iglersreuth und Bärnau sieht man Gneisschichten zutage gehen. Bei der Herstellung der Bahneinschnitte zwischen den beiden genannten Orten hat sich gezeigt, daß diese Schiefer ganz und gar von granitischen Gangverzweigungen durchschwärmt sind. Längs der Granitgrenze im Osten dringen an vielen Punkten Granitapophysen in das Schiefergebiet ein. An den steilen Naabgehängen bei Berg beobachtet man eine vielfache Durchaderung des Hornblendegesteins durch Granitschnüre. Bei Floß durchsetzen allenthalben derartige Gänge die Gneisschichten. Kurz um das ganze Granitmassiv herum kann man die Wahrnehmung machen, wie das Eruptivgestein gangartige Ausläufer in das Nebengestein versendet. Bald dringen dieselben zu größerer bald zu geringerer Entfernung vor, bald zeigen sie stärkere bald schwächere Mächtigkeit. Wie eine Amöba ihre Pseudopodien ausstreckt, so greift der Granit mit zahlreichen mehr oder minder mächtigen Armen in das Schiefergestein seiner Umgebung und hält es völlig umklammert.

Ja die geologische Verknüpfung der beiden Gesteinsklassen reicht noch weiter. Es wurde bei der Besprechung des „Gneises" hervorgehoben, daß es oft nur ganz schmale Granitstreifen sind, welche die einzelnen Gneisdistrikte voneinander trennen und daß der gesamte Gneiskomplex bei allen Abweichungen im einzelnen doch im großen und ganzen eine auffallende Konstanz in Bestand und Gefüge offenbart. Diese beiden Tatsachen lassen vermuten, daß das ganze Gneisgebiet ursprünglich ein zusammenhängendes Ganzes gebildet habe, das erst durch das Eindringen des Granits in verschiedene Teile auseinander gerissen worden ist. Sehr zutreffend schreibt Gümbel über die Verhältnisse bei Waldthurn: „Daß der Kristallgranit dieser Gegend als jüngere Bildung die Gneisformation durchbrochen habe, das beweisen zahlreiche Profile, welche das gangförmige Eindringen des Granites in den Gneis zeigen.

Daher ist das Schiefergebirg unendlich zerstückelt, viele seiner Stücke sind losgerissen und ganz von Granit umschlossen. Solche Schieferschollen, zum Teil Gneis, zum Teil Hornblendegestein, findet man im Granitgebiet bis Schönkirch." Es sind also nicht bloß einzelne Apophysen, die der Granit in die angrenzenden Schiefer ausschickt, sondern der ganze granitische Eruptivkörper stellt sich als eine mächtige Intrusion in die ursprünglich zusammenhängenden Gneisschichten dar.

Es wurde bei der Schilderung des Granites auf dessen Neigung zu porphyrartiger Ausbildung als bezeichnende Eigentümlichkeit hingewiesen. Diese auffallend häufig entwickelte Grenzstruktur, welche, wie früher bemerkt, zu der Bezeichnung „Kristallgranit" Anlaß gegeben, scheint darauf hinzudeuten, daß die granitischen Intrusivmassen weniger in große Hohlräume als in zahlreiche mehr oder minder weite Gangspalten hineingepreßt worden sind. Das reichverzweigte Netzwerk von granitischen Adern, wie es sich in dem der Denudation bis jetzt entgangenen Schiefergebirg so oft dem Auge darbietet und zweifellos noch öfter in der verschlossenen Tiefe verborgen sich ausbreitet, erscheint sonach nur als ein schwaches Abbild der Verhältnisse innerhalb des Granitgebietes selbst.

Mit der Entfernung vom Hauptgestein werden die gangförmigen Abzweigungen naturgemäß immer schwächer. Sie verästeln sich schließlich in die feinsten Zweige und Äderchen. Auch die mineralische Zusammensetzung erleidet dabei gewisse Veränderungen. Nahe dem Hauptgestein zeigen die Apophysen noch ganz normal granitischen Charakter. In weiterer Entfernung treten einzelne wesentliche Gemengteile stark zurück. Die letzten Ausläufer enthalten außer Quarz nur mehr wenig Muskovit und seltenen Feldspat. Und mit dem Mineralbestand wechselt auch die Korngröße in dem Sinne, daß dieselbe mit der Entfernung vom vulkanischen Herd mehr und mehr herabsinkt. Was endlich die Richtung dieser Ausläufer anlangt, so folgt dieselbe durchaus nicht immer den Schichtenfugen, sondern schneidet dieselben gar oft unter allen von 0°—90° möglichen Winkeln.

Bei einer derartigen Verbindung der Intrusiv- und Schiefermassen ist eine starke gegenseitige Beeinflussung von vorneherein zu erwarten. Und die Erwartung wird durch den Tatbestand der Verhältnisse, wie schon angedeutet, nicht getäuscht, sondern vollauf bestätigt. Die Einwirkung der Eruptivmassen auf die Schieferschichten und umgekehrt ist zunächst mechanischer Natur; sie erstreckt sich aber auch auf die beiderseitige mineralische Konstitution und Struktur. Die Schichten werden aufgeblättert; einzelne Schollen werden in die Höhe gezogen, losgerissen und mitfortgeschleppt; benachbarte Lagen werden geknickt und umgebogen. Anderseits weisen die Schichtenfugen dem eindringenden granitischen Material, wenn auch nicht immer, so doch sehr häufig, auf mehr oder minder große Entfernungen die Bahn für die vordringende Bewegung. Für die substanziellen und strukturellen Modifikationen lieferten die einzelnen Vorkommnisse ein reiches Beobachtungsmaterial. Es wurde darauf hingewiesen, daß der Granit von Münchsgrün Andalusit führe; es wurde erwähnt, daß die Aplite nicht selten Granatkörner einschließen und es wurde hervorgehoben, daß verschiedene Eruptivbildungen einen manchmal gar nicht unbedeutenden Gehalt an Sillimanit aufweisen. Es besteht kaum ein Zweifel, daß der Stoff für diese Mineralien aus dem angrenzenden Schiefergestein herausgelöst und inmitten der Eruptivmassen zur Auskristallisation gebracht wurde. Anderseits mußte mehrfach konstatiert werden, daß die Gneisschichten manchmal ganz erfüllt sind von wohlbegrenzten Turmalinkriställchen. Es ist bei deren vorzüglichem Erhaltungszustand nicht anzunehmen, daß dieselben insgesamt aus dem präexistenten Gestein stammen, als dessen Derivat sich diese Schiefer darstellen. Vielmehr scheint die Vermutung wohl begründet, daß diese borhaltigen Kristalle ihre Existenz mindestens teilweise den die Granitinjektionen begleitenden Gasemanationen verdanken. Und schließlich bekundet die früher als Resorptionserscheinung diagnostizierte Parallelstruktur des Granits von Münchsgrün den Einfluß der Schiefer auf das Gefüge der Eruptivbildungen und der oben betonte hornfelsartige

Charakter des Gneises von Tirschenreuth denjenigen der Intrusivmassen auf die Schieferstruktur in ganz unverkennbarer Weise.

Sehr wichtig und für die Beurteilung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den eruptivmassigen und den schieferigen Gebilden ist aber auch die Beschaffenheit der einzelnen Glieder der sogen. archäischen Formationsgruppe selber. Beachtenswert sind dabei vor allem die Verhältnisse des „Gneises." Es ist augensichtlich, daß in demselben Feldspat und Quarz gegenüber dem Glimmer eine Art Einheit bilden. Vergleicht man aber diese Quarz-Feldspat-Aggregate mit den oben behandelten gangartigen Ausläufern des Granits, so drängt sich sofort eine gewisse Ähnlichkeit zwischen denselben auf.

Im allgemeinen sondern kontinuierliche Häute von Glimmerblättchen die einzelnen Quarz-Feldspatlagen voneinander ab. Bei dem völlig frischen Material aber, das gelegentlich des Bahnbaues nach Bärnau zutage gefördert wurde, kann man deutlich beobachten, wie die Glimmerlagen mannigfach zerrissen und von Quarz-Feldspat-Aggregaten durchsetzt werden. Die Analogie mit jenen granitischen Gangabzweigungen, welche teils den Schichtenfugen folgen teils dieselben unter größerem oder kleinerem Winkel schneiden, springt hier sofort in die Augen. Aber die Ähnlichkeit beschränkt sich nicht auf diese äußerlichen Verhältnisse; sie offenbart sich vielmehr auch in Bestand und Struktur. Jene Gangadern führen im großen und ganzen den Mineralbestand der zugehörigen Tiefengesteine. Mit der Entfernung vom Eruptivherde werden sie mehr und mehr reine Aplite. Jene Quarz-Feldspat-Aggregate aber tragen hinsichtlich ihrer mineralischen Zusammensetzung offenbar aplitischen Charakter. Und dieser Mineralkombination entspricht auch ganz und gar die Strukturform.

Betrachtet man das Gefüge der Quarz-Feldspatlagen etwas näher, so gibt sich allenthalben die Tatsache zu erkennen, daß der Quarz nicht mehr wie in den Graniten die letzte Ausfüllungsmasse bildet, sondern nach idiomorpher Formengestaltung strebt. Überall sieht man die Feldspate und andere Mineralien

mit eckig rundlichen Quarztropfen angefüllt. Kurz die granulitische Struktur der Aplite wiederholt sich in diesen Quarz-Feldspat-Aggregaten. Es kann deshalb kaum einem Zweifel unterliegen, daß die letzteren mit den aplitischen Gangverzweigungen zu identifizieren sind. Dies umsoweniger, als in ihrem Gefolge auch alle die natürlichen Begleiterscheinungen auftreten, in denen sich, wie oben geschildert, die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Aplitgängen und ihrem Nebengestein dokumentieren. Findet man doch auch innerhalb des eigentlichen Gneiskörpers vielfach reichliche Sillimanit-, Granat- und Andalusitentwickelung, zahlreiche Turmalinkriställchen und ein Gefüge, bei dem das Gestein dicht und sein Bruch muschlig wird. Wenn aber jene Quarz-Feldspatlagen im wesentlichen identisch sind mit den aplitischen Gängen, so sind die „Gneise", welche sie in Verbindung mit den Glimmerlamellen aufbauen, nichts anderes als Schiefermaterial, durchtränkt und imprägniert mit eruptiven Massen oder mit anderen Worten, nichts anderes als injizierte Schiefer. Nach dem Vorgang von Weinschenk kann man sie durch die Bezeichnung als Metagneis von den sonstigen Gneistypen abtrennen. Nach Sauer können die Schiefer von Bärnau nicht mit denen von Bodenmais auf eine Linie gestellt werden. Es sind auch gewisse Unterschiede nicht zu verkennen. Es konnte aber bei Iglersreuth unfern Bärnau wenigstens das Eindringen granitischer Massen in die schiefrigen Gebilde deutlich beobachtet werden.[1]

In manchen Vorkommnissen enthüllt sich die eigenartige Natur des Metagneises auf den ersten Blick. So bei den Gneisen von Wondreb, Floß, Schlattein und Wildenau. Allenthalben sieht man hier, wie die größeren oder kleineren Linsen, Putzen und Knollen zwischen die Schiefer förmlich hineingezwängt sind. Die Erscheinung ist hier so auffallend, daß sie auch dem Laien nicht entgeht. Man bezeichnet im Volksmund quarzige Massen als Spat und spricht in jener Gegend von Spateinschlüssen in den Schiefern, um sie als eine Art Fremd-

[1] A. Sauer, Das alte Grundgebirge Deutschlands 1904.

körper zu charakterisieren. Anderwärts findet man jedoch auch wieder Gesteine, in denen diese Quarz-Feldspatputzen sehr zurücktreten. Sie bilden den Übergang in den Glimmerschiefer.

Nicht minder deutlich als beim „Gneis" sind die Kontakterscheinungen beim „Glimmerschiefer". Ja gerade hier zeigen sie sich in recht typischer Weise. Die Glimmer- und Chloritblättchen legen sich mit ihrer Basisfläche sehr oft nicht in die Strukturebene, sondern stellen sich quer oder senkrecht zu ihr. Wenn dies auch nicht als ein zwingender Beweis für Kontakteinflüsse anerkannt werden kann, so ist es doch immerhin eine Erscheinung, welche sich in Kontaktbildungen häufig findet. Auch das Auftreten von Graphit, wie es besonders in dem Gestein von Rothenberg konstatiert wurde, kann als Kontaktwirkung gefaßt werden. Ganz allgemein aber gelten als charakteristische Kennzeichen kontaktmetamorphischer Einwirkung die Garben- und Knotenschiefer. Derartige Bildungen aber sind in unserem „Glimmerschiefergebiet" gar keine Seltenheit. In einer Grube bei Größensees wurde ein Schieferstück mit ausgezeichneten Hornblendegarben gefunden. Die Vorkommnisse von Großklenau sind bekannt. Die Knotenbildung des Glimmerschiefers von Themenreuth aber ist so deutlich, daß man sie kaum besser finden kann. Es ist auch durchaus zweifellos, daß die hier auftretenden Knoten durch Andalusit gebildet werden. Vielfach ist derselbe freilich durch spätere chemisch-geologische Vorgänge wieder zerstört und zu schuppigen Aggregaten glimmerartiger Mineralien umgewandelt worden, aber oft zeigt er doch auch einen recht guten Erhaltungszustand. Auch die Chiastolithschiefer von Größensees offenbaren eine sehr deutliche Ausprägung. Auf eine Erscheinung aber ist ganz besonders hinzuweisen. „Keine Struktur, schreibt Weinschenk in seinen vergleichenden Studien über Kontaktmetamorphismus S. 453, dürfte so bezeichnend sein für kontaktmetamorphische Gesteine als die bandartige Anordnung der Einschlüsse, welche man nach ihrem gewundenen Verlauf als helizitische Struktur bezeichnen kann". Die Sillimanitnadeln aber, welche sich in gewundenen Zügen durch den

„Gneis“ von Bergnersreuth ziehen und die Graphitschüppchen, welche in dem „Glimmerschiefer“ von Größensees die ursprüngliche Schichtung noch deutlich anzeigen, können geradezu als typische Beispiele für jene Struktur gelten. Auch die rundliche oder eierförmige Beschaffenheit der kleinen Glimmerblättchen deuten auf Kontakt. Gümbel behauptet allerdings, daß gerundete Formen des Biotits nicht vorkommen. Aber dieselben kommen, wie früher erwähnt wurde, nicht bloß vor, sondern sie sind allgemein verbreitet. Zuweilen findet man völlig kreisrunde Gebilde. Ebenso ist ruinenhafte Endausbildung, löcherige Beschaffenheit und skelettartiges Wachstum, wie man es vielfach in Kontaktgesteinen beobachtet, wie im „Gneis“ so auch im „Glimmerschiefer“, überaus häufig wahrzunehmen. Nimmt man endlich den Reichtum an Einschlüssen in den größeren Mineralindividuen, wie er z. B. in dem Gestein von Themenreuth auftritt, und die unvollkommene kristallographische Umgrenzung der einzelnen Mineralneubildungen hinzu, so hat man ein ausreichendes Beweismaterial für die Richtigkeit der Annahme, daß der „Glimmerschiefer“ dieses Gebietes durch kontaktmetamorphische Einwirkungen seine derzeitige Beschaffenheit erhalten hat.

In etwas geringerem Maße zeigen „Phyllit“, „Quarzphyllit“ und „Lydit“ die kontaktmetamorphosierenden Einflüsse. Aber die letzteren sind auch hier noch deutlich genug, um über die Entstehung dieser Gesteine keinen Zweifel aufkommen zu lassen. Wie weit bei vulkanischen Ereignissen die Injektionen im Nebengestein reichen, zeigen die Steinbrüche in Zirkenreuth mit dem in ihnen auftretenden Material in der deutlichsten Weise. Feinste Äderchen, entsprechend der Entfernung vom Eruptivherd fast ausschließlich nur noch aus Quarzkörnern zusammengesetzt, durchtrümern nach verschiedenen Richtungen diese Vorkommnisse. Eigentliche Knotenbildung konnte in diesen Gesteinen nicht mehr beobachtet werden. Dagegen fanden sich in diesem Gebiet wohl ausgebildete Fleckschiefer. Auch die Kontaktmineralien Andalusit und Granat sind hier noch reichlich anzutreffen. Es dürfte somit der Nachweis

erbracht sein, daß die nicht zu den Eruptivbildungen gehörigen Schiefer insgesamt ihre gegenwärtige Erscheinungsform der Kontaktmetamorphose verdanken. Zwei Tatsachen aber sollen dem aufgeführten Beweismaterial noch hinzugefügt werden, um die Kette der Beweisführung zu schließen.

In welch engem Zusammenhange die Eruptivgesteine unseres Gebietes mit den kristallinischen Schiefern der Umgebung stehen, zeigt auch die Stellung der Schieferschichten. Im allgemeinen ist ja die Streichrichtung derselben durch die Direktionslinien des Erzgebirges einerseits und des herzynischen Gebirges im engeren Sinne andererseits bestimmt. Aber in der Nähe der Eruptivbildungen erfahren diese Richtungen allenthalben wesentliche Modifikationen. Sehr instruktiv sind in dieser Beziehung ja die Verhältnisse um den Fahrenberg bei Vohenstrauß. Wie es scheint sind hier die Schiefer rings um das Massiv des Granits dom- oder kuppelförmig aufgerichtet. Auch längs der Begrenzungslinien zwischen Granit- und Schiefergestein von Plößberg bis Neuenhammer ist die Streichrichtung augensichtlich durch den weit nach Süden vorspringenden Ausläufer des Tirschenreuther Waldgranits bedingt. Es ist gar nicht zu verkennen, daß die Schiefer durch die heraufdringenden Eruptivmassen emporgerichtet worden sind. Und als letzter Beweis für den Kontaktmetamorphismus seien die Produkte postvulkanischer Prozesse angeführt, wie sie in unserem Gebiete vielfach vorliegen. In Betracht kommt dabei neben der öfters hervorgehobenen Turmalinneubildung besonders die Serpentinisierung des Peridotits in Floß und Wildenau und die Kaolinisierung des Granits in Tirschenreuth und anderen Orten. Ist jene als Thermalwirkung aufzufassen, so ist diese als das Ergebnis von Gasexhalationen anzusehen, wie sie der vulkanischen Tätigkeit zu folgen pflegen.

Als Gegenbeweis aber kann man unmöglich die weite Ausdehnung der Kontakthöfe anführen. Wenn man auf der geologischen Karte von der Südgrenze des „Gneises" bei Tirschenreuth eine gerade Linie bis zur Nordgrenze des

„Quarzphyllits“ zieht, so ergibt sich allerdings eine sehr ansehnliche Kontaktzone. Aber bei den obwaltenden Verhältnissen muß eine große Verbreitung der Kontaktwirkungen durchaus begreiflich erscheinen. Das Granitmassiv zwischen Weiden und Tirschenreuth besitzt in Verbindung mit den übrigen Eruptivbildungen dieses Gebietes einen nicht unbeträchtlichen Umfang. Die weitgehende Verästelung der zahlreichen Gangverzweigungen, ohne jede Spur einer glasigen Erstarrung, läßt auf eine starke Erwärmung des Nebengesteins und damit auf einen hohen Hitzegrad des Magmas zur Zeit der Injektion schließen. Die Fülle bor- und fluorhaltiger Substanzen innerhalb der Schiefer deutet auf einen erheblichen Reichtum an mineralbildenden Agenzien in der Mutterlauge. Das ursprüngliche Gesteinssubstrat, als feinkörniger, dünnschiefriger Tonschiefer ohnehin hochgradig umbildungsfähig, mußte infolge von Stauchungen und Druckwirkungen, wie sie in der Fältelung so anschaulich zum Ausdruck gelangten, den agents minéralisateurs bequeme Wege zur Ausbreitung bieten. Und über dies alles ist die Eruptivmasse unter Tag offenbar noch viel weiter ausgedehnt als über Tag. Unter diesen Umständen mußte anläßlich der Granitintrusion innerhalb des Schiefermaterials eine weitreichende Molekularbeweglichkeit und eine ausgedehnte Umkristallisation des stofflichen Bestandes herbeigeführt werden. Die Größe der Kontakthöfe, die auf den ersten Blick überraschen könnte, scheint bei näherer Betrachtung der Verhältnisse ganz normal.

Es muß somit der Beweis als erbracht gelten, daß die Eruptivgebilde und ihre kristalline Umgebung innerhalb des untersuchten Gebietes in engster Wechselbeziehung zueinander stehen. Die kristallin entwickelten Schiefer verdanken ihre gegenwärtige Erscheinungsform dem erumpierenden Granitmagma. Ja sogar ihr stofflicher Bestand führt sich zum nicht geringen Teil auf die Eruptivgesteinsmasse zurück. Gewiß war das Material der sedimentierten Schichten durch die Verwitterung und Zersetzung präexistierender Gesteine geliefert worden. Aber zu demselben kamen bei der Intrusion der Tiefengesteine

neue Stoffmassen hinzu. Alle die ungezählten Aplite, Granulite und Pegmatite, welche die Schiefer in der mannigfachsten Weise durchsetzen, sind nur Ausläufer von dem Hauptgestein der Eruptivmasse. Ja selbst die Quarz-Feldspat-Aggregate der Gneisschichten müssen als Abzweigungen derselben betrachtet werden. Der Vorgang aber, welcher diese innigen Beziehungen hergestellt hat, ist nichts anderes als der Kontaktmetamorphismus. Gümbel erklärt allerdings: „Für unser gesamtes Gebiet liegt keine einzige Tatsache vor, welche einer Entstehung des einen oder anderen Gesteines durch metamorphische Prozesse feueriger oder wässiger Art das Wort redete. Alle Erscheinungen des Überganges dieser Gesteine nach Grenzlinien, welche mit ihrer Lagerung aufs innigste in Übereinstimmung stehen, ihre stets normale Verbindung und ihre Mineralbeschaffenheit selbst machen es mehr als wahrscheinlich, daß wenigstens Urtonschiefer, Glimmerschiefer und die dem letzteren zunächst untergebreiteten Gneisschichten unseres Gebirges, ursprünglich nur verschiedenalterige Bildungen, vergleichsweise analog den drei großen Gruppen der postkarbonischen, devonischen und silurischen Tonschieferformationen, vorstellen, welche, vielleicht durch weit größere Bildungszeiträume auseinanderstehend, als die Glieder der genannten drei Übergangsformationen, unter ähnlichen Bedingungen, aber bei etwas geändertem Bildungsmaterial und geminderter Energie der Kristallisation nach und nach entstanden. Nur bei dieser Annahme lassen sich die konstanten Übergänge der verschiedenen Urgebirgsschiefer längs ihrer Begrenzungsrichtung, nur so die Gleichartigkeit und Ähnlichkeit des Gefüges, nur so endlich die Differenz in Beziehung auf Beimengungen von Mineralien, auf Nuancen im Gefüge und Mischung der wesentlichen Gemengteile, welche in gleichen Schichten, stets in gleicher Weise wiederkehren, erklären und verstehen." Aber in Wirklichkeit sind sehr viele Tatsachen vorhanden, welche insgesamt auf die Berührung der Schiefer mit schmelzflüssigem Material als Agens für die molekulare Umlagerung hinweisen.

Daß zwischen den einzelnen Gesteinstypen in der mannig-

mannigfachsten Weise durch Zwischenformen und Übergangsglieder vermittelt wird, bedarf kaum der Erwähnung. Wenn aber im großen und ganzen der „Glimmerschiefer" von „Gneis" unterteuft und von „Phyllit" überlagert wird, so daß jene auch sonst oft beobachtete gesetzmäßige Reihenfolge der Schiefer zustande kommt, so hat dies einfach in der Tatsache seinen Grund, daß die Intensität der kontaktmetamorphischen Umwandlung der Entfernung vom vulkanischen Herd proportional ist. Das Schiefermaterial ist natürlich im Laufe von mehr oder minder großen Zeiträumen allmählich zum Absatz gelangt. Seine kristalline Entwickelung aber ist wie durch einen Akt so auch zu einer Zeit in Vollzug gesetzt worden. Wenn Gümbel die „kristallinen Schiefer" als das zuerst Festgewordene bezeichnet, so ist das mit Beziehung auf den Granit unzweifelhaft richtig. Nicht notwendig aber ist es, für deren Sedimentation andere Bedingungen anzunehmen, als die, welche der gegenwärtigen Erfahrung zugänglich sind. Rosenbusch, welcher anfänglich Dynamometamorphose und Kontaktmetamorphose als die wirksamen Faktoren bei der Neuordnung des Bestandes normaler Sedimente nennt, teilt im weiteren Verlauf seiner Darstellung der ersteren die Hauptrolle für die Lösung des Problems zu. In unserem Gebiete aber konvergieren bei der Untersuchung der genetischen Beziehungen alle Linien nach einem Punkte hin; und dieser Punkt heißt Kontaktmetamorphismus.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 3. Juni 1905.

1. Herr A. Föppl spricht „über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser".

Zunächst wird ein Verfahren abgeleitet, nach dem man in einer Reihe von Fällen zu einer strengen Lösung des Torsionsproblems für Stäbe von der Gestalt eines Rotationskörpers gelangen kann. Dieses Verfahren versagt aber gerade in einem Falle, der für die praktische Anwendung von besonderer Wichtigkeit ist. Daher wird noch ein Näherungsverfahren angegeben, das auch in diesem Falle wenigstens eine Abschätzung der größten Torsionsbeanspruchung an der meist gefährdeten Stelle gestattet. Das Näherungsverfahren beruht auf einer Abbildung des Spannungsverlaufs im Meridianschnitte des Stabes durch eine ebene Flüssigkeitsströmung.

2. Herr P. v. Groth legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung des korrespondierenden Mitgliedes Professor E. v. Fedorow in Moskau: „Über Syngonielehre" vor.

Ein kristallographischer Komplex ist ein Ebenen- oder Strahlenbüschel, für welchen das sogenannte Rationalitätsgesetz gilt. Während die Kristallformen nach ihrer Symmetrie in 32 Klassen zerfallen, können die kristallographischen Komplexe mehrerer Symmetriearten übereinstimmen, und diese Gleichheit wird als „Syngonie" bezeichnet. Der Verfasser entwickelt

nun nach den Methoden der neueren Geometrie in zusammenhängender Darstellung die Gesetzmäßigkeiten der „rationalen Strahlenbüschel“, zunächst diejenigen in der Ebene, dann diejenigen im Raume, aus welchen sich eine mathematisch streng definierbare Einteilung der kristallographischen Komplexe nach Syngonien ergibt, ebenso wie es diejenige der Kristallformen nach Symmetriearten ist.

Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser.

Von **A. Föppl.**

(*Eingelaufen 3. Juni.*)

Zur Behandlung des in der Überschrift bezeichneten Problems wurde ich durch die Frage veranlaßt, wie sich der Spannungszustand in der Übergangsstelle gestaltet, wenn eine auf Verdrehen beanspruchte Welle aus zwei zylindrischen und konaxialen Teilen besteht, zwischen denen ein durch eine Abrundung von ziemlich kleinem Halbmesser vermittelter, verhältnismäßig schroffer Übergang stattfindet. Die Spannungen werden nämlich an der Übergangsstelle erheblich größer, als am Umfange der schwächeren Welle in einem größeren Abstande von der Übergangsstelle und in Übereinstimmung mit diesem theoretischen Ergebnisse lehrt auch die Erfahrung, daß Wellenbrüche meistens an der Übergangsstelle eintreten. Eine strenge Lösung des in der eben angegebenen Weise formulierten Problems vermochte ich freilich nicht zu finden; ich mußte mich vielmehr mit einer für die praktischen Zwecke des Maschinenbaues ausreichenden Abschätzung begnügen, zu der die theoretische Betrachtung, die ich hier wiedergeben will, die erforderlichen Unterlagen lieferte.

Dagegen zeigte sich, daß man auch eine strenge Lösung des Torsionsproblems für eine größere Zahl von Fällen angeben kann, in denen der Stab einen Rotationskörper bildet, falls man die Meridiankurve passend wählt. Als eine strenge Lösung bezeichne ich hier eine solche, die dieselben Anforderungen

erfüllt wie die Lösung von de St. Vénant für zylindrische oder prismatische Stäbe, d. h. es muß uns wie bei der Lösung von de St. Vénant frei stehen, eine solche Verteilung der äußeren Kräfte an den Endquerschnitten des Stabes vorauszusetzen, wie sie sich aus der Lösung selbst ergibt. Die Mantelfläche des Stabes ist dabei überall als frei von äußeren Kräften vorauszusetzen.

Rein mathematisch betrachtet handelt es sich darum, eine Lösung der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie für die elastischen Verschiebungen zu finden, die allen Grenzbedingungen genügt. Man weiß auch ferner, daß diese Lösung durch die Grenzbedingungen eindeutig bestimmt ist. Bezeichnet man die Komponenten der elastischen Verschiebungen in den Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit $\xi\ \eta\ \zeta$ und mit $\frac{1}{m}$ die Poissonsche Verhältniszahl, die für Stahl im Mittel zu 0,3 angenommen werden kann, so lauten die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

wobei zur Abkürzung

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

gesetzt ist. Übersichtlicher lassen sich die drei Grundgleichungen auch zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen, wenn man [illegible] ausgeben will. Wenn man die elastische Verschiebung, deren Komponenten $\xi\ \eta\ \zeta$ waren, als Vektor aufgefaßt mit s bezeichnet, lautet diese Gleichung

$$\nabla^2 s + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} s = 0 \qquad (1)$$

Hierbei hat div s dieselbe Bedeutung wie vorher e.

Es liegt nun sehr nahe, hier eine Lösung der Grundgleichung zu versuchen, bei der

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{2}$$

gesetzt ist, weil auch schon bei der Theorie der Torsion von zylindrischen oder prismatischen Stäben dieser Ansatz zu Grunde liegt. In der Tat zeigt sich auch, daß man auf diese Weise zu der gesuchten Lösung gelangt. Die Grundgleichung (1) zerfällt hiermit in zwei Gleichungen, nämlich in (2) und in die weitere

$$\nabla^2 \mathfrak{v} = 0 \tag{3}$$

die beide von der gesuchten Lösung erfüllt werden müssen. Nach einem bekannten Rechengesetze der Vektor-Analysis läßt sich wegen (2) die Gleichung (3) auch durch

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{v} = 0 \tag{4}$$

ersetzen, von der man ein erstes Integral in der Form

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \nabla V \tag{5}$$

sofort anzuschreiben vermag. Dabei bedeutet V eine beliebige Potentialfunktion, die von Massen herrührt, die alle außerhalb des Rotationskörpers liegen, so daß V überall innerhalb des Stabs die Laplacesche Gleichung

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6}$$

erfüllt. Natürlich wird man, um nacher die Grenzbedingungen am Umfange des Rotationskörpers erfüllen zu können, auch die Massen, zu denen die Potentialfunktion V gehört, in symmetrischer Verteilung um die Rotationsachse oder auch auf der Rotationsachse selbst anzunehmen haben. Dann fällt der Vektor ∇V und hiermit auch curl $\mathfrak{v}$ überall in die Meridianebene des Rotationskörpers. Wie man aber im übrigen auch die Massen wählen mag, wird man mit diesen Ansätzen zu einer möglichen Lösung der Grundgleichung geführt, die für einen Rotationskörper durch entsprechend gewählte Grenzbedingungen verwirklicht werden könnte. Unsere Aufgabe wird dagegen darin bestehen, die allgemeine Lösung so zu speziali-

sieren, daß die bereits vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt werden können. Dazu gelangen wir, wenn wir von nun ab 𝔳 so wählen, daß es keine Komponente in der Richtung der Rotationsachse hat, sondern in der Querschnittsebene des Rotationskörpers enthalten ist, ferner in jedem Punkte eines Kreises, der in der Querschnittsebene (mit dem Mittelpunkte in der Achse) gezogen ist, gleich groß und tangential gerichtet ist. Die absolute Größe von 𝔳, die mit v bezeichnet werden soll, ist dann eine zunächst unbekannte Funktion der Koordinaten x, ϱ des Punktes in irgend einem Meridianschnitte, wenn die Koordinate x in der Richtung der Rotationsachse gezählt ist und ϱ den Halbmesser des erwähnten Kreises bedeutet.

Gleichung (2) ist mit diesem Ansatze von selbst erfüllt. Die Vektorgleichung (5) läßt sich dagegen durch die beiden skalaren Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}(v \varrho) \text{ und } \frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

ersetzen, woraus folgt, daß v der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}(v \varrho)\right) = 0 \tag{8}$$

genügen muß. Natürlich hätte es des Umweges, der mit der Einführung der Potentialfunktion V verbunden ist, nicht bedurft, wenn es sich nur um die Herleitung der Gl. (8) gehandelt hätte, denn diese Gleichung stimmt bei der Wahl, die wir jetzt für 𝔳 getroffen haben, inhaltlich vollständig mit Gl. (3) überein. Die Einführung der Potentialfunktion V hat nur den Zweck, die Ermittelung von partikulären Lösungen der Gl. (8) zu erleichtern.

Wir wollen jetzt sehen, von welcher Art der Spannungszustand ist, der durch eine elastische Formänderung, wie wir sie hier annehmen, hervorgebracht wird. Zu diesem Zwecke seien durch einen Punkt mit den Koordinaten x, ϱ im Meridianschnitte drei zueinander senkrechte Ebenen gelegt, nämlich die Meridianebene, die Querschnittsebene und eine zu beiden senk-

rechte Ebene, die demnach parallel zur Achse geht und die Richtung der Verschiebung $\mathfrak{v}$ an dem betrachteten Punkte enthält. In diesen drei Schnittrichtungen können in der Nachbarschaft des Punktes x, ϱ keine Normalspannungen übertragen werden, da die Dehnungen in den Richtungen der Achse, des Radius und der Richtung von $\mathfrak{v}$ bei dem hier betrachteten Formänderungszustande alle drei gleich Null sind. Die Schubspannung im Meridianschnitte sei in zwei Komponenten τ_x in der Richtung der Achse, und τ_ϱ in radialer Richtung zerlegt; dann hat man

$$\tau_x = G\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tau_\varrho = G\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho}\right) \tag{9}$$

wenn mit G der Schubelastizitätsmodul bezeichnet wird. Diesen Spannungskomponenten entsprechen in den beiden anderen Schnittrichtungen die ihnen zugeordneten, also insbesondere eine Schubspannung in der Querschnittsebene von der Größe τ_x, die in der Richtung von $\mathfrak{v}$ oder kurz gesagt in tangentialer Richtung geht. Dagegen fehlt in der Querschnittsebene eine in radialer Richtung gehende Schubspannungskomponente, weil der rechte Winkel zwischen einer in radialer und einer in axialer Richtung gezogenen kleinen Strecke bei der Formänderung ungeändert bleibt. Durch die Angabe der Schubspannungskomponenten τ_x und τ_ϱ in der Meridianebene ist daher der hier vorliegende Spannungszustand vollständig beschrieben.

Jetzt läßt sich auch die für die Mantelfläche des Rotationskörpers vorgeschriebene und durch die bisherigen Festsetzungen noch nicht erfüllte Grenzbedingung in einer Gleichung ausdrücken. Damit die Mantelfläche frei von äußeren Kräften sei, muß die Resultierende aus τ_x und τ_ϱ in der Meridianebene am Umfange tangential zur Meridiankurve gerichtet sein. Denkt man sich die Gleichung der Umrißlinie in der Form

$$z = f(x) \tag{10}$$

gegeben, so lautet diese Grenzbedingung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\tau_\varrho}{\tau_z} = \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho}}{\frac{\partial v}{\partial x}} \right)_{\varrho = z} \tag{11}$$

Der weitere Weg ist jetzt klar vorgezeichnet; man hat eine Lösung von Gl. (8) zu suchen, die mit der Bedingung (11) verträglich ist. Der Spannungszustand folgt dann aus den Gleichungen (9).

Nun würde es zu schwierig sein, diese Aufgabe für den Fall einer ganz beliebig gegebenen Umrißlinie zu lösen. Man kann aber, wie es auch bei der ganz ähnlich liegenden Aufgabe der Torsion von prismatischen Stäben geschieht, umgekehrt irgend eine Lösung von Gl. (8) zu Grunde legen und dann nachträglich die Gestalt der Umrißlinie nach Gl. (11) ermitteln, für die diese Lösung zutrifft. Dazu braucht man nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren, was zum mindesten näherungsweise immer ausführbar ist.

Was schließlich die Grenzbedingungen an den beiden Endquerschnitten des Stabes betrifft, so folgt schon aus den vorhergehenden Betrachtungen über den Spannungszustand, daß dort, wie es verlangt war, weder Normalkräfte noch Kräfte in radialer Richtung, sondern nur solche in tangentialer Richtung als äußere Kräfte angebracht sein dürfen. Über die Verteilung der tangential gerichteten Kräfte über die Querschnittsfläche am Stabende können wir bei dem Verfahren, wie es soeben beschrieben wurde, freilich nicht mehr verfügen; wir müssen uns vielmehr jene Verteilung gefallen lassen, die aus der Lösung selbst hervorgeht. Wenn man darin einen Nachteil erblicken wollte, würde ihn aber die hier besprochene Lösung mit der Theorie der Torsion von prismatischen Stäben teilen, bei der, wie schon eingangs bemerkt, der Sachverhalt derselbe ist.

Meine Absicht geht hier nicht darauf hinaus, eine größere Zahl von Beispielen für das angegebene Verfahren beizubringen, da ich mir für den praktischen Zweck, den ich im Auge habe,

davon nicht sehr viel verspreche. Wie diesem meiner Ansicht nach besser gedient werden kann, werde ich nachher noch auseinandersetzen. Es wird daher genügen, wenn ich wenigstens an einem Beispiele zeige, wie man auf dem bisher besprochenen Wege zu Ziele gelangen kann.

Man setze:

$$V = -C \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = C \frac{a + x}{R^3} \tag{12}$$

wobei

$$R^2 = (a + x)^2 + \varrho^2,$$

R selbst also den Abstand des Punktes x, ϱ von einem auf der Achse in der beliebigen Entfernung a vom Anfangsquerschnitte des Stabs gelegenen Punkte bedeutet. Der angegebene Wert von V ist die Potentialfunktion eines an dieser Stelle gelegenen „Doppelpunktes", befriedigt also jedenfalls überall innerhalb des Stabs die Laplacesche Gleichung (6). Aus den Gleichungen (7) findet man hierauf leicht

$$v = \frac{k}{\varrho} + C \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{k}{\varrho} - C \frac{\varrho}{R^3} \tag{13}$$

wenn mit k eine Integrationskonstante bezeichnet wird. Nachträglich kann man sich auch noch leicht unmittelbar davon überzeugen, daß Gl. (13) eine partikuläre Lösung von Gl. (8) liefert. Die Integrationskonstante k in Gl. (13) muß übrigens gleich Null gesetzt werden, damit die Verschiebung v für die auf der Achse gelegenen Punkte verschwindet. Es bleibt also

$$v = -C \frac{\varrho}{R^3} \tag{14}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (11) ein, so geht sie über in

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{3C \frac{\varrho^2}{R^5}}{3C \frac{\varrho(x+a)}{R^5}}\right)_{\varrho = z} = \frac{z}{x + a}$$

und deren Lösung ist, wenn mit K eine neue Integrationskonstante bezeichnet wird,

$$s = K(x + a) \tag{15}$$

d. h. die vorher gefundene Lösung bezieht sich auf einen Stab, der einen abgestumpften Kegel bildet, dessen Spitze um die beliebig zu wählende Strecke a vom Anfangsquerschnitte entfernt ist. Es mag nur noch bemerkt werden, daß sich die Schubspannung in einem Querschnitte, wie aus den Gleichungen (9) sofort zu entnehmen ist, nach dem Gesetze

$$\tau_s = 3\,G\,C\,\frac{(a + x)\,\varrho}{R^5} \tag{16}$$

über den Querschnitt verteilt, also nach einem Gesetze, das namentlich an dem kleineren Endquerschnitte sehr merklich von jenem abweichen kann, das für eine zylindrische Welle gelten würde. Die Abweichung ist um so größer, je stumpfer der Kegel ist.

Da die Differentialgleichung (8) linear ist, kann man aus der einen partikulären Lösung in Gl. (14) eine Reihe anderer und auch eine allgemeinere ableiten, die eine willkürliche Funktion enthält, indem man etwa

$$r = [illegible] \int \frac{F(a)}{[illegible]\,(x - a)^2 [illegible]}\, da \tag{17}$$

setzt, worin $F(a)$ eine beliebige Funktion von a ist, in der natürlich x und ϱ nicht vorkommen dürfen.

Man könnte auch von anderen Massenverteilungen ausgehen, zu denen das Potential V gehören soll und hiermit zu weiteren Lösungen gelangen. — Am nächsten würde es natürlich liegen, den Fall zu untersuchen, daß sich r aus zwei Gliedern von der in Gl. (14) angegebenen Form zusammensetzt.[1]

[1] [illegible]

$$[illegible] - [illegible] - [illegible] - h_2 x^2$$

[illegible] bestimmt, daß einfache Funk- [illegible]

Ich sehe aber auch davon aus dem schon angeführten Grunde ab und wende mich jetzt zu einer anderen Behandlung der Aufgabe, die mir für die Erreichung des praktischen Zweckes einer Festigkeitsberechnung aussichtsreicher zu sein scheint.

Man kann nämlich die Aufgabe auf ein hydrodynamisches Problem zurückführen, indem man die Verteilung der Schubspannungen in einem Meridianschnitte durch eine ebene Flüssigkeitsbewegung abbildet. Zunächst denke man sich eine Schar von Spannungslinien in den Meridianschnitt eingetragen, nämlich von Linien, die überall in der Richtung der Schubspannung τ fortschreiten, wobei unter τ die Resultierende aus den vorher berechneten Komponenten τ_x und τ_ϱ zu verstehen ist. Die äußerste Spannungslinie fällt, wie wir schon sahen, mit der Meridiankurve, also mit der Umrißlinie der Welle zusammen.

Diese Spannungslinien lassen sich nun auch als die Stromlinien einer ebenen Flüssigkeitsbewegung ansehen, die sich durch den Längsschnitt des Stabes erstreckt. Die Geschwindigkeit der Strömung darf aber nicht unmittelbar proportional mit τ gewählt werden, sondern proportional mit $\varrho^2\tau$, damit die Flüssigkeitsbewegung quellenfrei bleibt, was natürlich unbedingt notwendig ist, weil man im anderen Falle mit der Abbildung überhaupt nichts anfangen könnte. Die Divergenz einer mit $\varrho^2\tau$ proportionalen Strömung berechnet sich nach den Gleichungen (9) zu

$$\frac{\partial(\varrho^2\tau_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho^2\tau_\varrho)}{\partial\varrho}=G\left(\varrho^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varrho^2\frac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2}+\varrho\frac{\partial v}{\partial\varrho}-v\right)=0 \quad (18)$$

denn der Wert in der Klammer stimmt mit der linken Seite der Differentialgleichung (8), wenn in dieser die Differentiationen ausgeführt werden und mit ϱ^2 multipliziert wird, vollständig überein.

Die Geschwindigkeit der ebenen Flüssigkeitsströmung sei als Vektor aufgefaßt mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet und ihre Komponenten in axialer und radialer Richtung mit s_x und s_ϱ, so daß also

$$s_x=\varrho^2\tau_x \text{ und } s_\varrho=\varrho^2\tau_\varrho$$

gesetzt wird. Dann kann zunächst Gl. (18) in der Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0 \tag{19}$$

angeschrieben werden und für den Wirbel w, der überall senkrecht zur Strömungsebene steht, so daß es nur noch auf die Ermittelung des absoluten Wertes ankommt, erhält man

$$w = \frac{\partial s_x}{\partial \varrho} - \frac{\partial s_\varrho}{\partial x}$$

oder wenn man für die s und die τ ihre Werte einsetzt (die von τ nach den Gleichungen (9))

$$w = 3\, G\, \varrho \frac{\partial v}{\partial x}$$

wofür auch noch

$$w = 3\, \varrho\, \tau_x = 3\, \frac{s_x}{\varrho} \tag{20}$$

geschrieben werden kann. Durch die Gleichungen (19) und (20) ist die Flüssigkeitsbewegung im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen völlig bestimmt. Eine strenge Lösung des Torsionsproblems, das uns hier beschäftigt, wäre demnach auf die Integration der beiden simultanen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_\varrho}{\partial \varrho} &= 0 \\ \frac{\partial s_x}{\partial \varrho} - \frac{\partial s_\varrho}{\partial x} &= 3\, \frac{s_x}{\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

zurückgeführt. Nun sind freilich die analytischen Schwierigkeiten durch die veränderte Formulierung kaum vermindert: eine näherungsweise Lösung der Aufgabe ist aber dadurch erheblich erleichtert.

Man betrachte ein Stromfadenelement von der in der Richtung der Normalen zu den Stromlinien gemessenen Dicke dn und der Länge $r d\psi$, wenn unter r der Krümmungshalbmesser der Stromlinien an dieser Stelle verstanden wird und wende

darauf den Satz von Stockes an. Dann erhält man für den Wirbel w den Ausdruck

$$w = \frac{1}{r} \frac{d}{dn}(rs) \tag{22}$$

woraus in Verbindung mit Gl. (20)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dn}(rs) = 3 \frac{s_x}{\varrho} \tag{23}$$

folgt. Hierbei ist unter s der Absolutwert der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{s}$ zu verstehen. Nun ist aber

$$s_x\, dn = s \cos a\, dn = s\, d\varrho$$

wobei a den Neigungswinkel der Stromlinie gegen die Achse bezeichnet. Die Gl. (23) läßt sich daher auch ersetzen durch

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varrho}(rs) = 3 \frac{s}{\varrho} \tag{24}$$

wofür auch

$$\frac{d}{d\varrho}(rs) = \frac{3rs}{\varrho} \tag{25}$$

geschrieben werden kann. Man sieht, daß sich die Gleichung sofort integrieren läßt. Sie liefert

$$rs = A\varrho^3 \quad \text{oder} \quad s = A\frac{\varrho^3}{r} \tag{26}$$

Dabei ist A eine Integrationskonstante, die aber für jede die Stromlinien überall rechtwinklig schneidende Trajektorie einen anderen Wert hat. Wenn der Verlauf der Stromlinien bereits bekannt wäre, ließe sich der irgend einer solchen Trajektorie zugehörige Wert von A aus der Bedingung berechnen, daß das längs dieser Trajektorie von der Achse bis zur Umrißlinie des Meridianschnitts erstreckte Integral

$$\int s\, dn$$

einen für alle Trajektorien konstanten Wert hat, da es die durch die Trajektorie hindurchfließende Flüssigkeitsmenge angibt.

Man sieht nun schon, daß für eine strenge Lösung der

Aufgabe durch die zuletzt abgeleiteten Formeln nichts gewonnen wird. Dagegen wird für eine näherungsweise Lösung durch Gl. (26) sofort eine sehr brauchbare Handhabe geboten, da man das Verhältnis des Geschwindigkeitsgefälls $\frac{ds}{dn}$ zur Geschwindigkeit s selbst unmittelbar an der Umrißlinie hiermit ohne weiteres kennt, indem der Wert von r an dieser Stelle gegeben ist.

Geht man von der hydrodynamischen Abbildung jetzt wieder zur ursprünglichen Aufgabe zurück, so hat man für die Schubspannung τ an irgend einer Stelle des Meridianschnitts

$$\tau = A\frac{\varrho}{r} \qquad (27)$$

wobei A dieselbe Bedeutung hat, wie zuvor.

In größerer Entfernung von der Übergangsstelle einer Welle von kleinerem Durchmesser in eine Welle von größerem Durchmesser gehen die Spannungslinien überall parallel zur Zylinderachse; die senkrechten Trajektorien der Spannungslinien sind daher gradlinig und senkrecht zur Achse und der Krümmungshalbmesser r ist unendlich groß und längs einer Trajektorie konstant. Daher muß auch die Konstante A unendlich groß sein, so daß das Verhältnis A/r einen endlichen konstanten Wert liefert. Die Schubspannung τ wächst daher in diesem Teile der Welle proportional mit dem Abstande ϱ von der Achse, genau so wie dies von der Torsion zylindrischer Stäbe von vornherein bekannt war.

So wie wir uns aber der Übergangsstelle nähern, beginnen sich die Spannungslinien zu krümmen, indem sich die äußerste der durch die Abrundung gegebenen Umrißlinie anschließt und sofort wird damit die Spannungsverteilung, wie aus Gl. (27) hervorgeht, vollständig geändert und zwar so, daß die Spannung in der Nähe des Umrisses jetzt viel schneller nach außen hin anwächst als zuvor. Das hat natürlich zur Folge, daß die inneren Teile entlastet werden und das Torsionsmoment überwiegend nur in den äußersten Schichten des Querschnitts über-

tragen wird, nämlich in einem konzentrischen Ringe, dessen Dicke von derselben Größenordnung ist, wie der Halbmesser der Abrundung, der mit q bezeichnet werden mag und als klein gegen den Wellenhalbmesser betrachtet werden kann.

In einem geringen Abstande p von der Umrißlinie, der senkrecht zu den Spannungslinien gemessen wird, kann genau genug für die gefährlichste Stelle

$$r = q + p$$

gesetzt werden. Wenn daher $p = q$ genommen wird, hat man (ungefähr wenigstens) an dieser Stelle $r = 2q$ und da p klein gegen ϱ ist, hat sich die Spannung τ nach Gl. (27) schon in diesem kleinen Abstande von der Umrißlinie auf die Hälfte des Wertes vermindert, der am Umfange selbst auftritt. Wenn q unendlich klein wäre, müßte die Spannung am Umfange unendlich groß ausfallen, d. h. es würde dann schon ein sehr kleines Torsionsmoment genügen, um ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze und hiermit ein geringes plastisches Nachgeben des Materials an dieser Stelle herbeizuführen. — Zugleich erkennt man, daß die Bruchgefahr an der Übergangsstelle durch einen möglichst allmählichen Übergang, der zuerst mit geringer Krümmung einsetzt und in dem Maße, wie ϱ dabei wächst, stärker gekrümmt sein kann, auf einfache Weise herabgesetzt werden kann.

Was nun die praktische Verwendung der hier angestellten Betrachtungen betrifft, so kann ich mich darüber kurz fassen, da eine ausführlichere Darlegung hierüber besser an anderer Stelle gegeben wird. Man wird damit beginnen, den Verlauf der Spannungslinien schätzungsweise in den Längsschnitt der Welle einzutragen, wobei es natürlich nur auf den Verlauf in der Nähe der Übergangsstelle selbst ankommt. Diese erste Schätzung läßt sich dann noch verbessern, indem man Rücksicht darauf nimmt, daß die den Spannungslinien entsprechenden Stromlinien um so dichter aneinander rücken müssen, je größer die Geschwindigkeit längs eines Stromfadens wird. Da es auf große Genauigkeit überhaupt nicht ankommt, wird man leicht

zu einer annehmbaren Zeichnung des Stromverlaufs gelangen. Dann folgt die Spannungsverteilung längs einer senkrecht zu den Spannungslinien gezogenen Trajektorie nach Gl. (27), die man graphisch darstellen wird, worauf man die größte Spannung am Umfange auf Grund des gefundenen Spannungsverteilungsgesetzes aus der Momentengleichung berechnet, nach der das Moment der Schubspannungen in dem der Trajektorie entsprechenden Schnitte gleich dem gegebenen Torsionsmoment sein muß.

So weit, als es die praktische Technik verlangt, kann damit die in den ersten Sätzen dieser Abhandlung gestellte Aufgabe als gelöst angesehen werden. Wünschenswert wäre es freilich, noch eine bessere Lösung zu finden, die schneller und genauer zum Ziele führte. Es mag wohl sein, daß eine solche auch noch gefunden werden könnte. Gegenüber dem bisher bestehenden Zustande, der nicht einmal eine Abschätzung der größten auftretenden Spannung selbst ihrer Größenordnung nach gestattete, darf aber in dem angegebenen Verfahren immerhin schon ein recht wesentlicher Fortschritt erblickt werden.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 1. Juli 1905.

1. Herr Erwin Voit trägt die Resultate einer Untersuchung: „Über Glykogenbildung aus Eiweiß“ vor. Dieselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

Der Vortragende berichtet über Versuche, welche er mit seinem Assistenten Herrn Dr. Krummacher angestellt. Bei Eiweißzufuhr erhöht sich der Glykogengehalt eines Hungertieres wesentlich.

Sowohl die Menge des neugebildeten Glykogens, wie der zeitliche Verlauf der Ablagerung lassen erkennen, daß dasselbe aus dem gefütterten Eiweiß entstanden.

Demnach ist der Zucker als normales Spaltungsprodukt des Eiweißes anzusehen.

2. Herr H. v. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Siegfried Guggenheimer: „Über die universellen Schwingungen von Systemen von Rotationskörpern“ vor.

3. Herr Alfred Pringsheim bespricht eine Arbeit des Herrn Dr. Oskar Perron: „Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern.“

Der Verfasser entwickelt im Gegensatze zu den bisher bekannten, wesentlich auf Anwendung der Reihenlehre beruhenden Konvergenz-Kriterien direkt aus bekannten Näherungs-

bruch-Relationen eine Skala von neuen, sukzessive sich v
schärfenden Kriterien. Scheinen dieselben auch nicht von bes
derer praktischer Brauchbarkeit, so besitzen dieselben zweifel
ein hinlängliches theoretisches Interesse, das durch ihre v
Verfasser angekündigte und einer späteren Mitteilung vor
haltene Übertragbarkeit auf die Jacobische Verallgemei
rung der Kettenbrüche noch merklich erhöht wird.

Über die universellen Schwingungen von Systemen von Rotationskörpern.

Von **Siegfried Guggenheimer.**

(*Eingelaufen 1. Juli.*)

I. Die universellen Schwingungen eines Systems Kugel-Kreisring.

a) Kugel und Ring sind konzentrisch.

Nachdem in der vorhergehenden Arbeit[1]) die universelle Grundschwingung eines schwach kompressiblen Kreisringes in einem imkompressiblen Medium betrachtet wurde, soll nun die gleiche Betrachtung durchgeführt werden für ein konzentrisches System von Kugel und Kreisring. Wir wollen eine Einheitskugel und einen Einheitsring betrachten, die wir durch die Festsetzung definieren, daß sowohl der Kugelradius R als auch der Neumann'sche Ringparameter c (resp. λ) sehr klein seien gegenüber dem Radius a des Führungskreises des Ringes. Der Querschnittsradius des Ringes ergibt sich dann in genügender Annäherung gleich 2 ac.

Es gelten die Gleichungen:

1) $\quad \Delta \Phi = 0$ im Aussenraum von Ring und Kugel.

2) $\quad \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$ im Innenraum von Ring und Kugel,

wo für den Ring in erster Annäherung

[1]) Guggenheimer, Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften 34, 41, 1904. Diese Arbeit soll im folgenden mit I zitiert werden.

2a) $$\Delta\Phi + \frac{k^2 a^2}{\eta^2}\Phi = 0,$$

da $\frac{a^2}{\eta^2}$ in erster Annäherung konstant = 1 ist.

Sowohl für die Kugel als für den Ring gelten an der Grenze:

3a) $$\Phi_a = \Phi_i$$

3b) $$\frac{\partial\Phi_a}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu},$$

wo ν die Richtung der positiv genommenen inneren bezw. äußeren Normalen bedeutet.

Für die Kugel allein haben, wenn wir die Grundschwingung betrachten, folgende Gleichungen Gültigkeit:[1])

4) $$\Phi_a = \frac{a}{r}$$

wo r die Zentraldistanz irgend eines äußeren Punktes bedeutet,

5) $$\Phi_i = \frac{a}{r}\sin\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}$$

und

6) $$k = \frac{\pi}{2R}$$

Für den Ring allein gilt:[2])

7) $$\Phi_a = \frac{c_{20}}{2\pi}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}}$$

8) $$\Phi_i = c_{20}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\left(1 + \frac{1-4a^2k^2}{4}\lambda^2\right)$$

und

---

[1]) Korn, Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen S. 143, Berlin 1901.

[2]) I. S. 51 und 55.

9)
$$k = \frac{1}{a c} \frac{1}{\sqrt{2 K_c}}$$

worin

9a)
$$K_c = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} \left(\varkappa^2 = 1 - \lambda^2;\ \sin \varphi = \cos \frac{\Theta}{2}\right)$$

Damit Ring und Kugel gleichzeitig pulsieren, oder anders ausgedrückt, damit die Grundschwingungen beider in Resonanz sind, ist es nötig, daß die Größen k für Kugel und für Ring gleich sind, d. h. daß die Beziehung besteht (in erster Annäherung):

10)
$$\frac{\pi}{2 R} = \frac{1}{a \cdot c} \frac{1}{\sqrt{2 K_c}}$$

wo K_c die oben definierte Bedeutung hat. Physikalisch möglich sind allerdings folgende Fälle:

1. Beide Körper haben Eigenschwingungen mit gleicher Schwingungsdauer. Die k sind gleich, und gestatten eine Beziehung zwischen a, c und R abzuleiten.

2. Die Größen k sind nicht gleich; d. h. die Eigenschwingung der Kugel hat eine andere Schwingungsdauer als die Eigenschwingung des Ringes.

Wir wollen, mit Rücksicht auf die Beziehungen zur Gravitationstheorie, die Beziehungen zwischen Kugelradius und Ringquerschnitt so annehmen, daß Fall 1 erfüllt ist.

Es ergibt sich dann folgendes Problem:

Wir suchen eine Funktion φ des Aussenraumes von Kugel und Ring mit den Randwerten.

11)
$$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots$$

an der Kugel (wobei die Entwicklung nach Kugelfunktionen zu geschehen hat);

12)
$$\Phi = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{\eta}} (c_{20} A_0^0(c) + c_{21} A_1^0(c) \cos \Theta + \cdots)$$

am Ring.

Nachdem die Funktion Φ mit Hilfe der Murphyschen Methode im Aussenraum berechnet ist, (und außerdem die Funktionen im Innenraum von Kugel und Ring berechnet sind), gerade als ob alle Konstanten in den beiden Formeln bekannt wären, werden dann die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

an Kugel- und Ringfläche gebildet.

Man erhält dann Relationen, welche gerade zur Berechnung der Konstanten, bezw. ihrer Verhältnisse, und der Größe k ausreichen.

Bestimmung der Potentialfunktion Φ im Aussenraume von Kugel und Ring nach der Methode von Murphy.

Es ist die

Potentialfunktion des Aussenraumes der Kugel:

Φ_{11} mit d. Randw. $\Phi_{11} = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots$

Φ_{12} " " " $\Phi_{12} = - \Phi_{21}$ an der Kugel

. . . .

. . . .

und die Potentialfunktion des Aussenraumes des Ringes:

Φ_{21} mit d. Randw. $\Phi_{21} = \sqrt{\frac{1-c^2}{\eta}} \, [c_{20} A_0^0(c) + c_{21} A_1^0(c) \cos\Theta + \cdots]$

Φ_{22} " " " $\Phi_{22} = - \Phi_{11}$ am Ring

. . . .

. . . .

zu bestimmen.

Dann ist die gesuchte Potentialfunktion Φ des Aussenraumes mit den Randwerten

$$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots \text{ an der Kugel}$$

und

$$\Phi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}} \, [c_{20} A_0^0(c) + c_{21} A_1^0(c) \cos \Theta + \cdots] \text{ am Ring}$$

gleich

13) $$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

für Kugel und Ring.

Zunächst ist

$$\Phi_{11} = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots$$

wo r die Zentraldistanz des variabeln Punktes $(x\,y\,z)$ darstellt. Ferner ist

$$\Phi_{21} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\left[\frac{c_{20}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}}\right.$$

$$\left. + c_{21}\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta\, d\Theta}{\sqrt{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^3}} + \cdots\right]^{1)}$$

wo $\eta = a\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}$ ist, und λ, ω die Ringkoordinaten des variabeln Punktes $(x\,y\,z)$ darstellen. (Man vergleiche hiezu I., S. 45—47.)

[1] Die von Neumann in den Gleichungen 44 S. 32 seiner Abhandlung gegebenen Formeln sind nicht ganz richtig. Dieselben müssen lauten

$$J_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

$$+ \frac{(1-\lambda^2)^q}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos p\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

da der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ nur dann vor das Integral auf der rechten Seite tritt, wenn $p = 0$. In allen übrigen Fällen $p = 1, 2, 3 \cdots$ ist nur mit $\frac{1}{\pi}$ zu multiplizieren. Dasselbe gilt für die $A_p^q(\lambda)$, für die zu setzen ist

Um nun Φ_{12} zu berechnen, entsprechend der Reflexion der Potentialfunktion Φ_{21} an der Kugel, wollen wir zunächst den Wert von λ für irgend einen Punkt der Kugel in den sphärischen Polarkoordinaten r, Θ, Φ ausdrücken, wobei wir wieder die Symmetrieachse des Systems zur x-Achse wählen.

Es ist

14) $$\lambda = \frac{r_2}{r_1},$$

wenn

15) $$r_1^2 = a^2 + R^2 + 2\,a\,R \sin\Theta$$

15ᵃ) $$r_2^2 = a^2 + R^2 - 2\,a\,R \sin\Theta$$

$$A_p^q(\lambda) = \frac{\lambda^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$
$$+ \frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

Eine gleiche Bemerkung gilt auch für die Formeln Neumann 32. S. 28 und 37. S. 30, in denen auf der rechten Seite nur für Fall p resp. $q = 0$ mit 2π zu multiplizieren ist, während in allen übrigen Fällen der Multiplikator nur π ist.

somit

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 + R^2 - 2\,a\,R \sin\Theta}{a^2 + R^2 + 2\,a\,R\cos\Theta}}, \tag{16}$$

und

$$1 - \lambda^2 = \frac{4\,a\,R\sin\Theta}{a^2 + R^2 + 2\,a\,R\sin\Theta} \tag{16a}$$

(und in erster Annäherung $1 - \lambda^2 = 4\sin\Theta\frac{R}{a}$).

An der Kugel ist

$$\eta = R\sin\Theta. \tag{17}$$

Wir haben also an der Kugel

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \sqrt{\frac{4\,a}{a^2 + 2\,a\,R\sin\Theta + R^2}}\,[c_{20}(1 + W_1) + c_{21}\,W_2 + \cdots] \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{R}{a}\sin\Theta\right)[c_{20}(1 + W_1) + c_{21}\,W_2 + \cdots] \end{aligned} \tag{18}$$

in erster Annäherung, wenn wir Größen von der Ordnung $\frac{R^2}{a^2}$ vernachlässigen, und wenn

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\,\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}} - 1 \\ W_2 &= \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta\,d\,\Theta}{\left(\sqrt{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}\right)^3} \end{aligned} \tag{19}$$

Nun ist, immer in erster Annäherung

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - (1 - \lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\,\Theta - 1 \\ &= \frac{1 - \lambda^2}{4\pi}\int\limits_0^{2}\cos^2\frac{\Theta}{2}\,d\,\Theta = \frac{1 - \lambda^2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos\Theta)\,d\,\Theta = \tfrac{1}{4}(1 - \lambda^2) \\ &= \frac{R}{a}\sin\Theta \end{aligned} \tag{19a}$$

Analog ergibt sich für W_2

$$W_2 = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-(1-\lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\Theta\, d\Theta$$

19b)
$$= \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\pi}(1-\lambda^2)\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\Theta}{2}\cos\Theta\, d\Theta$$
$$= \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi}(1-\lambda^2)\int_0^{2\pi}\cos^2\Theta\, d\Theta$$
$$= \frac{3}{4}\lambda(1-\lambda^2) = 3\frac{R}{a}\sin\Theta$$

und demzufolge

20)
$$\Phi_{21} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + c_{21}\frac{3R}{a}\sin\Theta + \cdots\right]$$

Hier ist nun $\sin\Theta$ nach Kugelfunktionen zu entwickeln. Für die Entwickelung von $\sin\Theta$ nach Kugelfunktionen gilt die Formel:[1])

$$\sin\Theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}P_0\cos(\Theta) - 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2\cos(\Theta)\right.$$
$$\left. - 9\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 P_4\cos\Theta + \cdots\right]$$

Wir haben also für Φ_{21}

$$\Phi_{21} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + \frac{3}{4}c_{21}\,\pi\left[\frac{1}{2}P_0\cos(\Theta) - \frac{5}{16}P_2\cos(\Theta)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{27}{384}P_4\cos(O) + \cdots\right]\right]$$

Somit ist, wenn, unseren bisherigen Vernachlässigungen entsprechend, nur Glieder erster Ordnung beibehalten werden

21)
$$\Phi_{12} = -\frac{2}{\sqrt{a}}\left[c_{20} + \frac{3}{4}\pi c_{21}\frac{R}{a}\right]\frac{R}{r}$$

---

[1]) Z. B. Byerly. An elementary Treatise on Fouriers etc. Series S. 184, Boston 1893.

Bestimmung von Φ_{22}.

Es ist die Potentialfunktion Φ_{22} des Aussenraumes des Ringes zu bestimmen mit den Randwerten

$$22)\qquad \Phi_{22} = -\Phi_{21}$$

am Ringe.

Um Φ_{22} zu bestimmen, haben wir zunächst

$$\Phi_{11} = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots$$

am Ring nach Ringfunktion zu entwickeln.

Nach Neumann gilt:[1])

$$23)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2} \\ &\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_1)\cos p(\omega - \omega_1)\cos q(\varphi - \varphi_1) \end{aligned}$$

wobei $\omega_1 = \pi$, $\lambda_1 = 1$ zu setzen ist.

Da (nach Neumann S. 34) für $\lambda_1 = 1$ jedes $A_p^0(\lambda_1) = 1$ wird, so ist

$$23^a)\qquad \frac{1}{r} = 2\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sum_p C_p^0 J_p^0(\lambda)\cos p(\pi - \omega)$$

worin (nach Neumann S. 26)

$$C_p^0 = \frac{1}{2a}$$

Φ_{22} ist also zu berechnen als eine Potentialfunktion des Aussenraumes des Ringes mit dem Randwerten.

$$24)\qquad \Phi_{22} = -c_{10}\,2\sqrt{1 - 2\cos\omega + c^2}\,\sum_p C_p^0 J_p^0(c)\cos p(\pi - \omega)$$

Wir können hierauf Φ_{22} sofort hinschreiben,

$$24^a)\qquad \Phi_{22} = -2c_{10}R\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sum_p C_p^0\frac{J_p^0(c)}{A_p^0(c)}A_p^0(\lambda)\cos p(\pi - \omega)$$

[1]) Neumann, Theorie der Elektrizitäts- etc. Verteilung in einem Ringe; Halle 1864, S. 17 und Gl. 29, S. 26.

Nun ist in erster Annäherung

$$25)\qquad J_0^0(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2}} = 1$$

$$J_1^0(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{\sqrt{1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2}}$$

$$26)\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\Theta\,(1-\lambda e^{i\Theta})^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda e^{-i\Theta})^{-\frac{1}{2}}\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\Theta\,(1+\lambda\cos\Theta)\, d\Theta$$

$$= \lambda = c$$

Ausserdem ist für den Aussenraum des Ringes immer

$$\frac{A_p^0(\lambda)}{A_p^0(c)} < 1$$

Φ_{22} wird also in der von uns gewünschten Annäherung

$$27)\qquad \begin{aligned} \Phi_{22} = &- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \\ &+ c_{10}\frac{R}{a}\frac{c}{2}\cos\omega\,\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} + \cdots \end{aligned}$$

Die Potentialfunktion des Aussenraumes von Kugel und Ring, die an der Kugel die Randwerte

$$\Phi_a = c_{10} + c_{11}\cos\Theta + \cdots$$

und am Ringe die Randwerte

$$\Phi_a = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}}\,[c_{20}A_0^0(c) + c_{21}A_1^0(c)\cos\omega + \cdots]$$

besitzt, ergibt sich also aus

$$\Phi_a = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

zu

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots - \frac{2}{\sqrt{a}}\left(c_{20} + \frac{3}{4}\pi c_{21}\frac{R}{a}\right)\frac{R}{r}$$

$$\text{28)}\quad \begin{aligned} &+ \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda)+c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots] + \cdots \\ &- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \\ &+ c_{10}\frac{R}{a}c\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\cos\omega\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} + \cdots \end{aligned}$$

Bestimmung der Potentialfunktion für den Innenraum von Kugel und Ring.

1. Die Potentialfunktion für den Innenraum der Kugel.

Diese ist bereits gegeben, durch die Untersuchungen von Korn.[1]) Sie ist

$$\text{29)}\quad \Phi_i = c_{10}\frac{\sin kr}{\sin kR}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{\sin kr - kr\cos kr}{\sin kR - kR\cos kR}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots$$

mit den Randwerten

$$\text{30)}\quad \Phi = c_{10} + c_{11}\cos\Theta + \cdots$$

2. Die Potentialfunktion für den Innenraum des Ringes.

Die Randwerte dieser Funktion sind gegeben durch

$$\text{31)}\quad \Phi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{\eta}}\,[c_{20}A_0^0(c) + c_{21}A_1^0(c)\cos\omega + \cdots]$$

worin wieder

$$A_0^0(c) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},\quad \left(\varkappa^2 = 1-\lambda^2;\ \sin\varphi = \cos\frac{\Theta}{2}\right)$$

Für den Innenraum selbst können wir die Werte benutzen, die in der vorhergehenden Arbeit gefunden wurden.[2]) Wir fanden für den Innenraum des Ringes

[1]) Korn, loc. cit. S. 149. [2]) I. S. 49.

32) $$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \sum_p \sum_q C_p^q I_p^q(\lambda) \cos p\,\omega \cos q\,\psi$$

Da alles um die Rotationsachse symmetrisch angeordnet ist, so vereinfacht sich Φ_i zu

33) $$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \sum_p C_p^0 I_p^0(\lambda) \cos p\,\omega$$

In etwas anderer Form und unter Anwendung der hier adoptierten Konstantenbezeichnung erhalten wir

34) $$\Phi_i = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} \left[c_{20} \frac{A_0^0(c)}{A_0^0(\lambda)} I_0^0(\lambda) + c_{21} \frac{A_1^0(c)}{A_1^0(\lambda)} I_1^0(\lambda) \cos\omega + \cdots \right]$$

Um die Kräfte kennen zu lernen, die die einzelnen Glieder des Systems aufeinander ausüben, wobei es uns hauptsächlich auf die Kenntnis der Wirkung der Kugel auf den Ring ankommt, ist es nötig, zunächst die $c_{10}, c_{11}, c_{20}, c_{21}$ u. s. w. sowie die Konstante k zu berechnen.

Die Mittel hierzu bieten uns die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

an der Kugel,

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

am Ringe, wo in beiden Fällen ν die Richtung der inneren oder äusseren Normalen bedeutet.

Berechnung der normalen Ableitungen am Ring.

Es genügt, $\frac{\partial \Phi_{a(i)}}{\partial \lambda}$ zu kennen, da der Faktor, mit dem sowohl $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$ wie $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ multipliziert wird, für $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$ derselbe ist, und beim Gleichsetzen der beiden Ableitungen sich heraushebt.

a) Berechnung von $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$ resp. $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$

Der für Φ_a gefundene Ausdruck lautete

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots \frac{2}{\sqrt{a}}\left(c_{20} + \frac{3}{4}\pi c_{21}\frac{R}{a}\right)\frac{R}{r} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda) + c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega + \cdots]$$

$$- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$+ c_{10}\frac{R}{r}\frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\cos\omega\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

Bevor zur Differenziation nach λ geschritten werden kann, ist r durch λ auszudrücken. Wir fanden (Gl. 23[a]) in erster Annäherung:

$$\frac{1}{r} = 2\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\left[\frac{1}{2a}J_0^0(\lambda) - \frac{1}{2a}J_1^0(\lambda)\cos\omega\right]$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[1 - \lambda\cos\omega]$$

$$= \frac{1}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega)$$

Diesen Wert für $\frac{1}{r}$ in Φ_a eingesetzt, gibt:

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega) + \text{Konst.} + \text{zu vernachl. Glieder}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{a}}c_{20}\frac{R}{a}(1 - 2\lambda\cos\omega) + \cdots$$

$$35)\quad + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,[c_{20}A_0^0(\lambda) + c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega + \cdots]$$

$$- c_{10}\frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$+ c_{10}\frac{R}{a}\frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\cos\omega$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda} = -2\,c_{10}\frac{R}{a}\cos\omega - \frac{4}{\sqrt{a}}c_{20}\frac{R}{a}\cos\omega$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,(c_{20}A_0^0(\lambda)+c_{21}A_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots)]$$

36)
$$-c_{10}\frac{R}{a}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1-2\,\lambda\cos\omega+\lambda^2}\right.$$

$$\left.-\frac{c}{2}\frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)}\sqrt{1-2\,\lambda\cos\omega+\lambda^2}\cos\omega\right]$$

Für Φ_i wurde gefunden (Gl. 34)

$$\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\,\lambda\cos\omega+\lambda^2}\left[c_{20}\frac{A^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^0(\lambda)\right.$$

$$\left.+c_{21}\frac{A_0^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^0(\lambda)\cos\omega+\cdots\right]$$

Daraus wird $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$

37)
$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{1-2\,\lambda\cos\omega+\lambda^2}\left(c_{20}\frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^{0\prime}(\lambda)\right.\right.$$

$$\left.\left.+c_{21}\frac{A_0^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^{0\prime}(\lambda)\cos\omega+\cdots\right]\right.$$

Nach Ausführung der Differenziationen nach λ, Vernachlässigung von Grössen, die gegen c^2 klein sind, und Gleichsetzung von $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$ mit $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ erhalten wir, wenn nach erfolgter Differenziation $\lambda = c$ gesetzt wird

$$-2c_{10}\frac{R}{a}\cos\omega+\frac{1}{\sqrt{a}}(1-c\cos\omega)[c_{20}A_0^{0\prime}(c)+c_{21}A_1^{0\prime}(c)\cos\omega]$$

38)
$$-c_{10}\frac{R}{a}(1-c\cos\omega)\left[\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)}+c\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_1^0(c)}\cos\omega\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}(1-c\cos\omega)\left[c_{20}\frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}I_0^{0\prime}(c)+c_{21}\frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}I_1^{0\prime}(c)\cos\omega\right]$$

Indem wir von dieser Entwickelung nur die Glieder nullter Ordnung und solche mit $\cos\omega$ beibehalten, denn alle übrigen Glieder fallen in den Bereich unserer Vernachlässigung, erhalten wir durch Gleichsetzung der Glieder, welche $\cos\omega$ nicht enthalten, die Gleichung

$$39)\quad \begin{aligned} c_{20}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{\Gamma_0^0(c)}\,\Gamma_0^{0\prime}(c)\right] &= c_{10}\,\frac{R}{a}\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} \\ &= -\,c_{10}\,\frac{R}{a}\,\frac{1}{c\,K_c} \end{aligned}$$

(denn $\dfrac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} = -\dfrac{1}{c\,K_c}$ aus I. Gleichung 40, 41, 44), und durch Gleichsetzung der Glieder mit $\cos\omega$

$$40)\quad \begin{aligned} &c_{21}\left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{\Gamma_1^{0\prime}(c)}\,\Gamma_1^{0\prime}(c)\right] \\ &= \left[2\,\frac{R}{\sqrt{a}} + \frac{R}{\sqrt{a}} + \frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)}\,c - c\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{A_1^{0\prime}(c)}{A_1^0(c)}\right] = c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

denn wir wissen, daß $\dfrac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)} = -\dfrac{1}{c\,K_c}$; daraus ergibt sich $\dfrac{R}{a}\,\dfrac{A_0^{0\prime}(c)}{A_0^0(c)}\,c$ als klein von der Ordnung $\dfrac{1}{K_c}$, und darf also vernachlässigt werden. Eine weitere Hilfsbetrachtung ergibt, daß $A_1^0(c)$ in erster Annäherung von der Ordnung $\dfrac{1}{c}$, und $A_1^{0\prime}(c)$ ebenfalls in erster Annäherung von der Ordnung $+\dfrac{1}{c^2}$ ist, denn es ist

$$41)\quad A_1^0(c) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$42)\quad A_0^{0\prime}(c) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta}{\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 1, die zweite mit $(1-\lambda^2)$ und addieren die beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$A_1^0(c)+(1-\lambda^2)A_0^{0\prime}(c)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-(1-\lambda^2)\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

43)
$$=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\lambda A_0^0(c)$$

Also $A_1^0(c)=\lambda A_0^0(c)-(1-\lambda^2)A_0^{0\prime}(c)$, woraus, wenn wieder Größen mit c^2 vernachlässigt werden, sich in erster Annäherung

44)
$$A_1^0(c)=\frac{1}{c}$$

und

45)
$$A_1^{0\prime}(c)=-\frac{1}{c^2}$$

ergibt.

Daraus folgt direkt

46)
$$-c\frac{R}{\sqrt{a}}\frac{A_1^0(c)}{A_1^{0\prime}(c)}=-\frac{R}{\sqrt{a}}$$

Die dritte Gleichung zur Berechnung der beiden Konstantenverhältnisse und der Konstante k haben wir mit Hilfe der Differentiationen an der Kugel aufzustellen. Indem wir an der Kugel nur die Glieder berücksichtigen, die in ihrer Wirkung auf den Ring in Betracht kommen, können wir Φ_a so schreiben:

$$\Phi_a=c_{10}\frac{R}{r}+\cdots-\frac{2}{\sqrt{a}}c_{20}\frac{R}{r}+\cdots+\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\left[c_{20}A_0^0(\lambda)+\cdots\right]$$

Die folgenden Beziehungsgleichungen geben uns λ und η durch r ausgedrückt:

$$\sqrt{1-\lambda^2} = \sqrt{\frac{4\,a\,r\sin\Theta}{a^2+R^2+2\,a\,r\sin\Theta}},\ \sqrt{\eta} = \sqrt{r\sin\Theta}$$

$$\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}} = \frac{2\sqrt{a}}{a\left(1+\frac{r}{a}\sin\Theta\right)} = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(1-\frac{r}{a}\sin\Theta\right)$$

Differenzieren wir nach r, und setzen wir nach der Differentiation $r = R$, so erhalten wir

$$\text{47)}\qquad \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = -\frac{c_{10}}{R} + \frac{2}{\sqrt{a}}\, c_{20}\frac{1}{R}$$

In gleicher Weise erhalten wir für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$

$$\text{48)}\qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = -\frac{c_{10}}{R} + c_{10}\, k \operatorname{cotg} k R$$

Wir haben also jetzt zur Bestimmung der Konstantenverhältnisse c_{10}/c_{20}, c_{20}/c_{21} und der Konstante k die drei Gleichungen

$$\text{49)}\qquad c_{20}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\, I_0^{0\prime}(c)\right] = -\,c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{c\,K_c} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{49}^{a})\qquad c_{21}\left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)}\, I_1^{0\prime}(c)\right] = c_{10}\,\frac{R}{\sqrt{a}} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{49}^{b})\qquad c_{20} = c_{10}\,\frac{k\,R}{2}\sqrt{a}\operatorname{cotg} k\,R \qquad \text{(III)}$$

Aus III und I erhalten wir als Bestimmungsgleichung für k

$$\text{49}^{c})\qquad \begin{aligned} k\,\frac{R}{2}\sqrt{a}\operatorname{cotg} k\,R\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\, I_0^{0\prime}(c)\right] &= -\frac{R}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{c\,K_c}\\ \frac{k}{2}\operatorname{cotg}(k\,R)\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)}\, I_0^{0\prime}(c)\right] &= -\frac{1}{a}\,\frac{1}{c\,K_c}\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite geht hervor, daß cotg $(k\,R)$ und die Determinante kleine Größen sind. Zur Berechnung von k setzen wir

50) $$k = k_0 + \varepsilon \quad \left(\text{wo } k_0 = \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{ac\sqrt{2K_c}}\right)$$

Dann ist

51) $$\operatorname{cotg}(k_0 + \varepsilon) R = - \frac{\varepsilon R}{\sin^2 k_0 R} = - \varepsilon R$$

Andererseits können wir schreiben:

52) $$A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c) = \varepsilon \frac{d}{dk}\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c)\right]$$
$$= - \varepsilon K_c \frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right)$$

Es ist

53) $$\frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right) = \frac{I_0^0(c)\frac{d I_0^{0\prime}(c)}{dk} - I_0^{0\prime}(c)\frac{d I_0^0(c)}{dk}}{I_0^0(c)^2}$$

Nun ist in erster Annäherung[1])

53a) $$I_0^0(c) = 1 + \frac{1 - 4a^2k^2c^2}{4}, \quad \frac{d I_0^0(c)}{dk} = -2a^2kc^2$$

53b) $$I_0^{0\prime}(c) = -2a^2k^2c, \qquad \frac{d I_0^{0\prime}(c)}{dk} = -4a^2kc$$

Also wird

53c) $$\frac{d}{dk}\left(\frac{I_0^{0\prime}(c)}{I_0^0(c)}\right) = -4a^2kc$$

und

$$A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c) = 4a^2\varepsilon kcK_c$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$\frac{k}{2}\operatorname{cotg}(kR)\left[A_0^{0\prime}(c) - \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^{0\prime}(c)\right] = \frac{1}{acK_c}$$

die für die Glieder der linken Seite gefundenen Werte ein, so ergibt sich

---

1) I. S. 55.

$$2\,a^2\,k_0^2\,\varepsilon^2\,c^2\,K_c\,R = \frac{1}{a\,K_c} \tag{54}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{2\,R} = \frac{1}{a\,c\sqrt{2\,K_c}}$$

ergibt sich andererseits

$$2\,a^2\,c^2\,K_c = \frac{4\,R^2}{\pi^2}$$

dies eingesetzt in Gleichung (54) gibt

$$k_0^2\,\varepsilon^2\,\frac{4\,R^2}{\pi^2} = \frac{1}{a\,K_c}$$

Nun ist[1])

$$2\,a^2\,k_0^2\,c^2\,K_c = 1,$$

und es wird

$$\varepsilon^2\,R = \frac{1}{a\,K_c}$$

$$\varepsilon^2\,R^2 = \frac{R}{a}\,\frac{1}{K_c}$$

$$\varepsilon\,R = \pm\sqrt{\frac{R}{a}\cdot\frac{1}{K_c}} \tag{55}$$

Wir entscheiden uns hier für das Minuszeichen, denn da wir die Grundschwingung des Systems studieren, so ist es der kleinste Wert von k, den wir suchen. Wir erhalten

$$(k_0 + \varepsilon)\,R = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{a\,K_c}} \tag{56}$$

Für c_{20} hatten wir gefunden

$$c_{20} = c_{10}\,\frac{k\,R}{2}\,\sqrt{a}\,\operatorname{cotg}(k\,R)$$

---

[1]) I. S. 54.

Setzen wir die für $(k R)$ resp. $\operatorname{cotg}(k R)$ als Funktion von $(k_0 + \varepsilon) R$ gefundenen Werte ein, so finden wir

$$c_{20} = c_{10} \frac{\pi}{4} \sqrt{R} \frac{1}{\sqrt{K_c}} \tag{57}$$

Das Verhältnis c_{21}/c_{10} gab uns die Gleichung

$$c_{21} \left[A_1^{0\prime}(c) - \frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)} I_1^{0\prime}(c) \right] = c_{10} \frac{R}{\sqrt{a}}$$

Nun ist in erster Annäherung

$$A_1^0(c) = -\frac{1}{c} \qquad A_1^{0\prime}(c) = \frac{1}{c^2}$$

$$I_1^0(c) = c \qquad I_1^{0\prime}(c) = 1$$

somit

$$c_{21} = c_{10} \frac{c^2}{2} \frac{R}{\sqrt{a}} \tag{58}$$

Wir können nun für Außenraum und Innenraum von Kugel und Ring die Potentialfunktion so aufstellen, daß dieselbe nur noch die eine willkürliche Konstante c_{10} enthält. Wir erhalten so für den Außenraum von Kugel und Ring die Formel:

$$\begin{aligned} \Phi_a = \Bigg[& \frac{R}{r} + \frac{\pi}{4\sqrt{a}} \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \sqrt{\frac{R}{K_c}} A_0^0(\lambda) \\ & + \frac{c^2}{2} \frac{R}{\sqrt{a}} A_1^0(\lambda)\cos\omega - \frac{R}{a} \frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)} \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \\ & + \frac{R}{a} \frac{c}{2} \frac{A_1^0(\lambda)}{A_1^0(c)} \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \cos\omega \Bigg] c_{10} \end{aligned} \tag{59}$$

und für den Innenraum des Ringes

$$\begin{aligned} \Phi_i = \frac{c_{10}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \Bigg[& \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{R}{K_c}} \frac{A_0^0(c)}{I_0^0(c)} I_0^0(\lambda) \\ & + \frac{c^2}{2} \frac{R}{\sqrt{a}} \frac{A_1^0(c)}{I_1^0(c)} I_1^0(\lambda)\cos\omega \Bigg] \end{aligned} \tag{60}$$

Das Potential von Kugel und Ring in Bezug auf einen weit entfernten Punkt ist in erster Annäherung gegeben durch

$$\text{61)} \qquad \Phi = c_{10}\left[\frac{R}{r} - \frac{R}{a}\frac{A_0^0(\lambda)}{A_0^0(c)}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\right]$$

und, wenn μ die Raumdichte von Kugel bezw. Ring bezeichnet

$$= \int\limits_{\tau\ (\text{Kugel und Ring})} \mu \frac{d\tau}{r}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau} \Delta\Phi \frac{d\tau}{r}$$

$$= +\frac{k^2}{4\pi}\int \Phi_i \frac{d\tau}{r}$$

Die scheinbare Masse der Kugel ist $\int \mu\, d\tau = c_{10} R$

Die Masse des Ringes erhält man, da in erster Annäherung

$$\Phi_i = \frac{c_{10}}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{K_c}}\,K_c$$

durch

$$\text{62)} \qquad \frac{k^2}{4\pi}\int\limits_{\tau\ (\text{Ring})} \Phi_i\, d\tau = \frac{k^2}{4\pi}\frac{c_{10}}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{K_c}}\, 2\pi a\, 4\pi^2 a^2 c^2 = c_{10}\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{a\, R}{K_c}}$$

d. h. damit Einheitskugel und Einheitsring (R von der Ordnung $\lambda = c$) synchron schwingen, muß sich die Masse des Ringes zur Masse der Kugel verhalten wie $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{K_c}\sqrt{\frac{a}{R}} : 1$, d. h. die Masse des Einheitsringes muß sehr groß sein im Verhältnis zur Masse der Einheitskugel.

Befindet sich an Stelle der Einheitskugel mit dem Radius R eine große Kugel mit dem Radius R_n, die wir uns als aus einer sehr großen Anzahl Einheitskugeln bestehend denken, so bleiben die Endformeln für die Potentialfunktionen unverändert, nur ist überall an Stelle von R der Radius der großen Kugel R_n zu setzen. Die Bedingung für die Erzielung von Resonnanz zwischen Kugel und Ring ergibt dann für das Ver-

hältnis von Ringmasse zu Kugelmasse $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{K_c} \sqrt{\frac{a}{R_n}} : 1$

Die Konstante k bleibt jedoch unverändert. Da um die Achse des Systems vollständige Symmetrie herrscht, ist ohne weiteres klar, daß die auf Kugel resp. Ring ausgeübten Kraftkomponenten[1])

$$X = \frac{1}{4} \mu k^2 \int_{\text{Oberfläche von Kugel (Ring)}} \Phi^2 \cos(n x) \, d\omega$$

$$Y = \frac{1}{4} \mu k^2 \int \Phi^2 \cos n y \, d\omega$$

$$Z = \frac{1}{4} \mu k^2 \int \Phi^2 \cos n z \, d\omega$$

sämtlich gleich Null sind. Dies wird jedoch nicht mehr der Fall sein, sobald der Kugelmittelpunkt nicht mehr mit dem Ringmittelpunkt, d. h. dem Mittelpunkt des Polarkreises zusammenfällt.

b) Kugel und Ring sind nicht konzentrisch.

Die Grundgleichungen, von denen wir hier ausgehen, sind die nämlichen, als im eben behandelten Falle. Es gelten wieder die Gleichungen (1)

$$\Delta \Phi = 0$$

im Außenraum von Kugel und Ring, und die Gleichungen (2)

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

$$\Delta \Phi + \frac{k^2 a^2}{\eta^2} \Phi = 0$$

für den Innenraum von Ring und Kugel. Es gelten des weiteren die nämlichen Grenzbedingungen, und die Gleichungen, welche die Resonnanz der Schwingungen von Kugel und Ring ausdrücken. Ein wesentlicher Unterschied gegen

---

[1]) Korn, loc. cit. S. 139.

den vorigen Fall liegt jedoch darin, daß die symmetrische Anordnung, die uns von φ unanhängig machte, nicht mehr vorhanden ist. Wir dürfen daher auch q nicht mehr gleich Null setzen, sondern wir haben jetzt stets über q zu summieren. Dem werden wir sofort bei der Aufstellung der Randwerte, wie sie die Formulierung des Murphyschen Problems bedingt, Ausdruck geben. Es gelten wieder an der Kugel die Werte

$$\Phi_{11} = c_{10}\frac{R}{r} + c_{11}\frac{R^2}{r^2}\cos\Theta + \cdots \tag{63}$$

wo r die Zentraldistanz des variablen Punktes $(x\,y\,z)$ darstellt.

Am Ring haben wir aber diesmal zu schreiben

$$\Phi_{21} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\eta}}\left[\sum_0^\infty{}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos(q\,\varphi) \right. \tag{64}$$
$$\left. + \sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega)\, A_1^q(\lambda)\cos q\,\varphi + \cdots\right]$$

Das in dieser Gleichung rechts auftretende Glied $(c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega)$ entstammt der Entwicklung von $\cos(\omega - \omega_0)$ (ω_0 die ω Koordinate des Kugelzentrums), wobei $\cos\omega_0$ und $\sin\omega_0$ in die neuen Konstanten c_{21}^q resp. C_{21}^q einbezogen wurden. Da es uns in erster Linie auf die Wirkung der Kugel auf den Ring ankommt, so wollen wir zunächst die Murphysche Methode auf die Reflexionen der Kugelpulsation am Ring anwenden.

Es ist die Potentialfunktion Φ_{22} des Außenraumes des Ringes zu bestimmen mit den Randwerten (siehe S. 4)

$$\Phi_{22} = -\,\Phi_{11} \text{ am Ring.}$$

Unter Benutzung der Neumannschen Formel (Gleichung 23)

$$\frac{1}{r} = \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1\,r\,\lambda_1^2}$$
$$\sum_p\sum_q C_p^q\, \Gamma_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_1)\cos p\,(\omega-\omega_1)\cos q\,(\varphi-\varphi_1)$$

erhalten wir jetzt für Φ_{22} die Randwerte

$$\Phi_{22} = -c_{10} R \sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}\sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_1 + \lambda_0^2}$$

65)
$$\sum_p \sum_q C_p^q I_p^q(c)\, A_p^q(\lambda_0) \cos p\,(\omega - \omega_0) \cos q\,\varphi$$

und für Φ_{22}

$$\Phi_{22} = -c_{10} R \sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}\sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

66)
$$\sum_p \sum_q C_p^q \frac{I_p^q(c)}{A_p^q(c)} A_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_0) \cos p\,(\omega - \omega_0) \cos q\,\varphi$$

wenn wir die Ringkoordinaten des Kugelzentrums mit dem Index 0 versehen, und die Ebene $\varphi = 0$ durch das Kugelzentrum legen. Es handelt sich jetzt darum, in diesem Ausdruck die $I_p^q(c)$ sowie die $A_p^q(c)$, $A_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda_0)$ zu berechnen.

Aus den Gleichungen (25) und (26) ergibt sich:

$$I_0^0(c) = 1$$
$$I_1^0(c) = c$$

Für $I_0^1(c)$ ergibt sich nach Neumann[1])

$$I_0^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\lambda e^{i\Theta})(1-\lambda e^{-i\Theta})^{-\frac{3}{2}}\, d\Theta$$

67)
$$= \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\frac{3}{2}\lambda e^{i\Theta}+\frac{15}{4}\lambda^2 e^{2i\Theta}+\cdots\right)\left(1+\frac{3}{2}\lambda e^{-i\Theta}+\frac{15}{4}\lambda^2 e^{-2i\Theta}+\cdots\right) d\Theta$$

$$= \frac{1-\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+3\lambda\cos\Theta+\frac{9}{4}\lambda^2+\cdots\right) d\Theta$$

$= 1$ in erster Annäherung.

Man ersieht leicht, daß in erster Annäherung für alle $I_0^q(c)$ gilt:

68)
$$I_0^q(c) = 1$$

---

[1]) Neumann, loc. cit. Gl. 44, S. 32.

Es ist ferner

$$I_1^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{(1 - 2\lambda\cos\Theta + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzen wir unter den Integralzeichen für den Ausdruck im Nenner die obige Entwicklung ein, so erhalten wir

$$I_1^1(c) = \frac{1-\lambda^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\Theta\,(1 + 3\lambda\cos\Theta + \frac{9}{4}\lambda^2 + \cdots)\, d\Theta$$

$= 3\,c$ in erster Annäherung.

Daraus folgt in analoger Weise für die $I_1^q(c)$

69) $$I_1^q(c) = (2q+1)\,c$$

Es genügt für unsere Zwecke, wenn wir in dem Ausdruck für Φ_{22} nur die $I_0^q(c)$ und die $I_1^q(c)$ beibehalten.

Berücksichtigen wir, daß

69ᵃ) $$C_0^q = \frac{1}{2a}$$

und

$$C_1^q = \frac{1}{(2q+1)\,2a}$$

ist, so können wir Φ_{22} wie folgt schreiben:

$$\Phi_{22} = -c_{10}\, R\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\sum_0^\infty {}^q \left[\frac{1}{2a}\frac{A_0^q(\lambda_0)}{A_0^q(c)} A_0^q(\lambda)\cos q\varphi + \frac{c}{2a}\frac{A_1^q(\lambda_0)}{A_1^q(c)} A_1^q(\lambda)\cos(\omega-\omega_0)\cos q\varphi\right]$$

Es sind nun die elliptischen Integrale zu berechnen, welche die $A_p^q(\lambda)$ darstellen. Wir werden auch hier wieder, ähnlich wie Gl. 43 oben, versuchen, Rekursionsformeln für diese Größen zu gewinnen, um daraus die Größenordnungen dieser Integrale festzustellen. Differenzieren wir z. B. auch hier $A_p^q(\lambda)$ nach λ, so erhalten wir

$$70)\quad A_p^{q'}(\lambda) = \frac{p\lambda^{p-1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\cos q\Theta\cos^2\frac{\Theta}{2}\,(-2p+1)\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}},\ (q = 1, 2 \cdots)$$

Setzen wir im Zähler des zweiten Integrals der rechten Seite für $\cos^2\frac{\Theta}{2}$ den identischen Faktor $\frac{1+\cos\Theta}{2}$, so erscheint darin das Produkt $\cos q\Theta\,(1+\cos\Theta)$, das dargestellt werden kann durch

$$\cos q\Theta + \cos q\Theta\cos\Theta = \cos q\Theta + \frac{1}{2}\cos(q+1)\Theta + \frac{1}{2}\cos(q-1)\Theta$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks läßt sich das zweite Integral folgendermassen schreiben:

$$\frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\cos q\Theta\cos^2\frac{\Theta}{2}\,(-2p+1)\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$= -\frac{2p+1}{2}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$-\frac{2p+1}{4}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(q+1)\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

$$-\frac{2p+1}{4}\,\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(q-1)\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

Die 3 Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung sind aber nichts anderes als $A_{p+1}^{q}(\lambda)$, $A_{p+1}^{q+1}(\lambda)$ und $A_{p+1}^{q-1}(\lambda)$, jedes multipliziert mit dem Faktor $\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}$. Setzen wir weiter das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (70)

$$\frac{p\lambda^{p-1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}=\frac{p}{\lambda}A_p^q(\lambda)$$

so erhalten wir:

$$71)\quad A_p^{q\prime}(\lambda)=\frac{p}{\lambda}A_p^q(\lambda)-\frac{2p+1}{2}A_{p+1}^q(\lambda)-\frac{2p+1}{4}A_{p+1}^{q+1}(\lambda)-\frac{2p+1}{4}A_{p+1}^{q-1}(\lambda)$$

Die allgemeine Rekursionsformel, wie sie uns in (71) vorliegt, gestattet die Berechnung der $A_{p+1}^{q+1}(\lambda)$ aus den $A_p^q(\lambda)$; jedoch gibt sie uns über die Frage, die wievielte Potenz von $\frac{1}{c}$ $A_p^q(\lambda)$ ist, d. h. über die Art, wie die $A_p^q(\lambda)$ unendlich werden, noch keinen Aufschluß. Versuchen wir daher nochmals einen Weg, wie wir ihn bei Gleichung (41) und ff. begangen haben.

Es sei

$$A_p^q(\lambda)=\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

und

$$A_p^{q\prime}(\lambda)=\frac{p}{\lambda}A_p^q(\lambda)-(2p+1)\frac{\lambda^{p+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\cos^2\frac{\Theta}{2}\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+3}{2}}}$$

Die erste Gleichung mit $(2p+1)$, die zweite mit $(1-\lambda^2)$ multipliziert, und die beiden Gleichungen addiert, gibt:

$$(2p+1)\,A^q_{p+1}(\lambda)+(1-\lambda^2)\,A^{q\prime}_p(\lambda)=\frac{p(1-\lambda^2)}{\lambda}\,A^q_p(\lambda)+(2p+1)\,\lambda\,A^q_p(\lambda)$$

$$=\left(\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right)A^q_p(\lambda)$$

(bei Vernachlässigung der Glieder mit λ^2 auf der rechten Seite).

Aus (72) folgt direkt:

$$73)\quad A^q_{p+1}(\lambda)=\left[\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right]\frac{A^q_p(\lambda)}{2p+1}-\frac{1}{2p+1}(1-\lambda^2)\,A^{q\prime}_p(\lambda)$$

Für $p=0$ ergibt sich hieraus

$$73^a)\qquad A^q_1(\lambda)=\lambda\,A^q_0(\lambda)-(1-\lambda^2)\,A^{q\prime}_0(\lambda)$$

ein Resultat, das identisch ist mit dem in Gleichung (43) oben gewonnenen. Zur Herleitung der $A^{q+1}_p(\lambda)$ aus den $A^q_p(\lambda)$ verfahren wir in gleicher Weise:

Bekanntlich ist

$$74)\qquad A^q_0(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\,d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$A^{q+1}_0(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(q+1)\,d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\text{da }\cos(q+1)\Theta=2\cos q\,\Theta\cos\Theta-\cos(q-1)\,\Theta$$

$$75)\qquad =\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2\cos q\Theta\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)}\,d\Theta-A^{q-1}_0(\lambda)$$

Multiplizieren wir (74) mit 4, (75) mit $-(1-\lambda^2)$ und addieren, so erhalten wir:

$$\int \frac{2\cos q\,\Theta\, d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+1-\lambda^2\right]+(1-\lambda^2)\,A_0^{q-1}$$

$$(\lambda)-2\lambda^2 A_0^q(\lambda)+(1-\lambda^2)A_0^{q-1}(\lambda)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 4\cos q\,\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\,\Theta$$

Daraus folgt sofort

$$A_0^{q+1}(\lambda)=\frac{2\,(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)}\,A_0^q(\lambda)-A_0^{q-1}(\lambda)$$

$$\text{6)} \qquad -\frac{1}{1-\lambda^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 4\cos q\,\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\,\Theta$$

Die Gleichung (76) lehrt uns, wie man die $A_0^{q+1}(\lambda)$ aus en $A_0^q(\lambda)$, $A_0^{q-1}(\lambda)$ und einem elliptischen Integrale zweiter rt von der Form der Jacobischen E Integrale berechnen kann.

Der Fall $q=0$ und der Fall $q=1$ bedarf einer beson-eren Betrachtung:

$$A_0^0(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$A_0^1(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int \frac{\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)d\,\Theta}{\left(\ldots\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(2p+1)A_{p+1}^q(\lambda)+(1-\lambda^2)A_p^{q\prime}(\lambda)=\frac{p(1-\lambda^2)}{\lambda}A_p^q(\lambda)+(2p+1)\lambda A_p^q(\lambda)$$
$$=\left(\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right)A_p^q(\lambda)$$

(bei Vernachlässigung der Glieder mit λ^2 auf der rechten Seite).

Aus (72) folgt direkt:

$$73)\quad A_{p+1}^q(\lambda)=\left[\frac{p}{\lambda}+\lambda(2p+1)\right]\frac{A_p^q(\lambda)}{2p+1}-\frac{1}{2p+1}(1-\lambda^2)A_p^{q\prime}(\lambda)$$

Für $p=0$ ergibt sich hieraus

$$73^a)\qquad A_1^q(\lambda)=\lambda A_0^q(\lambda)-(1-\lambda^2)A_0^{q\prime}(\lambda)$$

ein Resultat, das identisch ist mit dem in Gleichung (43) oben gewonnenen. Zur Herleitung der $A_p^{q+1}(\lambda)$ aus den $A_p^q(\lambda)$ verfahren wir in gleicher Weise:

Bekanntlich ist

$$74)\qquad A_0^q(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\,d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$A_0^{q+1}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(q+1)\,d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\text{da } \cos(q+1)\Theta=2\cos q\,\Theta\cos\Theta-\cos(q-1)\Theta$$

$$75)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\cos q\Theta\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)}d\Theta-A_0^{q-1}(\lambda)$$

Multiplizieren wir (74) mit 4, (75) mit $-(1-\lambda^2)$ und addieren, so erhalten wir:

$$4 A_0^q(\lambda) - (1-\lambda^2) A_0^{q+1}(\lambda)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}}\left[2-(1-\lambda^2)\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)\right]+(1-\lambda^2)A_0^{q-1}\; A_0^q$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\cos q\Theta\, d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}}\left[2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+1-\lambda^2\right]+(1-\lambda^2)A_0^{q-1}$$

$$2A_0^q(\lambda)-2\lambda^2A_0^q(\lambda)+(1-\lambda^2)A_0^{q-1}(\lambda)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}4\cos q\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}d\Theta$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}A_0^{q+1}(\lambda) &= \frac{2(1+\lambda^2)}{(1-\lambda^2)}A_0^q(\lambda) - A_0^{q-1}(\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{1-\lambda^4}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}4\cos q\Theta\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}d\Theta\end{aligned} \tag{76}$$

Die Gleichung (76) lehrt uns, wie man die $A_0^{q+1}(\lambda)$ aus den $A_0^q(\lambda)$, $A_0^{q-1}(\lambda)$ und einem elliptischen Integrale zweiter Art von der Form der Jacobischen E Integrale berechnen kann.

Der Fall $q=0$ und der Fall $q=1$ bedarf einer besonderen Betrachtung:

$$A_0^0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}}$$

$$A_0^1(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac12}}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2, die zweite mit $-\frac{(1-\lambda^2)}{2}$ und addieren. Die Summe ist:

$$2\,A_0^0(\lambda)-\frac{1-\lambda^2}{2}A_0^1(\lambda)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left[2-(1-\lambda^2)\left(2\cos^2\frac{\Theta}{2}-1\right)\right]}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}d\Theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)+1-\lambda^2}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=(1-\lambda^2)\,A_0^1(\lambda)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\Theta$$

und

$$77)\quad A_0^1(\lambda)=2\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}A_0^0(\lambda)-\frac{2}{(1-\lambda^2)}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d$$

In dem Ausdruck für Φ_{aa} ist eine Summe der Form

$$\sum_0^{\infty}{}_q\left[\frac{1}{2a}\frac{A_0^q(\lambda_0)}{A_0^q(c)}A_0^q(\lambda)\cos q\varphi+\frac{c}{4a}\frac{A_1^q(\lambda_0)}{A_1^q(c)}A_1^q(\lambda)\cos(\omega-\omega_0)\cos q$$

enthalten. Die darin vorkommenden $A_0^q(\lambda_0)$ und $A_1^q(\lambda_0)$ si
bestimmte Konstanten, die man erhält, indem man in der al
gemeinen Formel

$$A_p^q(\lambda)=\frac{\lambda^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}\qquad q=0$$

$$+\frac{\lambda^p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos q\,\Theta\,d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}\qquad q=1,2\ldots$$

für p die Werte 0 resp. 1, für λ seinen Wert im Kugelmittelpunkt setzt. Wichtig für die Auswertung der Summe ist noch die Kenntnis der Werte der Verhältnisse $\frac{A_1^q(\lambda)}{A_1^q(c)}$ und $\frac{A_0^q(\lambda)}{A_0^q(c)}$.

Wir wissen, daß $A_0^q(\lambda)$ unendlich wird wie $(-\log\lambda)$ und ebenso $A_0^q(c)$ unendlich wird wie $(-\log c)$.

Daraus schließen wir, daß

$$78)\qquad \frac{A_0^q(\lambda)}{A_0^q(c)} = \frac{\log\lambda}{\log c}$$

Andererseits entnehmen wir aus Gleichung (73a), daß $A_1^q(\lambda)$ und $A_1^q(c)$ unendlich werden wie $-A_0^{q\prime}(\lambda)$ resp. $-A_0^q(c)$, d. h. wie $\frac{1}{\lambda}$ resp. wie $\frac{1}{c}$.

Für das Verhältnis erhalten wir also die Gleichung

$$79)\qquad \frac{A_1^q(\lambda)}{A_1^q(c)} = \frac{c}{\lambda}$$

Den Ausdruck für Φ_{22} i. e. für die erste Reflexion der Kugelschwingung am Ringe können wir jetzt in folgender Form schreiben:

$$80)\qquad \begin{aligned} \Phi_{22} = &- c_{10}\frac{1}{2a}R(1-c\cos\omega)\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{\log\lambda}{\log c} \\ &\sum_0^\infty A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi \\ &- c_{10}\frac{c}{\lambda}\frac{c}{2a}(1-c\cos\omega)\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2} \\ &\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos(\omega-\omega_0)\cos q\varphi \end{aligned}$$

Die Werte der beiden Summen lassen sich mit Hilfe von Formeln, die von Neumann loc. cit. entwickelt sind, angeben: **Betrachten wir zunächst** die Summe $\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$.

Die reziproke Entfernung $\frac{1}{E}$ des Kugelmittelpunktes vom Polarkreis des Ringes stellt sich nach Neumann[1]) dar durch

$$\frac{1}{E} = \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

Ferner ist[2])

$$\frac{1}{E} = \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}\,\sum_0^{\infty} {}^q \frac{1}{2a} A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich also

$$\text{81)} \qquad \sum_0^{\infty} {}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

Zur Berechnung von $\sum_0^{\infty} {}^q A_1^q(\lambda_0)\cos(\omega - \omega_0)\cos q\varphi$ wird uns der Ausdruck für die reziproke Entfernung, wie ihn Neumann Gleichung (28) und (29) S. 26 gibt, nützlich sein.

Die beiden Gleichungen lauten in unserer Bezeichnungsweise

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_0^2) - 4\lambda\lambda_0\cos(\omega - \omega_0) - (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

und

[1]) Neumann, loc. cit. Gl. 6, S. 17.
[2]) ibid. Gl. 10, S. 20.

$$\mathfrak{T} = \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_0) \cos p(\omega - \omega_0) \cos q\varphi$$

Die $J_p^q(\lambda)$ der zweiten Gleichung hängen nur von den λ des ersten Ausdruckes, die $A_p^q(\lambda_0)$ nur von den λ_0 ab. Bilden wir nun $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}$ für $\lambda = 0$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}_{\lambda=0} = \frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda_0 \cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

$$= \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q C_p^q (J_p^{q\prime}(\lambda))_{\lambda=0} A_p^q(\lambda_0) \cos p(\omega - \omega_0) \cos q\varphi$$

Nun ist für $p = 1$ nach Gleichung (69) und (69ᵃ)

$$C_1^q = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2q+1}$$

$$(J_1^{q\prime}(\lambda))_{\lambda=0} = 2q + 1$$

Dies eingesetzt gibt

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2a} \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0) \cos(\omega - \omega_0) \cos q\varphi$$

Es ist ferner

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \cos(\omega - \omega_0)\, d(\omega - \omega_0) = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{2}\, a^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\omega - \omega_0)\, d(\omega - \omega_0)}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi$$

und

$$\frac{2\lambda_0}{\sqrt{2}\, a^2} \frac{1}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a} \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi$$

so daß schließlich

$$\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0) \cos q\varphi = \frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda^2)\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{72}$$

Φ_{22} läßt sich also jetzt in folgender geschlossener Form darstellen:

$$\Phi_{22} = -\frac{c_{10} R}{2a}(1 - c\cos\omega)\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{\log\lambda}{\log c}\,\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})}$$

83)

$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}(1 - c\cos\omega)\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

Wir haben nun die nötigen Daten, um nach der Formel

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \cdots \Phi_{21} + \Phi_{22} + \cdots$$

die Potentialfunktion für den Außenraum des Systems Kugel-Ring, in der Nähe des Ringes, hinschreiben zu können.

Wir erhalten für Φ_a

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} - c_{20}\frac{\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\frac{R}{r} + \cdots$$

$$+\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}}\Big[\sum_0^\infty{}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos q\varphi$$

$$+\sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^{\prime q}\sin\omega)A_1^q(\lambda)\cos q\varphi\Big]$$

84) $$-c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{\log\lambda}{\log c}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\lambda_0\cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

Da wir uns, um die Konstantenverhältnisse, sowie um die ößie k zu bestimmen, der Relationen

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu_{(\lambda)}} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu_{(\lambda)}}$$

bedienen haben, haben wir zunächst die Potentialfunkonen für den Innenraum von Kugel und Ring aufstellen.

Für die Kugel gilt wieder[1])

$$\text{)}\quad \Phi_i = c_{10} \frac{\sin k r}{\sin k R} \frac{R}{r} + c_{11} \frac{\sin k r - k r \cos k r}{\sin k R - k R \cos k R} \frac{R^2}{r^2} \cos \Theta + \cdots$$

it den Randwerten

$$\Phi = c_{10} + c_{11} \cos \Theta + \cdots$$

Für den Innenraum des Ringes, wo Φ den Randwert hat

$$\Phi = \frac{\sqrt{1 - 2 c \cos \omega + c^2}}{\sqrt{a}} \Big[\sum_0^\infty {}_q\, c_{20}^q \cos (q \varphi) \log c$$

$$- \sum_0^\infty {}_q\, (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \frac{1}{c} + \cdots \Big]$$

lt[2])

$$\Phi_i = \frac{\sqrt{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}} \Big[\sum_0^\infty {}_q\, c_{20}^q \cos q \varphi \frac{A_0^q (c)}{I_0^q (c)} I_0^q (\lambda)$$

$$+ \sum_0^\infty {}_q (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \frac{A_1^q}{I_1^q (c)} I_1^q (\lambda) + \cdot \Big]$$

Für die $I_p^q(\lambda)$ resp. $I_p^q(c)$ hatten wir gefunden

---

[1]) I. S. 49, Gl. 30.

[2]) Neumann, loc. cit. Gl. 44, S. 32.

$$I_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int\limits_{\substack{0\\ p=0}}^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

$$+ \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{\pi} \int\limits_{\substack{0\\ p=1,2\ldots}}^{2\pi} \frac{\cos p\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

Also ist

$$I_0^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

$$= 1 + \lambda^2 \frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4} \text{ [1])}$$

und

$$I_1^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{\sqrt{q^2-a^2k^2}}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1}{2}}}$$

$$= \lambda\,(2\sqrt{q^2-a^2k^2}+1)$$

Entsprechendes gilt natürlich auch von $I_0^q(c)$ und $I_1^q(c)$, so daß die Beziehungen gelten

$$\frac{I_0^q(\lambda)}{I_0^q(c)} = \frac{1+\lambda^2\,\dfrac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}{1+c^2\,\dfrac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}$$

$$\frac{I_1^q(\lambda)}{I_1^q(c)} = \frac{\lambda}{c}$$

---

[1]) Hier muß λ^2 beibehalten werden, weil bei der Differentiation nach λ die Konstante fortfällt, und das Glied mit λ das Hauptglied wird; vgl. 1. S. 55.

so daß man für Φ_i des Innenraums des Ringes die Gleichung hat:

$$\Phi_i = -\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}$$

86)
$$\left[\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q (c_{20}^q \cos q\varphi) \log c \frac{1+\lambda^2\frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}{1+c^2\frac{4(q^2-a^2k^2)+1}{4}}\right.$$
$$\left.-\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi \frac{\lambda}{c^2}\right]^{1)}$$

Bestimmung der normalen Ableitungen am Ring.

Auch in diesem Falle genügt es, um $\frac{\partial \Phi_{a(i)}}{\partial \nu}$ kennen zu lernen, aus demselben Grunde, wie S. 11, die Differentiation nach λ auszuführen.

Wir fanden für Φ_a (Gl. 84):

$$\Phi_a = c_{10}\frac{R}{r} - c_{20}^q \frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}} A_0^q(\lambda_0)\frac{R}{r} + \cdots$$
$$+\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\left[\sum_0^\infty{}^q c_{20}^q A_0^q(\lambda)\cos q\varphi\right.$$
$$\left.+\sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)A_1^q(\lambda)\cos q\varphi\right]$$
$$-c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$
$$\frac{\log\lambda}{\log c}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}$$
$$-c_{10}\frac{c^2}{2a\lambda}\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}$$
$$\frac{2\sqrt{2}\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

---

1) $\varepsilon_q = 1$ für $q = 0$
$\varepsilon_q = 2$ für $q = 1, 2, 3, \ldots.$

Vor der Differentiation ist r durch λ auszudrücken. Führen wir dies gemäß den Gleichungen (23) und (23ª) aus, setzen weiter für $A_0^q(\lambda_0)$ und $A_1^q(\lambda_0)$ die gefundenen Werte ein, und ordnen in einer für die Differentiation etwas bequemeren Weise, so erhalten wir (für Φ_a in der Nähe des Ringes)

$$\Phi_a = -\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\left[\log\lambda\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q c_{20}^q\cos q\varphi - \frac{1}{\lambda}\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q(c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$
$$+ c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}$$
$$\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} - (1-c\cos\omega)\frac{\log\lambda}{\log c}\right]$$
$$+ c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\,\frac{2\sqrt{2}\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{\left(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}\right)^3}$$
$$\left[\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\lambda - \frac{c^2}{\lambda}(1-c\cos\omega)\right]^{1)}$$

Hieraus ergibt sich für $\frac{\partial\Phi_a}{\partial\lambda}$ unter Berücksichtigung des Umstandes, daß nach der Differentiation $\lambda = c$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial\lambda} = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{\sqrt{a}}\right)\left[\log c\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q c_{20}^q\cos q\varphi - \frac{1}{c}\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q(c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

87)

$$-\frac{\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{\sqrt{a}}\left[\frac{1}{c}\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q c_{20}^q\cos q\varphi + \frac{1}{c^2}\sum_0^\infty{}^q\varepsilon_q(c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

[1]) $\varepsilon_q = 1$ für $q = 0$
$\varepsilon_q = 2$ für $q = 1, 2, 3 \ldots$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}}$$

$$\left[-\frac{1}{c \log c} - \cos\omega \left(1 - \frac{1}{\log c}\right)\right]$$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \frac{4\sqrt{2}\,\lambda_0 \cos(\omega - \omega_0)}{(\sqrt{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi})^3}$$

Die Gleichung für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ lautet:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = -\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\left[\log c \sum_0^\infty \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi \frac{1 + \lambda^2 \frac{4(q^2 - a^2k^2) + 1}{4}}{1 + c^2 \frac{4(q^2 - a^2k^2) + 1}{4}}\right.$$

)

$$\left. - \frac{1}{c} \sum_0^\infty \varepsilon_q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega) \cos q\varphi\right]$$

$$- \frac{\sqrt{1 - 2c\cos\omega + c^2}}{\sqrt{a}} \left[- \sum_0^\infty \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi \log c\, 2a^2 c k^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \sum_0^\infty \varepsilon_q (c_{21}^q \cos\omega + C_{21}^q \sin\omega) \cos q\varphi \right]$$

Hinsichtlich des im zweiten Gliede der rechten Seite auf-etenden Faktors $-2a^2k^2$ ist zu bemerken, daß sich für den ifferentialquotient nach λ von

$$\frac{1 + \lambda^2 \frac{4(q^2 - a^2k^2) + 1}{4}}{1 + c^2 \frac{4(q^2 - a^2k^2) + 1}{4}}$$

gentlich ergibt

$$\frac{4(q^2 - a^2k^2) + 1}{2}$$

daß es jedoch gestattet ist, die Größe q^2 zu vernachlässigen, so lange es sich um kleine q handelt. Denn setzen wir auch hier

$$k = k_0 + \varepsilon \text{ (wo } \varepsilon \text{ eine kleine Größe)}$$

so ist

$$a^2 k^2 = a^2 k_0^2 + 2 a^2 k_0 \varepsilon$$

(indem Glieder mit ε^2 vernachlässigt werden), groß gegen q^2, denn es ist erstens

$$a^2 k_0^2 \text{ groß von der Ordnung } \frac{1}{2 c^2 K_c}$$

und

$$2 a^2 k_0 \varepsilon \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{2 a^2}{a c \sqrt{2 K_c}} \quad \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{a} K_c R}$$

$$2 a^2 k_0 \varepsilon \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{2\sqrt{a}}{c K_c \sqrt{2 R}}$$

Wir haben jetzt die beiden Differentialquotienten einander gleichzusetzen, und bemerken zunächst, daß das erste Glied auf der rechten Seite in $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda}$ dem ersten Gliede der rechten Seite in $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}$ gleich ist. Wir erhalten demnach:

$$-\frac{\sqrt{1 - 2 c \cos \omega + c^2}}{\sqrt{a}} \left[\frac{1}{c} \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q \varphi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2} \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q (c_{21}^q \cos \omega + C_{21}^q \sin \omega) \cos q \varphi \right]$$

$$89) \quad + c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty{}^q A_0^q (\lambda_0) \cos q \varphi$$

$$\left[-\frac{1}{c \log c} - \cos \omega \left(1 - \frac{1}{\log c}\right) \right]$$

$$+ c_{10} \frac{R}{2a} \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2} \sum_0^\infty{}^q A_1^q (\lambda_0) \cos q \varphi \cos(\omega - \omega_0)$$

$$= -\frac{\sqrt{1-2c\cos\omega+c^2}}{\sqrt{a}}\left[-2a^2k^2 c\log c\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^2}\sum_0^\infty{}^q (c_{21}^q\cos\omega + C_{21}^q\sin\omega)\cos q\varphi\right]$$

wo $k^2 = (k_0+\varepsilon)^2$ ist. (ε ist eine kleine Größe.)

Durch Gleichsetzung der Glieder, welche $\cos\omega$ oder $\sin\omega$ nicht enthalten, ergibt sich:

$$-\frac{1}{c\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi$$

90) $$-c_{10}\frac{R}{2a}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi\frac{1}{c\log c}$$

$$= +\frac{c}{\sqrt{a}}\log c\, 2a^2(k_0+\varepsilon)^2\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi$$

Lösen wir nach $\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi$ auf, und setzen wir die den Größenordnungen von $a_2 k_0^2$ resp. $2a^2k_0$ entsprechenden, S. 304 gefundenen Werte ein, so erhalten wir

91) $$\sum_0^\infty \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi = -\frac{c_{10}R\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{4a\sqrt{2a\varepsilon c}(-\log c)^{\frac{3}{2}}}$$

$\log c$ hat im Nenner von 91 negatives Vorzeichen, da K_c unendlich wird wie $-\log c$. Für R können wir noch den sich aus der Synchronismusgleichung ergebenden Wert einsetzen, so daß wir schließlich erhalten

92) $$\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi = -\frac{c_{10}\pi\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{8\sqrt{a\varepsilon}(-\log c)}$$

Für c_{20}^q ergibt sich

92a) $$\varepsilon^q c_{20}^q = -\frac{c_{10}\pi\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}A_0^q(\lambda_0)}{8\sqrt{a\varepsilon}K_c}$$

Durch Gleichsetzen der Glieder, welche $\cos\omega$ enthalten, erhält man eine Gleichung für die Konstante $\sum_0^\infty{}^q c_{21}^q \cos q\,\varphi$

$$
93)\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q \cos q\,\varphi - \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{21}^q \cos q\,\varphi
$$

$$
-\frac{c_{10}}{2\,a}\,R\sqrt{1-2\,\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi
$$

$$
+\,c_{10}\,\frac{R}{2\,a}\sqrt{1-2\,\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi\cos\omega_0
$$

$$
=-\frac{2\,c^2}{\sqrt{a}}\log c\,a^2(k_0+\varepsilon)^2\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{20}^q\cos q\,\varphi+\frac{1}{c^2\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{21}^q\cos q\,\varphi
$$

Daraus folgt, bei Vernachlässigung von Gliedern mit c^2 (die außerdem $\sqrt{K_\varepsilon}$ im Nenner haben)

$$
94)\quad \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, c_{21}^q \cos q\,\varphi = -\frac{c_{10}\,c^2}{4\sqrt{a}}\,R\sqrt{1-2\,\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}
\left[\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi-\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi\cos\omega_0\right]
$$

Durch Gleichsetzen der Glieder, welche $\sin\omega$ enthalten, ergibt sich für $\sum_0^\infty{}^q C_{21}^q \cos q\,\varphi$

$$
95)\quad -\frac{1}{c^2\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, C_{21}^q\cos q\,\varphi + c_{10}\,\frac{R}{2\,a}\sin\omega_0\sqrt{1-2\,\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}
\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi = +\frac{1}{c^2\sqrt{a}}\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, C_{21}^q\cos q\,\varphi
$$

$$
96)\quad \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q\, C_{21}^q\cos q\,\varphi
= c_{10}\,c^2\,\frac{R}{4\sqrt{a}}\sin\omega_0\sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\,\varphi\cdot\sqrt{1-2\,\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}
$$

Auch in (94) und (96) kann R durch den sich auch (10) ergebenden Wert ausgedrückt werden.

Um k resp. ε bestimmen zu können, ist es erforderlich, die Operation

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$$

auch an der Kugel auszuführen.

Aus der Gleichung (84) erhalten wir für $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}$

$$97)\quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} = -c_{10}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}}\sum_0^\infty q\, c_{20}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

während wir für $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}$ aus Gleichung (85) den Wert finden:

$$98)\quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = -c_{10}\frac{1}{R} + c_{10}\, k \operatorname{cotg} k R$$

Also ist

$$99)\quad -\frac{c_{10}}{R} + \sum_0^\infty q A_0^q(\lambda_0)\varepsilon_q c_{20}^q \frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{R\sqrt{a}} = -\frac{c_{10}}{R} + c_{10}\, k \operatorname{cotg} k R$$

und

$$99^a)\quad c_{10}\, k \operatorname{cotg} k R = \frac{\sum_0^\infty q A_0^q(\lambda_0)\varepsilon_q c_{20}^q}{R}\frac{\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}}{\sqrt{a}}$$

Diese Gleichung, Gl. (92^a), sowie die Relation (51) geben uns folgende quadratische Gleichung für ε

$$100)\quad k\varepsilon^2 R^2 = \frac{\pi(1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2)\left[A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty q A_0^{q2}(\lambda_0)\right]}{8 K_c a}$$

Nach Einsetzen von $k = \frac{\pi}{2R}$ ergibt sich für εR der Ausdruck

$$101)\quad \varepsilon R = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^{q2}(\lambda_0)}\sqrt{R}}{\sqrt{K_c\, a}}$$

Aus den gleichen Gründen wie oben entscheiden wir uns für das negative Vorzeichen der Wurzel.

Mit Hilfe von (101) stellen sich dann die Konstanten $\sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q$ folgendermaßen dar:

$$102)\quad \sum_0^\infty{}^q \varepsilon_q c_{20}^q \cos q\varphi = \frac{c_{10}\, \pi \sqrt{R} \sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0) \cos q\varphi}{4\sqrt{K_c}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q (\lambda_0)^2 + A_0^0(\lambda_0)^2}}$$

Nach Einsetzung der Konstanten wird dann Φ am Ringe (denn auf diesen Wert kommt es vor allem an):

$$103)\quad \Phi = c_{10} \frac{\sqrt{R}\sqrt{1-2c\cos\omega + c^2}}{4\sqrt{a}} \left[\frac{\pi \sqrt{K_c} \sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi}{\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)^2}} \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{a}} \sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}\,(-c) \left[\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi \cos\omega \right.$$

$$\left. - \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\varphi \cos(\omega - \omega_0) \right]$$

Setzen wir hier für

$$\sum_0^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)\cos q\varphi \quad \text{und für} \quad \sum_0^\infty{}^q A_1^q(\lambda_0)\cos q\varphi$$

die in (81) und (82) gefundenen Werte ein, so wird

$$103^a)\quad \Phi = \frac{c_{10}\sqrt{R}\sqrt{1-2c\cos\omega + c^2}}{4\sqrt{a}}$$

$$\left[\frac{\pi\sqrt{K_c}\sqrt{2}}{\sqrt{A_0^0(\lambda_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^q A_0^q(\lambda_0)^2}\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}} \right.$$

$$-\frac{c\sqrt{R}}{\sqrt{a}}\sqrt{1-2\lambda_0\cos\omega_0+\lambda_0^2}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\omega}{\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi}}\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{2}\,\lambda_0\cos(\omega-\omega_0)}{(\sqrt{1+\lambda_0^2-(1-\lambda_0^2)\cos\varphi})^3}\right]$$

Aus dieser Formel können wir ein sehr interessantes Resultat entnehmen. (103) sagt aus, daß die Schwingung des Ringes abhängig ist von der φ-Richtung, oder mit anderen Worten, daß der Ring eine longitudinale Schwingungskomponente in Richtung seiner Peripherie besitzt.

Die Kräfte, die von der Kugel auf den Ring ausgeübt werden, berechnen wir nach den von Korn (loc. cit. S. 139) entwickelten Formeln. Es wurden dort gefunden

$$X=\frac{\mu k^2}{4}\int_\Omega \Phi^2\cos n\,x\,d\,\omega$$

$$Y=\frac{\mu k^2}{4}\int_\Omega \Phi^2\cos n\,y\,d\,\omega$$

$$Z=\frac{\mu k^2}{4}\int_\Omega \Phi^2\cos n\,z\,d\,\omega$$

Hier haben sich die Integrale über die Oberfläche des Ringes zu erstrecken, dessen Oberflächenelement nach Neumann[1]) gegeben ist durch

$$d\,o=\frac{2\,a^2\,c\,d\,\omega\,d\,\varphi}{(1-2\,c\cos\omega+c^2)^2}$$

Für die drei Richtungs-Kosinusse erhalten wir[2])

[1]) Neumann, loc. cit. S. 39. Wir vernachlässigen, der bisherigen Praxis gemäß, in dem von Neumann gegebenen Ausdruck das Glied mit $-c^2$.

[2]) Mit Hilfe der Neumannschen Formeln 10, S. 14.

$$\cos n x = \frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\sin \omega}{1 + 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

$$\text{104)} \qquad \cos n y = \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\cos \varphi (\cos \omega - \lambda)}{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

$$\cos n z = \frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\sin \varphi (\cos \omega - \lambda)}{1 - 2 \lambda \cos \omega + \lambda^2}$$

Bei der Ausführung der Integration setzen wir für λ seinen Wert an der Ringoberfläche, d. h. c, und erhalten so Integrale der Form

$$X = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \sin \omega \, d \omega \, d \varphi}{(1 - 2 c \cos \omega + c^2)^3}$$

$$\text{105)} \qquad Y = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \cos \varphi (\cos \omega - c) \, d \omega \, d \varphi}{(1 - 2 c \cos \omega + c^2)^3}$$

$$Z = \frac{\mu a^2 k c}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi^2 \sin \varphi (\cos \omega - c) \, d \omega \, d \varphi}{(1 - 2 c \cos \omega + c^2)^3}$$

Für X erhalten wir, wenn wir in Φ für $\sqrt{K_c}$ den aus (10) entnommenen Wert $\frac{R\sqrt{2}}{a c \pi}$ einsetzen, und berücksichtigen, daß

$$\left(\sum_0^\infty {}^q A_0^q (\lambda_0)^2\right) = 2 \pi A_0^{0\,2} (\lambda_0) + \pi \sum_1^\infty {}^q A_0^{q\,2} (\lambda_0) = \frac{2 \pi}{\lambda_0}$$

ist resp. daß

$$\sqrt{\sum_0^\infty {}^q A_0^q (\lambda_0)^2} = \sqrt{A_0^0 (\lambda_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty {}^q A_0^q (\lambda_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0}}$$

ist, den Wert

$$X = \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, c\, \lambda_0 \sqrt{\lambda_0} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2a}}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega \cos(\omega - \omega_0)\, d\omega\, d\varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0)^2 \cos\varphi)^2 (1 - 2c\cos\omega + c^2)}$$

$$106)\quad = \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi\, c\, \lambda_0 \sqrt{\lambda_0} \sin\omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2a}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{[(1 + \lambda_0^2) - (1 - \lambda_0^2)^2 \cos\varphi]^2}$$

$$= \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi^2 c \sin\omega_0 (1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{8\lambda_0 \sqrt{\lambda_0}}$$

Liegt das Kugelzentrum auf der Rotationsachse, d. h. wird $\lambda_0 = 1$, dann ergibt sich X zu

$$106^a)\quad X = \frac{\mu k^2 c_{10}^2 R^2 \sqrt{R}\, \pi^2 \sin\omega_0 \sqrt{1 - c\cos\omega}}{2\sqrt{2}}$$

Fällt der Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polarkreises des Ringes zusammen, dann nähert sich $\sin\omega_0$ der Null, und damit wird X ebenfalls Null, was in Übereinstimmung mit der Aussage S. 286 ist.

Für Y erhalten wir, nach Ausführung der Integration nach $d\omega$

$$107)\quad Y = \frac{\mu k^2 c_{10}^2}{4}\left[\frac{\pi R^3 \lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0)^2 \cos\varphi}\right.$$

$$- \frac{R^2 \sqrt{R}\, \pi\, c \sqrt{\lambda_0} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi}$$

$$\left. + R\sqrt{Ra}\, \pi c^2 \lambda_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2} \cos\omega_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1 + \lambda_0^2 - (1 - \lambda_0^2)\cos\varphi)^2}\right]$$

$$= \frac{\mu k^2 c_{10}^2 \pi^2}{4} \left[\frac{R^3(1-\lambda_0)}{4a(1+\lambda_0)} - \frac{R^2 \sqrt{Rc} \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}(1-\lambda_0)}{8\sqrt{2a\lambda_0}(1+\lambda_0)} \right.$$

$$\left. + \frac{R\sqrt{R}\sqrt{a}\, c^2 \cos\omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda_0 \cos\omega_0 + \lambda_0^2}(1-\lambda_0^2)}{16\lambda_0} \right]$$

107ª) $$Y = 0$$

Die Kraftkomponente in der Richtung Z stellt sich dar wie folgt: $Z =$

$$\frac{\mu k^2 c_{10}^2}{4} \left[\frac{R\pi^2 K_c a c}{4 \sum_0^\infty \varrho A_0^\varrho(\lambda_0)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi(\cos\omega - c)\, d\omega\, d\varphi}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi)(1 - 2c\cos\omega + c^2)^2} \right.$$

$$- \frac{R\sqrt{R}\,\pi\sqrt{K_c a}\, c^2 \sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}}{4\sqrt{\sum_0^\infty \varrho A_0^\varrho(\lambda_0)^2}}$$

108) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi(\cos\omega - c)\cos\omega\, d\omega\, d\varphi}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi)(1 - 2c\cos\omega + c^2)^2}$$

$$+ \frac{R\sqrt{R}\sqrt{1 - 2\lambda_0\cos\omega_0 + \lambda_0^2}\,\pi\sqrt{K_c}\sqrt{a}\, c^2 \lambda_0}{\sqrt{\sum_0^\infty \varrho A_0^\varrho(\lambda_0)^2}}$$

$$\left. \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi(\cos\omega - c)\cos(\omega - \omega_0)\, d\omega\, d\varphi}{(1+\lambda_0^2 - (1-\lambda_0^2)\cos\varphi)^2 (1 - 2c\cos\omega + c^2)^2} \right]$$

Da sämtliche Glieder der rechten Seite bei der Integration nach φ verschwinden, so ergibt sich

108ª) $$Z = 0$$

Dieses Resultat erklärt sich daraus, daß die x-Achse unseres rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Rotationsachse zusammenfällt, und die xy-Ebene den Kugelmittelpunkt und die Rotationsachse enthält.

Eine Umrechnung der für X und Y erhaltenen Werte auf rechtwinklige Koordinaten unterlassen wir, da sich eine Vereinfachung der Formeln dadurch nicht ergibt.

Unsere Resultate können wir in folgende Sätze zusammenfassen:

Fällt der Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polarkreises des Ringes zusammen, dann treten keine Kräfte auf, und das Gleichgewicht ist stabil, denn erteilt man der Kugel eine kleine Verrückung aus dieser Gleichgewichtslage, so treten sofort Kräfte auf, die den Ring in die Gleichgewichtslage zurückzuführen suchen.

Für eine in beliebiger Richtung vor sich gehende Verrückung sind diese Kräfte der Form

$$X = K m_1 m_2 \frac{\sin \omega_0 (1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 - 2 \lambda_0 \cos \omega_0 + \lambda_0^2}}{\lambda_0 \sqrt{\lambda_0}}$$

$$Y = K' m_1 m_2 \frac{(1 - \lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0} (1 + \lambda_0)}$$

$$Z = 0$$

Für eine in Richtung der X-Achse vor sich gehende Verrückung, also für $\lambda_0 = 1$, $\omega_0 < \pi$, erhält man

$$X = K m_1 m_2 \sin \omega_0 \sqrt{1 - c \cos \omega}$$

$$Y = 0$$

$$Z = 0$$

K, K', m_1 und m_2 sind Konstanten, von denen die letzteren von den Dimensionen der Kugel und des Ringes abhängen.

Zugleich zeigen unsere Resultate, wie man die Theorie der universellen Schwingungen von Systemen schwach kompressibler Körper in einem inkorrepressiblen Medium auf andere Gleichgewichtsprobleme anwenden kann, wie z. B. auf das Problem des stabilen Gleichgewichts des Systems von Saturn und seiner Ringe.

Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern.

Von Oskar Perron.

(Eingelaufen 1. Juli.)

Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

die Zahlen a_ν, b_ν sämtlich reell und positiv sind, so gilt das fundamentale von Seidel und Stern auf verschiedenen Wegen bewiesene Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch divergiert dann und nur dann, wenn die beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \ldots a_{2\nu}}{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \ldots a_{2\nu-1}} \cdot \frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} \text{ und } \sum_\nu \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \ldots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}$$

konvergieren.[1])

Aus diesem allgemeinen Theorem lassen sich leicht mannigfache weitere Sätze herleiten, die wenigstens eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches liefern.[2]) Alle diese Untersuchungen gehören aber eigentlich der Reihenlehre an. Im folgenden will ich nun durch höchst einfache Betrachtungen unabhängig von der Reihenlehre eine unendliche

---

[1]) Vgl. Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. I, pag. 127, 128.

[2]) Pringsheim, Münchner Berichte 1899.

Folge von sukzessive schärferen Konvergenzkriterien aufstellen, deren Herleitung aus dem obigen Satz auch nur schwer gelingen dürfte. Diese versagen zwar in vielen Fällen, wo die von Pringsheim l. c. gegebenen Kriterien die Konvergenz erkennen lassen, sie geben aber auch umgekehrt vielfach eine Entscheidung, wenn die Pringsheimschen Sätze im Stich lassen. Größeres Interesse dürfte das eingeschlagene Verfahren jedoch aus dem Grund beanspruchen, weil sich mittels desselben, wie ich demnächst zeigen werde, mutatis mutandis auch die Konvergenz der allgemeineren Jacobischen Kettenbruchalgorithmen streng beweisen läßt, was bislang nicht gelungen.

§ 1.

Bezeichnet man den ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, so bestehen die Formeln

$$(1)\quad \begin{aligned} A_1 &= a_1, \; A_2 = a_1 b_2, & A_\nu &= a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1}, \\ B_1 &= b_1, \; B_2 = b_1 b_2 + a_2, & B_\nu &= a_\nu B_{\nu-2} + b_\nu B_{\nu-1}; \end{aligned}$$

$$(2)\quad A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu,$$

aus denen man in bekannter Weise schließt, **daß die beiden** Grenzwerte

$$(3)\quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = K, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = k$$

existieren, und die Ungleichungen gelten

$$(4)\quad \frac{A_1}{B_1} > \frac{A_3}{B_3} > \cdots > K \geqq k > \cdots > \frac{A_4}{B_4} > \frac{A_2}{B_2}.$$

Konvergenz oder Divergenz findet dann statt, je nachdem $K = k$ oder $K > k$ ist.

Aus den Rekursionsformeln (1) folgt nun ohne weiteres, wenn zur Abkürzung

$$\frac{b_\nu B_{\nu-1}}{B_\nu} = \lambda_\nu, \text{ also } \frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} = 1 - \lambda_\nu$$

gesetzt wird (λ_ν und $1 - \lambda_\nu$ sind notwendig positiv):

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = (1 - \lambda_\nu)\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}} + \lambda_\nu \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}},$$

oder indem man gerade und ungerade Werte von ν gesondert betrachtet

$$(5^a) \qquad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = (1 - \lambda_{2\nu})\frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} + \lambda_{2\nu} \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$$

$$(5^b) \qquad \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = (1 - \lambda_{2\nu+1})\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} + \lambda_{2\nu+1} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}.$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann nach (3) und (4) ν so groß gewählt werden, daß $\frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} > k - \varepsilon$ wird, außerdem ist auch $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} > K$, $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} < k$. Hienach folgt aus ($5^a$)

$$k > (1 - \lambda_{2\nu})(k - \varepsilon) + \lambda_{2\nu} K,$$

und durch eine analoge Überlegung aus (5^b)

$$K < (1 - \lambda_{2\nu+1})(K + \varepsilon) + \lambda_{2\nu+1} k.$$

Sowohl für gerade wie für ungerade ν ergibt sich hieraus übereinstimmend

$$\lambda_\nu (K - k) < \varepsilon (1 - \lambda_\nu),$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} (K - k)\frac{\lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu} = 0.$$

Wenn demnach der Kettenbruch divergiert, also $K - k$ von 0 verschieden ist, so muß $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu} = 0$ sein, und wir erhalten somit das Kriterium:

Der Kettenbruch konvergiert sicher, wenn

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{b_\nu B_{\nu-1}}{a_\nu B_{\nu-2}} > 0.$$

Da nach (1) $\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu-2}} > b_{\nu-1}$ sein muß, so folgt die Konvergenz erst recht, falls

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu} > 0.$$

§ 2.

Bekanntlich ist es für die Konvergenz des Kettenbruches schon hinreichend, wenn die Reihe $\sum \frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}$ divergiert; nach Pringsheim l. c. genügt sogar die Divergenz von $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}}$. Der eben entwickelte Satz ist hieraus ohne weiteres zu entnehmen und von geringerer Tragweite; er ist aber auch nur das Anfangsglied der unendlichen Folge, die wir entwickeln wollen. Um die weiteren zu erhalten, dehnen wir das Verfahren in folgender Weise aus:

Vermehrt man in A_ν, B_ν die Indizes sämtlicher a, b um eine Zahl $\varkappa$, so soll der entstehende Ausdruck mit $A_{\nu,\varkappa}$ bezw. $B_{\nu,\varkappa}$ bezeichnet werden, so daß $\frac{A_{\nu,\varkappa}}{B_{\nu,\varkappa}}$ der ν^{te} Näherungsbruch des Kettenbruches

$$\cfrac{a_{\varkappa+1}}{b_{\varkappa+1} + \cfrac{a_{\varkappa+2}}{b_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

ist. Man findet dann leicht, etwa durch vollständige Induktion in Bezug auf $\varkappa$, die Relationen

(6) $A_{\nu+\varkappa} = A_{\nu-1,\varkappa+1}\, A_\varkappa$ [illegible]
$B_{\nu+\varkappa} =$ [illegible]

und wenn man analog zu (3) die Grenzwerte

(7) $\lim_{\nu=\infty}$ [illegible] $= k_\varkappa$

einführt, so ist auch

$$(8) \qquad \frac{A_{1,\varkappa}}{B_{1,\varkappa}} > \frac{A_{3,\varkappa}}{B_{3,\varkappa}} > \cdots > K_\varkappa \geq k_\varkappa > \cdots > \frac{A_{4,\varkappa}}{B_{4,\varkappa}} > \frac{A_{2,\varkappa}}{B_{2,\varkappa}}.$$

Aus den Gleichungen (6) folgt, wenn abkürzungsweise

$$\frac{B_{\varkappa-1,\nu+1}\,B_{\nu+1}}{B_{\nu+\varkappa}} = \lambda_{\nu,\varkappa}, \text{ also } \frac{A_{\varkappa-1,\nu+1}\,B_\nu}{B_{\nu+\varkappa}} = 1 - \lambda_{\nu,\varkappa}$$

gesetzt wird,

$$(9) \qquad \frac{A_{\nu+\varkappa}}{B_{\nu+\varkappa}} = (1-\lambda_{\nu,\varkappa})\frac{A_\nu}{B_\nu} + \lambda_{\nu,\varkappa}\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}.$$

Zunächst sei $\varkappa$ eine gerade Zahl; indem man demgemäß $2\varkappa$ an Stelle von $\varkappa$ schreibt, folgt aus (9)

$$(9^a) \qquad \frac{A_{2\nu+2\varkappa}}{B_{2\nu+2\varkappa}} = (1-\lambda_{2\nu,2\varkappa})\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} + \lambda_{2\nu,2\varkappa}\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}},$$

$$(9^b) \qquad \frac{A_{2\nu+1+2\varkappa}}{B_{2\nu+1+2\varkappa}} = (1-\lambda_{2\nu+1,2\varkappa})\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} + \lambda_{2\nu+1,2\varkappa}\frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}.$$

Auf diese Gleichungen sind nun dieselben Betrachtungen anwendbar, wie auf (5^a) und (5^b); doch lehrt die folgende Überlegung noch etwas mehr. Läßt man in (9^a) $\varkappa$ ins Unendliche wachsen, so folgt

$$k = \left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}\right)\cdot \lim_{\varkappa=\infty}\lambda_{2\nu,2\varkappa} + \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$$

$$= \left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}\right)\cdot \lim_{\varkappa=\infty}(1-\lambda_{2\nu,2\varkappa}) + \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}},$$

und hieraus auch

$$\frac{k - \dfrac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}}{\dfrac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - k}$$

$$= \lim_{\varkappa=\infty}\frac{\lambda_{2\nu,2\varkappa}}{1-\lambda_{2\nu,2\varkappa}} = \lim_{\varkappa=\infty}\frac{B_{2\varkappa-1,2\nu+1}}{A_{2\varkappa-1,2\nu+1}}\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu}} = \frac{1}{K_{2\nu+1}}\cdot\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu}}.$$

Ebenso folgt aus (9^b)

$$\frac{\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - K}{K - \frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}} = \frac{1}{K_{2\nu+2}} \frac{B_{2\nu+2}}{B_{2\nu+1}}.$$

Wenn der Kettenbruch divergiert, so konvergieren die linken Seiten mit wachsendem ν gegen 0, also konvergiert auch $\frac{1}{K_\nu} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}$ sowohl für gerade als für ungerade ν gegen 0. Daraus entspringt der Satz:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Ungleichung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{1}{K_\nu} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 0$$

statthat. In dieser Form dürfte der Satz kaum auf einen Kettenbruch anwendbar sein; allein vermöge der Ungleichungen (8) entspringt daraus die weitere Folgerung:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn für irgend einen Wert von λ

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > 0.$$

Und wegen $\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > b_\nu$ a fortiori:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn für irgend einen Wert von λ

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{B_{2\lambda-1,\nu}}{A_{2\lambda-1,\nu}} b_\nu > 0.$$

Aus (8) ersieht man weiter: Wenn eine dieser Bedingungen für einen gewissen Wert von λ erfüllt ist, so ist sie auch für jedes größere λ erfüllt, aber nicht umgekehrt. Für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ erhält man also eine unendliche Folge immer schärferer Kriterien.

Für $\lambda = 1$ ergibt sich der Satz des vorigen Paragraphen; für $\lambda = 2$ folgt die für Konvergenz hinreichende Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}+\frac{a_{\nu+2} b_\nu b_{\nu+3}}{a_{\nu+1}(a_{\nu+3}+b_{\nu+2} b_{\nu+3})}\right)>0.$$

Danach ist z. B. der Kettenbruch, bei dem

$$\begin{array}{ll} a_{2\nu}=1, & a_{2\nu-1}=g^{2\nu-1} \\ b_{2\nu}=g^{-\nu}, & b_{2\nu-1}=g^{-\nu}, \end{array} \quad (g>1)$$

konvergent, während die Reihe

$$\sum\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu} \quad \text{und auch} \quad \sum\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu-1}}{a_\nu}}$$

konvergiert, also eine Entscheidung nicht gestattet.

§ 3.

Eine zweite Folge von unendlich vielen Konvergenzkriterien erhält man durch eine analoge Behandlung der Gleichung (9) für ungerade Werte von $\varkappa$. Schreibt man demgemäß $2\varkappa+1$ an Stelle von $\varkappa$, so folgt

$$(10^a) \quad \frac{A_{2\nu+2\varkappa+1}}{B_{2\nu+2\varkappa+1}}=(1-\lambda_{2\nu,2\varkappa+1})\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}+\lambda_{2\nu,2\varkappa+1}\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}},$$

$$(10^b) \quad \frac{A_{2\nu+2\varkappa+2}}{B_{2\nu+2\varkappa+2}}=(1-\lambda_{2\nu+1,2\varkappa+1})\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}+\lambda_{2\nu+1,2\varkappa+1}\frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}.$$

Geht man zur Grenze $\varkappa=\infty$ über, so folgt ähnlich wie oben

$$\frac{\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}-K}{K-\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}}=k_{2\nu+1}\frac{B_{2\nu}}{B_{2\nu+1}}; \quad \frac{k-\frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}}}{\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}-k}=k_{2\nu+2}\frac{B_{2\nu+1}}{B_{2\nu+2}},$$

und da bei Divergenz des Kettenbruches die linken Seiten mit wachsendem ν beide gegen 0 konvergieren, so erhält man den Satz:

Der Kettenbruch konvergiert für

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, k_\nu\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu}>0.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (8) erhält man hieraus das brauchbarere Kriterium:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} > 0$$

für irgend einen Wert von λ erfüllt ist.

Für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ ist dies wieder eine unendliche Folge sukzessive schärferer Kriterien. Um sie für die Anwendung noch etwas bequemer zu gestalten, beachte man

$$\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} = b_\nu + a_\nu \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} < b_\nu + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}} = \frac{b_\nu b_{\nu-1} + a_\nu}{b_{\nu-1}}.$$

Mit Rücksicht darauf folgt aus obigem:

Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{A_{2\lambda,\nu}}{B_{2\lambda,\nu}} \frac{b_{\nu-1}}{a_\nu + b_\nu b_{\nu-1}} > 0$$

für irgend einen Wert von λ erfüllt ist.

Beispielsweise ergibt sich für $\lambda = 1$ die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{a_{\nu+1} b_{\nu-1} b_{\nu+2}}{(a_{\nu+2} + b_{\nu+1} b_{\nu+2})(a_\nu + b_\nu b_{\nu-1})} > 0.$$

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 146. Stiftungstages

am 15. März 1905.

Der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, eröffnet die Sitzung mit einer Rede „zu Schillers Gedächtnis", welche in einer besonderen Schrift der Akademie erschienen ist.

Sodann machte derselbe Mitteilung aus der Chronik der Akademie über einige bedeutungsvollere Vorkommnisse des verflossenen Jahres.

In der Festsitzung des vorigen Jahres wurde der frohen Erwartung Ausdruck gegeben, daß nach Abzug des K. Obersten Landesgerichts aus dem ersten und zweiten Stockwerk des Nordflügels des Wilhelminums alle diese trefflich gelegenen Räume den wissenschaftlichen Sammlungen überwiesen würden; im Laufe des Winters wurde ein genauer Plan ausgearbeitet, wie das neue Domizil unter die einzelnen Institute verteilt werden sollte. Inzwischen haben sich nun aber die Aussichten auf Verwirklichung unserer Wünsche verdüstert; auch andere Behörden erheben Anspruch auf Beherbergung in den frei werdenden Räumen, ja, von Schwarzsehern ist die Besorgnis ausgesprochen worden, es möchte schließlich unserer Akademie die Rolle des Poeten in Schillers Gedichte „Die Teilung der Erde" beschieden sein, wobei freilich der Unterschied festgestellt werden müßte, daß die Akademie zuerst auf den Plan getreten war. Wir halten fest an der Hoffnung, daß es dem hohen Staatsministerium gelingen werde, das Interesse der

wissenschaftlichen Sammlungen, für deren Gedeihen eine ausreichende Erweiterung der Räumlichkeiten so notwendig ist, wie Luft und Licht für ihre Hüter, gegen gewiß berechtigte, aber nicht rechtzeitig geltend gemachte Ansprüche der Nachbarn zu schützen.

Wenn diese Angelegenheit nur die innere Entwicklung unserer Museen betrifft, so berührt eine andere Frage auch die breiteste Öffentlichkeit. In der Frage der Verlegung des Botanischen Gartens fallen die Interessen der Wissenschaft, der Künstlerschaft und der Stadt zusammen. Alle beteiligten Faktoren fordern die Verlegung. Schon vor 50 Jahren hat Martius ausgesprochen: „Wenn der Glaspalast in den Botanischen Garten hineingestellt wird, kann dieser seiner Aufgabe nicht mehr gerecht werden.“ In Würdigung der vielen Nachteile, welche die Unterbringung des Botanischen Gartens auf dem gegenwärtig allseitig von hohen Häusern eingeschlossenen Areal mit sich bringt, und der vielen Vorteile, welche die Übersiedlung auf einen von der Natur selbst besser begünstigten und umfassenderen Platz bieten würde, kann sich das Generalkonservatorium in voller Übereinstimmung mit dem Konservatorium des Botanischen Gartens und des Pflanzenphysiologischen Instituts nur für möglichst baldige Verlegung aussprechen.

Auch im verflossenen Jahre haben sich unsere Sammlungen mancher dankenswerten Zuwendung von Seite opferwilliger Forscher und Sammler zu erfreuen gehabt, und ebenso schreitet in rüstigem Tempo die Bearbeitung älterer Schenkungen fort. So sind die tertiären Wirbeltiere, welche Herr Geheimer Hofrat Theodor Stützel auf der Insel Samos ausgegraben und im Jahre 1898 unserer paläontologischen Staatssammlung geschenkt hat, und ebenso diejenigen, welche später von dem Privatgelehrten Herrn Albert Hentschel dort aufgefunden und unserer Sammlung überlassen wurden, nunmehr durch den II. Konservator, Herrn Dr. Max Schlosser, und Herrn Privatdozenten Dr. Max Weber wissenschaftlich be-

arbeitet worden. Es hat sich dabei bestätigt, daß die Objekte in der Tat jenen eigenartigen, hervorragenden Wert haben, den ihnen Zittel schon unmittelbar nach der Aufspürung zugesprochen hatte. Diese Sammlung der ausgestorbenen Säugetierfauna von Samos ist jedenfalls die vollständigste, welche gegenwärtig existiert, und besonders wichtig wegen ihres Reichtums an Rhinocerotiden und Antilopenarten. Dem Verdienste der beiden Donatoren ist dadurch gebührende Anerkennung gezollt worden, daß zwei neue Antilopenarten die Namen Stützels und Hentschels erhalten haben.

Eine höchst willkommene Bereicherung wird die zoologische Sammlung erfahren durch die Tiere, welche der II. Konservator, Herr Dr. Doflein, von seiner jüngsten Reise nach Ostasien mitgebracht hat. Die Reise wurde im Auftrag und mit Unterstützung Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten unternommen; auch aus den Mitteln der Bürgerstiftung, sowie von einigen für die Wissenschaft begeisterten Privaten wurde dazu beigesteuert. Die Expedition war anfangs von schwerem Mißgeschick verfolgt. Drei ernste Schiffsunfälle zogen nicht bloß eine peinliche Verzögerung nach sich, sondern es verdarben dabei auch viele Instrumente und Vorräte. Später trat eine glücklichere Wendung ein. Sowohl im nördlichen wie im mittleren Japan wurden für den eigentlichen Zweck des Unternehmens, die hydrographische und zoologische Untersuchung der japanischen Gewässer, günstige Ergebnisse erzielt. Nicht zum wenigsten sind diese Erfolge dem verständnisvollen Entgegenkommen der japanischen Behörden und der intelligenten Bevölkerung der besuchten Gebiete zu verdanken, und es sei dafür auch von dieser Stelle der aufrichtigste Dank ausgesprochen. Auf der Heimkehr wurde noch auf Ceylon Aufenthalt genommen. Auf längeren Wanderungen durch die Dschungeln konnte über die Fauna des tropischen Waldes eine Reihe von interessanten Beobachtungen gemacht werden, und eine reiche Sammlung von Tieren aller Arten wurde erworben. Da also die Resultate der Reise ebenso vom Standpunkte der Wissenschaft wie von dem des

Volksunterrichtes zu begrüßen sind, sei Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten nochmals ehrfurchtsvoller Dank gezollt.

Freilich taucht auch bei diesem Gewinn sofort wieder die bange Frage auf: Wo sollen die umfangreichen Schätze untergebracht werden? Nur durch eine ausreichende Erweiterung der Lokalitäten des zoologischen Instituts, die teilweise zur Zeit mehr den Eindruck vollgestopfter Magazine als denjenigen einer wissenschaftlichen Sammlung machen, kann der ideale Zweck erreicht, können die neuen oder kritischen Arten mit der nötigen Sorgfalt beobachtet und alle übrigen erforderlichen wissenschaftlichen Arbeiten geleistet werden. Erst dann wird es auch möglich sein, einem längst empfundenen Bedürfnis entsprechend, auch der bayerischen Fauna die gebührende Berücksichtigung zu widmen.

Einen ungewöhnlich wertvollen Zuwachs bedeutet ferner die Erwerbung des Moosherbars des in Memmingen verstorbenen Medizinalrates Dr. Holler, das um eine aus den Zinsen des Mannheimer Fonds entnommene, namhafte Summe für unsere Sammlungen angekauft werden konnte. Es umfaßt nicht weniger als 1118 Arten europäischer Laubmoose in ungefähr 22200 Exemplaren und 238 Arten europäischer Lebermoose in etwa 2500 Exemplaren. Auch diese kostbare Sammlung ist wegen der beschränkten Raumverhältnisse des Pflanzenphysiologischen Instituts nicht anders als auf einem Korridor unterzubringen.

Aus den von unserer Akademie zu verwaltenden Stiftungen konnte eine Reihe von wissenschaftlichen Forschungen und Unternehmungen unterstützt werden.

Aus den Zinsen der Thereianos-Stiftung erhielt Herr Johannes Svoronos in Athen einen Preis von 800 M. für sein 1904 erschienenes, dreibändiges Werk: Die Münzen des Ptolemäerreiches.

Ferner wurde beschlossen, weitere Unterstützungen zuzuwenden:

1. für das Werk „Griechische Vasenmalerei“, herausgegeben von Furtwängler und Reichold, 2500 M.;

2. der „Byzantinischen Zeitschrift“, herausgegeben von Krumbacher, 1500 M.;

3. zur Förderung der Arbeiten für das „Corpus griechischer Urkunden“ 1200 M.

Aus den Zinsen der Münchener Bürgerstiftung und der Cramer-Klett-Stiftung wurden bewilligt:

1. 600 M. an den Observator des erdmagnetischen Observatoriums, Dr. Johann Messerschmitt, zur Beschaffung eines selbstregistrierenden Elektrometers;

2. 2500 M. als Zuschuß zu der Studienreise des II. Konservators der zoologischen Staatssammlung, Dr. Franz Doflein;

3. 2220 M. als Zuschuß zu der 1903 unternommenen Informations- und Sammelreise des Inspektors am Botanischen Garten, Bernhard Othmer.

Aus den Zinsen der Stiftung für chemische Forschung wurden genehmigt:

1. 500 M. für den Professor der Chemie, Dr. Oskar Piloty, zu Untersuchungen von Pyrolverbindungen;

2. 100 M. für den Professor der Chemie, Dr. Karl Hofmann, zu Untersuchungen von radioaktiven Materialien;

3. 100 M. für den Adjunkten des chemischen Staatslaboratoriums, Dr. Ludwig Vanino, zur Beschaffung von Gold- und Platinpräparaten;

4. 200 M. für den Privatdozenten der Chemie in Erlangen Dr. Henrich zur Untersuchung der radioaktiven Beschaffenheit der Wiesbadener Heilquelle.

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit, teilt mit, daß die mathematisch-physikalische Klasse in dem vergangenen Jahre drei korrespondierende Mitglieder durch den Tod verloren hat:

1. Dr. Wilhelm His, Professor der Anatomie an der Universität Leipzig, gestorben am 1. Mai 1904;

2. Dr. Friedrich Knapp, Professor der Technologie an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, gestorben am 8. Juni 1904;

3. Dr. Ernst Abbe, ordentlicher Honorar-Professor für theoretische Physik an der Universität Jena, gestorben am 14. Januar 1905.

Hierauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr Professor Dr. August Rothpletz, die inzwischen besonders erschienene Denkrede auf Karl Alfred v. Zittel.

I.

Wilhelm His.[1])

Geheimrat Professor Dr. Wilhelm His, seit 1900 korrespondierendes Mitglied unserer Akademie, ist am 1. Mai 1904 zu Leipzig in fast vollendetem 73. Lebensjahre an einem Magenleiden gestorben.

Es handelt sich um einen der ersten Anatomen seiner Zeit, der weit über den Kreis der Fachgenossen hinaus verdientes Ansehen genoß. Er ist auf anthropologischem und histologischem, aber vorherrschend auf embryologischem Gebiete tätig gewesen und hat in allen Fragen theoretischer Art, welche die Entwicklungsgeschichte in den letzten 30 Jahren bewegten, eine hervorragende Stimme geführt.

Er wurde am 9. Juli 1831 in Basel als der Sohn des Leiters des alten Sarasinschen Seidengeschäftes geboren; das Elternhaus war der Mittelpunkt einer geistig angeregten Geselligkeit, in dem auch die bedeutendsten Gelehrten der Universität verkehrten. Der regsame Knabe besuchte zunächst die Schulen seiner Vaterstadt; nach Absolvierung des Gym-

[1]) Siehe die Nekrologe von Rudolf Fick im Anatomischen Anzeiger 1904 Bd. 25 Nr. 7 und 8 S. 161—208; von Spalteholz in der Münchener medizinischen Wochenschrift 1901 Nr. 28 S. 1138 und 1904 Nr. 22, S. 972.

nasiums, wo er sich in den Freistunden eifrig mit Daguerreotypieren beschäftigte, entschloß er sich Medizin zu studieren (1849—1854). Nachdem er zuerst die heimischen Universitäten zu Basel und Bern besucht hatte, ging er für drei Semester nach Berlin, woselbst die mächtige Persönlichkeit von Johannes Müller, der damals das ganze biologische Gebiet beherrschte, tiefen Eindruck auf ihn machte und ihn der Morphologie zuführte; auch Robert Remak, bei dem er Vorlesungen über Entwicklungsgeschichte hörte, übte großen Einfluß auf ihn aus. Bei dem bald in ihm erwachten Interesse für die theoretischen Fächer betrieb er die klinischen Studien nur so weit, um die medizinischen Prüfungen bestehen zu können. Von Berlin zog es ihn nach Würzburg, das damals der Sammelpunkt strebsamer Mediziner und angehender Forscher war. Angeregt durch eine Anzahl hervorragender Lehrer, durch Kölliker, Virchow, Scherer, Leydig, Heinrich Müller, herrschte in dieser für alle unvergeßlichen schönen Zeit eine Begeisterung für die Wissenschaft und ein reger geistiger Verkehr unter den Studierenden. Auch His fand sich bald in diesem Kreise heimisch und galt als einer der Führenden, nachdem er unter Virchow, im Anschluß an dessen Bindegeweblehre, eine mikroskopische Untersuchung über die Struktur der Hornhaut begonnen hatte. Nach der damals üblichen Reise nach Prag und Wien zur Ausbildung in den praktischen Fächern der Medizin kehrte er in die Heimat zurück, um die Examina zu machen und den Doktorgrad zu erwerben (1854), zu welchem Zwecke er die in Würzburg angefangene bemerkenswerte Arbeit über die normale und pathologische Histologie der Hornhaut benützte. Nun war ihm klar geworden, daß die praktische Medizin nicht seine Lebensaufgabe bilde, sondern die Anatomie und Physiologie; er begab sich auf vier Monate nach Paris und besuchte daselbst die Vorlesungen von Regnault, Balard, Wurtz, Boussingault, Brown-Séquard, Claude Bernard, die seinen Blick erweiterten. In Basel machte er unter Schönbein chemische Versuche über die Beziehungen des Blutes zum erregten Sauerstoff und habilitierte sich dann (1856) unter dem

von ihm als vielseitigen und hochbegabten Gelehrten verehrten Anatomen und Physiologen Georg Meißner mit einer Rede über Zellen und Gewebe. Kaum hatte er ein Jahr lang über normale und pathologische Anatomie Vorlesungen gehalten, als Meißner einen Ruf an die Universität Freiburg i. B. bekam (1857) und so die ordentliche Professur für Anatomie und Physiologie in Basel frei wurde. Es ist ein Beweis für das Vertrauen, das man in das Talent von His setzte, daß man ihm im Alter von 26 Jahren das schwierige Amt übertrug. Er wirkte in demselben 18 Jahre lang und entwickelte sich zu einem der angesehensten Anatomen, so daß er nach dem Rücktritt des hervorragenden Anatomen und Physiologen Ernst Heinrich Weber (1872) als Professor der Anatomie nach Leipzig berufen wurde. In dieser Stellung, einer der ersten der deutschen Hochschulen, wirkte er mit W. Braune, der die Professur für topographische Anatomie erhalten hatte, 32 Jahre lang bis zu seinem Tode, reich an Erfolgen als einer der gefeiertsten Lehrer der großen Universität. Das nach seinen Angaben im Jahre 1875 vollendete anatomische Institut ist ein mustergültiges Vorbild geworden.

Die wissenschaftliche Tätigkeit von His bezog sich anfangs auf histologische Fragen. In der schon erwähnten ersten Arbeit über die Hornhaut wurden die damals nur unvollkommen bekannten Hornhautzellen isoliert und ihre Beziehung zur Interzellularsubstanz festgestellt. Dann kamen Untersuchungen über den feineren Bau der Gewebe des menschlichen Organismus, insbesondere der zu dem Lymphsystem gehörigen Gebilde; er entdeckte dabei das adenoide Bindegewebe in den die weißen Blutkörperchen erzeugenden Organen; beschrieb in den Lymphdrüsen die Rinden- und Marksubstanz sowie die Lymphsinus [illegible] den feineren Bau der Peyerschen Haufen, der Thymusdrüse mit ihrem Zentralkanal dar; verfolgte die Lymphgefäßwurzeln und die Lymphgefäße der nervösen Zentralorgane, [illegible] die perivaskulären Lymphscheiden nach. [illegible] die Nervenverzweigung in der äußeren Haut der [illegible]. Es ist charakteristisch, daß ihn bei seinen

histologischen Untersuchungen nicht nur der Bau der Teile interessierte, sondern daß er stets auch Rückschlüsse auf die physiologischen Vorgänge der Gebilde zu machen suchte.

Aber alle diese histologischen Funde, so verdienstvoll sie auch waren, hätten nicht seinen Ruhm begründet, seine Bedeutung hat er vielmehr durch seine entwicklungsgeschichtlichen Forschungen erlangt. Er wurde dazu geführt durch die Untersuchung des Baues des Säugetiereierstockes (1865), bei welcher er auch die früheren Stufen dieses Organes betrachtete und die fertigen Formen desselben von den Keimblättern aus abzuleiten suchte. Dadurch angeregt begann er in dem an Gedanken reichen akademischen Programm aus seiner Baseler Zeit (1865) „die Häute und Höhlen des Körpers“ zu prüfen, inwieweit sich im allgemeinen die einzelnen Organe von den Keimblättern ableiten lassen; und indem er diese Untersuchungen immer weiter verfolgte, gelangte er zu seinen bedeutungsvollsten Entdeckungen. Er ging dabei bis zu der ersten Anlage des Wirbeltierleibes im unbebrüteten Ei des Hühnchens zurück. Dies führte ihn dazu, die frühere Remaksche Lehre von der Entstehung des mittleren Keimblattes fallen zu lassen und eine neue Lehre aufzustellen, nach der im Vogelei von Anfang an zwei getrennte mittlere Keimanlagen vorhanden sein sollen, der Archiblast und der Parablast; der erstere stellt den Hauptteil der Keimscheibe dar, aus welchem das Zentralnervensystem, die peripheren Nerven, die Oberhautgebilde, die Drüsen und die quergestreiften und glatten Muskeln hervorgehen; der letztere ist ein aus dem weißen Dotter entstehender Nebenkeim, der das Blut und die Bindesubstanz liefert. Diese sogenannte Parablastenlehre wurde von der Mehrzahl der Embryologen lebhaft bekämpft, und als später Beobachtungen zum Teil von His selbst gemacht wurden, die mit ihr nicht übereinstimmten, z. B. daß die parablastischen Gewebe nicht aus dem weißen Dotter hervorgehen und das Blut und die Bindesubstanzen nicht eine gemeinsame Herkunft haben, gab His (1881) seine Lehre selbst auf. Aber es muß erwähnt werden, daß die damit zusammenhängende

Unterscheidung von Epithelien und Endothelien auf einem anderen Gebiete, dem der pathologischen Anatomie, namentlich in der Entwicklung der Geschwulstlehre, sich sehr förderlich erwiesen hat. Später (1900) kam er in seiner Abhandlung „Lecithoblast und Angioblast" wieder auf diese Fragen zurück; er stellte darin fest, daß die Anlagen der Gefäße und der Bindesubstanz getrennt sind, und die letztere aus dem embryonalen Mesoderm entstehen.

Schon in seinen ersten Arbeiten über die Höhlen und Häute des Körpers (1865) und über die erste Anlage des Wirbeltierleibes am Hühnchen (1867) kam er bei dem Suchen nach der Ursache der Entstehung der mannigfaltigen Formen des Embryo zu einer mechanistischen Betrachtungsweise für die Erklärung entwicklungsgeschichtlicher Vorgänge; er glaubte in den Umbildungen biegsamer Platten und Röhren durch Horizontalschub Ähnlichkeit zu erkennen mit den Formveränderungen der Embryonalanlage während der Entwicklung und so suchte er für die letzteren die mechanische Ursache in dem ungleichen Wachstum der verschiedenen Teile der Anlage und den dadurch hervorgerufenen Spannungen und Widerständen an anderen Stellen, wodurch Zusammenschiebungen, Faltungen, Röhrenbildungen etc. entstehen. Er führte auf solche Falten- und Rinnenbildung der Embryonalanlage die Medullarrinne, die Kopfbeugung, die Herzfalte etc. zurück. Diese anfangs von manchen widersprochene Annahme hat immer mehr Anhänger gefunden; His ist dadurch zu einem der bedeutendsten Vertreter der Entwicklungsmechanik geworden. In der höchst wichtigen Abhandlung: „Unsere Körperform und das physiologische Problem ihrer Entstehung" (1874) ist diese Theorie ausführlich dargelegt; es findet sich darin auch eine scharfe Kritik des biogenetischen Grundgesetzes von Häckel.

Von der größten Bedeutung sind die Bemühungen von His auf dem Spezialgebiete der Embryologie des Menschen gewesen; in dem großen mit einem Atlas versehenen Werke: „Die Anatomie menschlicher Embrionen" (1880—1885) sind

die Ergebnisse seiner Forschungen an dem von ihm gesammelten reichhaltigen Material niedergelegt; es findet sich darin zum ersten Male eine Schilderung der ganzen menschlichen Entwicklungsgeschichte in zusammenhängender Weise und eine Beschreibung aller Stadien und Organe von der Furchung an bis zur Ausbildung der ausgewachsenen Form. Hier nimmt His unbestritten die erste Stelle ein; die Anatomie menschlicher Embryonen gehört nach allgemeinem Urteil zu den klassischen Werken der ontogenetischen Literatur.

Bei den Beobachtungen über die frühesten Entwicklungsstadien des Wirbeltierembryo gelangt er zu seiner berühmten Konkreszenztheorie (1874), nach welcher die beiden Hälften des Embryo gesondert angelegt sind; die Mitte der Keimscheibe enthalte zuerst nur die Anlage des Kopfes, während am Rand der Keimscheibe die Anlagen der axialen Rumpfteile entstehen, die dann sekundär in die Mitte herangezogen werden und dort verwachsen. Diese Theorie, oder richtiger wohl Hypothese, ist viel umstritten worden; es handelt sich dabei um eine ganz fundamentale Frage, durch deren Anregung His jedenfalls äußerst fruchtbar gewirkt hat.

Von größter Ausdehnung und Bedeutung sind die in den beiden letzten Jahrzehnten entstandenen Untersuchungen über die Entwicklung des Zentralnervensystems und der Nerven. In der Abhandlung über die Höhlen und Häute des Körpers läßt er, wie vorher schon erwähnt wurde, die Blutgefäße des Zentralnervensystems nicht aus dem Ektoblast entstehen, wie Remak annahm, sondern aus dem Mesoblast, von wo sie sich sekundär in das Hirn und Rückenmark hineinschieben, während die Neuroglia im Ektoblast sich bildet. Eine seiner folgenreichsten Entdeckungen auf diesem Gebiete ist die Bildung der Nervenfasern durch Auswachsen der Nervenzellen (1883); seine Lehre von den Neuroblasten, nach der jede Nervenfaser aus einer einzigen Zelle als Ausläufer hervorgeht und in ihr das genetische, nutritive und funktionelle Zentrum besitzt, ist die Grundlage der neueren Neuronenlehre. Auch hat er es zuerst ausgesprochen, daß die Fasernetze der grauen Substanz aus

einem nicht anastomosierenden Filz der aus den Protoplasmafortsätzen der Zellen hervorgehenden „Dendriten“ und der Nervenfaser-Endbäumchen bestehen. Bei seinen Untersuchungen über die Entstehung der Wurzeln des Rückenmarks (1886) zeigte er, daß die vorderen motorischen Wurzelfasern aus Zellen des Rückenmarks nach der Peripherie auswachsen, während die hinteren sensiblen Wurzelfasern von den bipolaren, die sogenannte T-Faser bildenden Zellen der Spinalganglien entspringen und von diesen in das Rückenmark hineinwachsen.

Dazu kamen seine Beiträge zur komplizierten Entwicklung des Herzens, seine wichtige Untersuchung über die Bildungsgeschichte der Nase und des Gaumens beim menschlichen Embryo; ferner die denkwürdige Abhandlung über das Prinzip der organbildenden Keimbezirke am ungefurchten Ei und die Verwandtschaften der Gewebe (1901), in der er sich gegen die Kritik seiner Anschauungen von O. Hertwig und gegen A. Weismanns Theorie des Keimplasmas ausspricht. In seiner letzten Publikation (1904), der großen Gehirnmonographie: „Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate“ faßt er seine Untersuchungsergebnisse nochmals zusammen, indem er das Entstehen der äußeren Hirnform, die Bildung des Balkens, der einzelnen zentralen Kerne und der Bahnen im Rückenmark und Gehirn, sowie die morphologische Entwicklung der Hemisphären schildert.

Es seien hier nur noch die grundlegenden Untersuchungen über die Entwicklung der Embryonen einzelner Tiere wie des Lachses, des Haifisches, der Knochenfische und der Selachier erwähnt.

Große Verdienste hat sich ferner His um die Methodik und um die Technik der Herstellung anatomischer Präparate erworben. Schon frühzeitig erkannte er, daß es für die richtige Beurteilung der Gestalt der Embryonen notwendig ist, feine Schnitte zu erhalten; er konstruierte daher als einer der ersten ein Mikrotom, mit dem er lückenlose Schnittreihen herstellte. Auch war er bestrebt, die Photographie für seine Zwecke zu verwerten und die mikrophotographischen Methoden auszubilden. Um klare Vorstellungen von den mikroskopischen Ob-

jekten zu bekommen, stellte er als erster plastische Rekonstruktionen von Embryonen in vergrößertem Maßstab her; durch diese Modelliermethode erhielt er ganze Modellreihen zur Entwicklung des Lachses, des Hühnchens und des Menschen, und bekam so eine klare körperliche Vorstellung der Gebilde, was nicht nur für die Wissenschaft sondern auch für den Unterricht von weittragender Bedeutung wurde. Für makroskopische Untersuchungen erfand er seine Situspräparate; die frischen Leichen wurden zu diesem Zwecke durch Behandlung mit Chromsäure und Alkohol gehärtet und dann die einzelnen Teile schichtenweise präpariert und davon Gipsabgüsse durch den geschickten Gipsformator Franz Steger gemacht. Es entstand so die große Sammlung der His-Stegerschen zusammensetzbaren Gipsmodelle; sie gaben neue Anschauungen über die Lagebeziehungen der Eingeweide, z. B. des Eierstockes, des weiblichen Beckens, sowie über die Form der Leber, der Niere, des Pankreas. Die Modelle sind aber auch ein unentbehrliches Hilfsmittel für den Unterricht in der topographischen Anatomie geworden.

His hat außerdem die Anthropologie und Ethnologie gefördert. Mit seinem Freunde Rütimeyer beschrieb er in Basel (1864) die schweizerischen Schädel in dem großen Werke „Crania helvetica" in mustergültiger Weise in ihren vier Haupttypen: der alemannischen, burgundischen, keltischen und römischen Form.

Bei der Aufgabe, die Grabstätte von J. S. Bach aufzufinden, wurde nach dem in dem mutmaßlichen Grabe vorgefundenen Schädel mittelst einer ingeniösen Methode eine Rekonstruktion des Kopfes versucht; zu dem Zwecke wurde von dem Schädel ein Gipsabguß gemacht und auf diesem die Dicke der bei acht älteren Männern an zahlreichen Punkten gemessenen Weichteile an den entsprechenden Stellen markiert, so daß der Bildhauer C. Seffner danach eine Büste herstellen konnte; dieselbe entsprach nun in ihren wesentlichen Eigenschaften wirklich den Bildern von Bach.

His war ein vielseitiger, an dem Wohl der Mitmenschen

herzlichen Anteil nehmender Mann. Als Mitglied des großen Rates von Basel wirkte er für das allgemeine Wohl; er war Referent in hygienischen Angelegenheiten und half getreulich mit die Stadt gesund zu gestalten; für die Schulhygiene verfaßte er auf Grund eigener Versuche ein mustergültiges Gutachten über die Schulbankfrage.

In einer Anzahl von vortrefflichen Reden hat er sich über Fragen von allgemeinem Interesse geäußert, so in der Baseler Rektoratsrede zur Geschichte des anatomischen Unterrichts in Basel, in der Antrittsrede zu Leipzig über die Aufgaben und Zielpunkte der wissenschaftlichen Anatomie und in der Leipziger Rektoratsrede über die Entwicklungsverhältnisse des akademischen Unterrichts.

His hat durch sein Schaffen der anatomischen Wissenschaft auf vielen Seiten positiven Gewinn gebracht und in stets gedankenreicher Diskussion auch dort, wo er irrte und sich seine Aufstellungen schließlich als unhaltbar erwiesen, anregend und die Forschung vertiefend gewirkt. Gerade daß er stark genug war, offen seine Irrtümer einzugestehen, zeigt ihn als wahrheitsliebenden echten Naturforscher. Unermüdlich tätig und scharf beobachtend blieb er nicht bei der einfachen Beschreibung der Objekte stehen, sondern suchte stets aus den Formen die Ursachen des Gesehenen in gedankenreicher Weise zu ergründen und die fertigen Formen auf die embryonalen zurückzuführen.

An der Universität entwickelte er eine rege, ungemein fruchtbare Lehrtätigkeit; von schlichtem klaren, streng objektiven, durch schöne Zeichnungen erläuterten Vortrag suchte er seine Schüler zum Beobachten und naturwissenschaftlichen Denken anzuleiten.

Er war einer der Gründer der Deutschen anatomischen Gesellschaft, in der er die erste Anregung zu einer einheitlichen Gestaltung der anatomischen Nomenklatur gab. — Mit W. Braune begründete er (1875) die Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte und gab seit 1877 deren Fortsetzung, die anatomische Abteilung von Müllers Archiv, heraus.

In der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften wurde er nach dem Tode von Wislicenus zum ständigen Sekretär gewählt.

His war eine ernste Natur, streng gegen sich selbst und von hoher Pflichterfüllung, dabei einfach und schlicht, zuverlässig und an seiner Überzeugung festhaltend.

Die Nachwelt wird ihm dankbar sein für das, was er der Wissenschaft geleistet hat.

II.

Friedrich Knapp.[1])

Am 8. Juni 1904 starb in Braunschweig im Alter von 90 Jahren das korrespondierende Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, der Geheimrat Friedrich Knapp. Er war bis zum Jahre 1889 Professor der technischen Chemie an der dortigen Technischen Hochschule und einer der bedeutendsten Vertreter seines Faches, sowie einer der ersten, der dasselbe, mit allen Kenntnissen ausgerüstet, wissenschaftlich betrieb. In die Akademie ist er schon im Jahre 1863 bei seinem Aufenthalte dahier zum außerordentlichen Mitgliede gewählt worden.

Er wurde am 22. Februar 1814 zu Michelstadt im Odenwalde geboren als Sohn des damaligen Gräflich Erbachschen Regierungsrates Johann Friedrich Knapp, der später als Großherzoglich Hessischer Geheimer Staatsrat in Darmstadt wirkte; als einflußreicher höherer Beamter vermochte derselbe im Ministerium vieles zu tun, um die Wünsche Liebigs in Gießen zu befriedigen. Der junge Knapp besuchte mit Freude das vortreffliche Gymnasium zu Darmstadt, in dem er die bis an sein Lebensende bewahrte Verehrung für die klassische Bildung erwarb.

Da er frühzeitig Neigung zur Chemie hatte, tat man ihn

[1]) Siehe den Nekrolog von Prof. Dr. Richard Meyer an der Technischen Hochschule zu Braunschweig in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft 1904 Nr. 19 S. 4774.

auf den Rat Liebigs zu einem Apotheker in die Lehre. Nach bestandener Gehilfenprüfung (1832) ging er ganz zur Chemie über und trat in das Laboratorium in Gießen ein, in welchem der auf der Höhe seiner wissenschaftlichen Arbeit stehende, 29jährige Liebig strebsame Jünger aus aller Herren Länder zu emsigster Tätigkeit um sich versammelt hatte; hier führte er seine ersten chemischen Untersuchungen aus. Auf den Rat Liebigs ging er dann (1837) zu Pelouze nach Paris, woselbst er ein Jahr verblieb und mit den wissenschaftlichen Größen der damaligen Zeit, mit Thenard und Gay-Lussac, den Lehrern Liebigs, mit Dumas, Regnault und dem jungen aufstrebenden Gerhardt bekannt wurde.

Nach seiner Rückkunft von Paris habilitierte er sich in Gießen, wo er 1841 außerordentlicher und 1847 ordentlicher Professor für chemische Technologie wurde; er bekam ein eigenes Laboratorium auf dem Schlosse und hielt Vorlesungen über technische Chemie.

Die 15 in Gießen verlebten Jahre waren für ihn höchst anregende und glückliche; mit vielen der Schüler Liebigs schloß er für Lebenszeit innige Freundschaft, so mit Heinrich Will, August Wilhelm Hofmann, Max Pettenkofer, Remigius Fresenius, Hermann Kopp und J. Sh. Muspratt, in dessen großen Sodafabriken in Liverpool er mehrmals längere Zeit zubrachte, um die Fabrikation künstlicher Dünger einzurichten. Im Jahre 1841 hatte er in Liebigs jüngster Schwester die Lebensgefährtin gefunden. In dieser Zeit entstand auch sein bedeutendstes Werk: Das Lehrbuch der chemischen Technologie.

Im Jahre 1852 nahm Liebig, in Verstimmung über die Nichterfüllung eines ihm vom hessischen Ministerium gegebenen Versprechens, den Ruf nach München an, was man in Gießen nicht erwartet und für unmöglich erachtet hatte. Für die Universität München, sowie für das geistige Leben der Stadt war es ein höchst glückliches Ereignis. Liebig zog die Gießener Freunde bald nach, seinen Schwiegersohn Carriere, den Anatomen Bischoff, Knapp, und die Berufung des Physikers Buff war eingeleitet. Knapp war für die technische Leitung der

berühmten königlichen Porzellanmanufaktur in Nymphenburg bestimmt, und zugleich zum ordentlichen Professor der technischen Chemie in der staatswirtschaftlichen Fakultät der Universität; in Gießen war für ihn keine Aussicht zur Verbesserung seiner Stellung infolge der reaktionären Stimmung gegen den gegenüber polizeilich-bureaukratischen Einmischungen unbeugsamen Mann. Die Doppelstellung in Nymphenburg-München war jedoch für ihn nicht als eine glückliche anzusehen, da sie ihn in den wichtigsten Jahren seines Lebens von seinen eigentlichen Zielen abdrängte.

Die Fabrik erforderte Zuschüsse vom Staate und die sparsame Kammer der Abgeordneten wollte dieselbe rentabel haben. Der künstlerische Direktor, der phantasievolle Maler Eugen Neureuther, hatte in künstlerischer Beziehung die Fabrik in die Höhe gebracht durch seine reizenden Formen, aber die Einrichtungen und der Betrieb waren ganz veraltete, wie es in einer Staatsanstalt leicht eintritt; hierin konnte der wissenschaftlich durchgebildete Knapp gegenüber den alten Praktikern so manche Betriebsfehler abstellen und bessere Einrichtungen treffen. Die Neuberufenen klagten anfangs viel über Mißtrauen und Anfeindung von seiten der Einheimischen; es mag ja von einzelnen der letzteren einiges der Art geschehen sein, aber von der anderen Seite ist auch gefehlt und manches einseitig beurteilt worden; schließlich sind sie alle gerne dagewesen und haben sich bald heimisch gefühlt. 1861 legte Knapp die Betriebsleitung der Porzellanfabrik nieder; sie kam dann in Privatbesitz und jetzt werden die alten schönen Muster von Neureuther wieder benützt. Durch die Fabrik war seine Tätigkeit an der Universität sehr beeinträchtigt: er las vor wenig Zuhörern über Geschichte der Erfindungen, die Natur der Brennstoffe und die Heizung, ausgewählte Zweige aus der chemischen Technologie, Geschichte der wichtigeren Industriezweige, über die Lehre von der Ernährung und den Nahrungsmitteln vom volkswirtschaftlichen Standpunkt.

Im Jahre 1863 erhielt er einen ehrenvollen Ruf an das in eine polytechnische Schule umgewandelte Collegium Carolinum

in Braunschweig als ordentlicher Professor für technische Chemie. Bei Begründung der hiesigen Technischen Hochschule war er für die Professur der chemischen Technologie ausersehen; er wollte aber in Braunschweig bleiben, woselbst er 26 Jahre lang fruchtbar in Lehre und Wissenschaft wirkte; aus seinem dortigen Laboratorium sind von ihm und seinen Schülern zahlreiche wertvolle Arbeiten hervorgegangen. Im Alter von 75 Jahren trat er von seinem Amte zurück und lebte von da an still im Umgang mit wenigen vertrauten Freunden; im Jahre 1900 ehrte die Technische Hochschule zu Braunschweig ihr verdienstvolles Mitglied, indem sie ihn zum ersten Doktor der Ingenieurwissenschaften ernannte. Hochbetagt ist er sanft entschlafen.

Die wissenschaftliche Tätigkeit Knapps war eine sehr fruchtbare.

Die erste recht schwierige Arbeit, die ihn 9 Monate lang beschäftigte, machte er in dem Laboratorium Liebigs in Gießen (1837) über die Entstehung der Cyanursäure aus Melam, wobei er als Zwischenprodukt das Ammelid erhielt; Liebig schätzte dieselbe sehr hoch und berichtete darüber an Berzelius.

Nach seiner Rückkehr aus Paris führte er bei Liebig eine Untersuchung zur Bildungsgeschichte des Brechweinsteins aus, in welcher er ein bei seiner Darstellung entstehendes Nebenprodukt als saures Salz erkannte.

Nach diesen beiden rein chemischen Arbeiten erfolgte sein Übergang in das Gebiet der Anwendung der Chemie in der Technik, dem er sich nun sein ganzes Leben lang widmete.

Die chemische Technologie war damals noch wenig entwickelt; Knapp war einer der ersten, der hierin mit Hilfe der Chemie die Vorgänge wissenschaftlich zu erklären versuchte. Es kam zunächst eine Anzahl kleinerer Arbeiten, welche alle in Liebigs Annalen der Chemie veröffentlicht worden sind, und die ich aufzähle, um die Richtung seiner Bestrebungen zu dieser Zeit, in der er noch tastend vorging, zu kennzeichnen. Es gehört dahin die Untersuchung über die Schnellessigfabrikation in Bezug auf den sich dabei ergebenden Verlust und dessen Quellen, mit Vorschlägen zur Verminderung des Ver-

lustes; dann eine Abhandlung über die medizinische Wirkung des Lebertrans und deren Ursachen, die er in der fast vollständigen Ausnützung (bis zu 96%) dieses „Respirationsmittels", sowie in seinem Jodgehalt suchte; ferner eine Analyse einer Kupfer, Blei, Zinn, etwas Nickel und Eisen enthaltenden alten Bronze in einer im nördlichen Wales gefundenen keltischen Streitaxt; weiterhin seine Bemerkungen über die bei der damaligen Teuerung gemachten Vorschläge zu wohlfeilerem Brote mittelst Kartoffeln, Rüben etc. etc., worin er das Illusorische dieser Vorschläge nach den falschen Vorstellungen der damaligen Zeit, die das Eiweiß als das allein Nährende ansah, darlegte, da die Kartoffeln arm an Eiweiß seien und der Magen das Nährende erst aus einem großen Brotumfange heraussuchen müsse; und endlich eine Analyse eines Süßwasserkalkes aus der Braunkohlenformation in der Nähe von Gießen mit einem sehr hohen Magnesiumgehalte, was für die Theorie der Dolomitbildung von Interesse war.

Unterdessen reifte noch in Gießen sein bedeutendstes Werk heran, sein großes Lehrbuch der chemischen Technologie, an dem er schon seit längerer Zeit gearbeitet hatte; es ist ein klassisches, vortrefflich geschriebenes Werk der chemisch-technischen Literatur und wirkte bahnbrechend durch die neue Auffassung und glückliche Anordnung des Stoffes. Es erschien in den Jahren 1847—1853 in erster Auflage in zwei starken Bänden und wurde in mehrere fremde Sprachen übersetzt. 1858 wurde ein unveränderter Abdruck herausgegeben und dann eine neue Auflage mit vielen Ergänzungen und Verbesserungen begonnen, die aber leider unvollendet blieb. Es brachte nicht wie die früheren Technologien die Lehren der Chemie für den Techniker, sondern eine Darlegung der wichtigsten chemischen Industrien in sechs Gruppen:

1. die auf den Verbrennungsprozeß sich gründenden Zweige der Technik,

2. die auf Gewinnung und Benutzung der Alkalien und Erden sich gründenden Zweige der Technik,

3. die Tonwaren,

4. vom Mörtel, Kalk und Gips,

5. die Nahrungsmittel betreffenden und landwirtschaftlichen Gewerbe,

6. die Bekleidungsgewerbe,

und in der zweiten Auflage noch eine besondere Gruppe über die Technologie des Wassers.

Von dem Abschnitt über die Nahrungsmittel erschien 1848 eine besondere Ausgabe: „Die Nahrungsmittel in ihren chemischen und technischen Beziehungen", worin die damaligen neuen Lehren Liebigs verwertet wurden.

An die technischen Auseinandersetzungen werden im idealen Sinne allgemeine Betrachtungen über die Bedeutung der Industrie für die sittliche und geistige Veredlung des Menschen und über die Bedeutung der Wissenschaft dafür angeknüpft.

Daran schlossen sich (1856—1863) die für den Unterricht wichtigen technologischen Wandtafeln an.

Nun kamen, von der Münchener Zeit beginnend, seine bedeutsamen, eigentlich chemisch-technologischen Arbeiten, die sich in vier Richtungen bewegen.

Hierher gehören als erste seine experimentellen Untersuchungen über die Gerberei und den Vorgang bei der Lederbildung, die wohl seine größte Leistung auf experimentellem Gebiete sind. Die erste Veröffentlichung hierüber ist 1858 in den wertvollen Abhandlungen der naturwissenschaftlich technischen Kommission bei unserer Akademie, welche König Max II. ins Leben gerufen hatte, erschienen. Die Frage hat ihn aber sein ganzes Leben lang beschäftigt und er hat noch im Jahre 1897 eine Abhandlung darüber geschrieben. Über das Wesen des Gerbprozesses war bis dahin wissenschaftlich kaum gearbeitet worden. Man hatte beobachtet, daß die eiweißartigen Stoffe und der aus leimgebenden Substanzen durch siedendes Wasser erhaltene Leim mit Gerbsäure sich chemisch verbinden und Niederschläge bilden; und so glaubte man seit Seguin (1797), die Lederbildung beruhe auf einer chemischen

Verbindung der leimgebenden Substanz der Haut mit dem Gerbstoff. Knapp tat nun dar, daß die tierische Haut kein Leim ist, und daß die chemische Verbindung von Leim und Gerbsäure hart und spröde ist, während das Leder geschmeidig sein soll; ferner geben andere leimgebende Gebilde, wie z. B. Bindegewebe, das Ossein der entkalkten Knochen mit Gerbsäure kein Leder, dagegen gerben Tonerde- und Eisen-Salze, ohne daß sie den Leim fällen. Knapp tat dadurch gegen das allgemeine Erwarten dar, daß die Lederbildung ihrem Wesen nach nicht ein chemischer, sondern ein physikalischer Prozeß ist, indem das Gerbemittel sich zwischen die Fasern der gequollenen Lederhaut legt und so das Zusammenkleben und die Schrumpfung der Fasern beim Trocknen verhindert. Durch immer erneute Beobachtungen und Versuche brachte er weitere Beweise für seine Theorie, die bald Anerkennung fand. Er war bestrebt, die Ergebnisse dieser seiner wissenschaftlichen Untersuchung in der Praxis nutzbar zu machen, indem er durch die wohlfeileren basischen Eisensalze die mehrere Jahre in Anspruch nehmende Lohgerberei zu ersetzen suchte. Er war dadurch unstreitig der geistige Urheber der heutigen Metallgerbung und der Herstellung des Chromleders. Auch auf die Färberei wandte er seine mechanisch-physikalische Theorie an: es sollen sich dabei die Farbstoffe aus Lösungen auf die Fasern des Gewebes unlöslich niederschlagen.

Eine zweite Reihe von Untersuchungen bilden die über den Luft- und Wassermörtel und das Wesen des Erhärtungsprozesses (1871). Das verdienstvolle Mitglied unserer Akademie, der Mineraloge J. N. Fuchs, hatte schon 1830 durch eine Arbeit über Kalk und Mörtel, die ersten Aufschlüsse über die Bedingungen des Festwerdens des Zementes unter Wasser gebracht und M. Pettenkofer (1849) die chemischen Vorgänge bei der Darstellung guten hydraulischen Kalkes genau festgestellt. Knapp machte noch weitere Angaben über die Erhärtung der hydraulischen Produkte; er meint aber, die Hydratbildung bedinge nicht die Erhärtung, der chemische Prozeß wäre nur die Gelegenheit dazu und der damit eintretende mechanische

Prozeß wäre die unmittelbare Ursache der Erhärtung. Auch bestreitet er, daß die Erhärtung der Zemente durch das Vorhandensein eines bestimmten Silikates bedingt sei, es könnten sich dabei verschiedene Silikate bilden; und er zählt die mannigfaltigen Bedingungen für das Festwerden auf.

In einer dritten Serie von Abhandlungen, deren erste im Jahre 1876 erschien, beschäftigte er sich mit der Natur des Ultramarins, dieser aus dem Kaolin gewonnenen beständigen blauen Farbe. Dasselbe ist nach seiner ersten Darstellung durch Leykauf in Nürnberg (1837) auf Grund von Gmelins Beobachtungen vielfach untersucht worden, z. B. durch H. Ritter; Knapp prüfte wiederum, ob es eine charakteristische, kristallinische, chemische Verbindung sei oder ob es, wie er glaubte, eine ähnliche Konstitution habe wie manche gefärbte Gläser. Auf seine zahlreichen Beobachtungen gestützt, stellte er die Bedingungen für die Bildung der Ultramarinmutter und für ihre Umwandlung in Blau auf.

Die vierte Gruppe seiner größeren Untersuchungen endlich befaßt sich mit den Produkten der Glas- und der keramischen Industrie. Er wurde darauf geführt durch einen Bericht, den er bei der Allgemeinen Deutschen Industrie-Ausstellung in München im Jahre 1854 über Stein-, Ird- und Glaswaren zu erstatten hatte. Aus seinem Braunschweiger Laboratorium kamen noch mehrere Arbeiten seiner Schüler über Glas, z. B. über Goldrubinglas, den Kupferrubin; zuletzt faßte Knapp in einer Abhandlung: „Der feurige Fluß und die Silikate“ (1894) alle seine und seiner Schüler Erfahrungen zusammen. Man erhält bekanntlich bei Herstellung dieser Gläser zunächst farblose Produkte, welche erst beim nochmaligen Erwärmen die rote Farbe annehmen oder „anlaufen“; die Färbung kommt nach ihm nicht von einer chemischen Umwandlung, sondern von einem physikalischen Vorgang: die im feurig flüssigen Glase gelösten Metalle befinden sich darin nach seiner Vorstellung in zwei verschiedenen Molekularzuständen, in einem nicht färbenden bei den höchsten Temperaturen und in einem färbenden bei niederen Temperaturen; das „Anlaufen“ ist der

Übergang des einen in den anderen Molekularzustand; bei langsamer Abkühlung scheidet sich aus der glasigen Lösung das Metall als feinverteilter Niederschlag in Kristallen ab wie im Hämatinon und Aventurin; man ist jetzt der Ansicht, daß im farblosen Glas das Metall wirklich gelöst ist, im farbigen aber in feinster Verteilung oder als colloidale Lösung sich befindet. Es ist bekannt, daß es schon 1847 Pettenkofer gelungen ist, künstlich das Hämatinon und Aventurin herzustellen und die wissenschaftliche Erklärung der dabei stattfindenden verwickelten Vorgänge aufzudecken; als er nach der Ermittlung der chemischen Zusammensetzung des antiken roten Glasflusses aus Pompeji, des Hämatinons oder Porporinos, welches schon Plinius sekundus beschrieben hatte, die Bestandteile zusammenschmolz, erhielt er zu seinem Erstaunen kein rotes, sondern ein grünschwarzes Glas; nach vielen Versuchen zeigte es sich, daß das darin enthaltene kieselsaure Kupferoxydul im amorphen Zustand grünschwarz ist, im kristallischen purpurrot; das letztere bildet sich beim langsamen Abkühlen des Flusses mit seinen in prächtigen Büscheln anschießenden, nadelförmigen Kristallen; aus dem Hämatinon erhielt er durch Zumischung von Eisenfeile das venetianische Aventuringlas mit seinen flimmernden Kupferkriställchen.

Außer diesen und noch einigen weiteren, kleineren, wissenschaftlichen Untersuchungen, aus denen hervorgeht, daß er ein scharf beobachtender, vorurteilsfreier Forscher war, stammen von Knapp noch eine Anzahl von Aufsätzen allgemeineren Inhalts, in denen seine Kunst schön und gemeinverständlich zu schreiben hervortrat. Dahin gehören die: über Brot und Brotbereitung, über die Geschichte der Gasbeleuchtung, über Kaffee, Tee und ähnliche Genußmittel, über Theorie und Praxis der Industrie und die Geschichte der Erfindungen, über die Lagerung bei geistigen Flüssigkeiten und Getränken sowie über die Entwicklung des Bouquets beim Altern, über die Geschichte der Papierfabrikation, über den Stil in der chemischen Literatur.

Vielfach war er in technischen Fragen der Berater der

Behörden, für welche er in trefflichen Gutachten den richtigen Rat zu erteilen wußte.

Knapp war ein vorzüglicher Lehrer von äußerst lebendigem Vortrag, der sich in das Fassungsvermögen seiner Schüler hineindenken konnte. Er war eine eigenartige Persönlichkeit von lebhaftem Geist, jedoch zurückhaltend und Unbekannten schwer zugänglich: niemals hat er sich vorgedrängt und persönlicher Ehrgeiz war ihm fremd. Als Höchstes galt ihm die stille, wissenschaftliche Arbeit, bei der er sehr kritisch gegen sich selbst verfuhr, jedoch an seinen einmal gefaßten Ansichten zäh festhielt. Er besaß einen feinen Humor und ein vielseitiges Interesse für die verschiedenen menschlichen Bestrebungen: für Geschichte, Philosophie und die schöne Literatur.

III.

Ernst Abbe.[1])

In Jena ist am 14. Januar 1905 der verdiente Physiker und Leiter der berühmten optischen Werkstätte von Karl Zeiß, der ordentliche Honorarprofessor für theoretische Physik an der Universität, Dr. phil. und Dr. med. Ernst Abbe, in fast vollendetem 65. Lebensjahre gestorben. Er gehörte seit dem Jahre 1889 unserer Akademie an. Durch seine wissenschaftlichen Arbeiten förderte er die theoretische Optik und indem er seine dadurch gewonnenen Erkenntnisse praktisch anwendete, gelang es ihm, die Mikroskope bedeutend zu verbessern, und dieselben in großem, fabrikmäßigem Betriebe herzustellen, wie

[1]) Mit Benützung von:

Seb. Finsterwalder, Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1905, 18. April Nr. 91.

Julius Pierstorff, Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1905, 19. April Nr. 92 und 20. April Nr. 93.

E. Raehlmann, Münchener mediz. Wochenschrift 1905, Nr. 6, S. 269.

Fritz Böckel, die Karl Zeiß-Stiftung in Jena; Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1903, 13. August Nr. 182.

Otto Knopf, Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft 1905, 40. Jahrgang S. 198.

es bis dahin mit wissenschaftlichen Apparaten noch nicht geschehen war.

Abbe wurde am 23. Januar 1840 in Eisenach als der Sohn eines Spinnmeisters geboren; er wuchs in einfachen Verhältnissen auf und lernte in einer entbehrungsvollen Jugend die Not des Lebens kennen, woher es auch kommen mag, daß er für die um ihr Dasein schwer ringenden Arbeiter ein warmes Herz besaß und später in so großartiger Weise für sie zu sorgen suchte.

Schon früh erkannte man sein ungewöhnliches Talent und seinen scharfen Geist; er absolvierte das Eisenacher Realgymnasium mit Auszeichnung und studierte danach von 1857 ab während vier Jahren an den Universitäten Jena und Göttingen Mathematik, Physik und Astronomie; in Jena, wo er im dritten Semester eine Preisaufgabe „vom adiabatischen Zustand der Gase" löste, regte ihn besonders der Mathematiker Karl Snell an, in Göttingen, wo er zum Doktor der Philosophie mit einer Dissertation über das mechanische Wärmeäquivalent promoviert wurde, waren der Physiker Wilhelm Weber und der geistvolle junge Mathematiker Bernhard Riemann seine Lehrer. Nachdem er Assistent an der Sternwarte in Göttingen und Dozent am physikalischen Vereine in Frankfurt a. M. gewesen, habilitierte er sich auf Anraten seines Lehrers Snell und des Universitätskurators Seebach (1863) in Jena für Mathematik, Physik und Astronomie, und wurde daselbst (1870) außerordentlicher Professor der theoretischen Physik.

Abbe war, unterstützt durch seinen Scharfsinn und seine Beobachtungsgabe sowie durch seine Kenntnisse und seine zähe Ausdauer, ganz zum Forscher ausgerüstet; er hat auch mannigfache bedeutsame Probleme der Physik gelöst. Aber diese rein wissenschaftlichen Leistungen geben ihm nicht sein Eigentümliches; denn er betrat bald seinen eigenen Weg, da ihn die intensive Beschäftigung mit einem besonderen Grenzgebiete der Mathematik und Physik und dann die praktische Anwendung auf demselben fesselte.

Obwohl er von da an seine Tätigkeit ganz in den Dienst

der Technik stellte, blieb er doch sein Leben lang Forscher und Gelehrter. So kam es, daß, als er (1874) ordentlicher Professor der Physik werden sollte, er das Anerbieten ablehnte, um ganz seiner Neigung, der Verbindung mit dem Mechaniker Karl Zeiß, zu leben. Später (1878) erhielt er wegen seiner Verdienste um die Wissenschaft die Würde eines ordentlichen Honorarprofessors sowie das Direktorium der Sternwarte und des meteorologischen Observatoriums. Er hielt als solcher Vorlesungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik, ließ sich aber 1889 wegen Überhäufung mit anderen Geschäften von der Verpflichtung Vorlesungen zu halten entbinden.

Es war ein glückliches Geschick, daß Abbe als Privatdozent (1866) mit dem geschickten und strebsamen Universitätsmechaniker Karl Zeiß in Jena bekannt geworden war. In dessen im Jahre 1845 errichteten feinmechanischen Werkstätte wurden, angeregt durch den Botaniker Matthias Jakob Schleiden, der kurz vorher die Zellen als Elementarorganismen der Pflanzen entdeckt hatte, auch Mikroskope hergestellt, die zu den besten der damaligen Zeit gehörten.

Die Herstellung der Mikroskope geschah bis dahin fast nur durch handwerksmäßiges Aussuchen der im Vorrat vorhandenen Linsen, welche den besten Effekt gaben; die Erhaltung guter Instrumente war daher damals dem Zufall unterworfen und gründete sich nicht auf wissenschaftliche Einsicht; so trieb es noch der bekannte Oberhäuser aus Ansbach in Paris, der zu seiner Zeit fast allein den Bedarf an Mikroskopen in Deutschland deckte. Zeiß sah ein, daß auf diese Weise kein Fortschritt zu erzielen sei und daß nur die theoretische Bekanntschaft mit dem Gang der Lichtstrahlen im Mikroskop zur Verbesserung und Vervollkommnung führen könne, wie sie Fraunhofer für das Fernrohr gewonnen hatte. Er bat daher (1866) den Privatdozenten Abbe, ihm dabei zu helfen und so verbanden sich dazu die beiden, der gelehrte Theoretiker und der geschickte Praktiker. Fraunhofer benützte zum Zustandebringen eines scharfen Bildes durch sein achromatisches Fern-

rohr die trigonometrische Durchrechnung und hatte für dieses Instrument bis jetzt Unübertroffenes geleistet. Diese grundlegenden Erkenntnisse waren auf die Bedingungen des Mikroskopes zu übertragen.

Zunächst schuf Abbe durch seine Erfindungsgabe und seine konstruktive Geschicklichkeit neue Meßapparate und Methoden zur feineren Bestimmung der optischen Konstanten fester und flüssiger Körper: insbesondere diente ihm dazu sein Refraktometer.

Er suchte sodann für das Mikroskop, wie schon Fraunhofer und seine Nachfolger für das Fernrohr und für andere optische Instrumente, durch Rechnung diejenigen Linsen zu finden, welche das schärfste Bild geben und stellte danach die Formen und Kombinationen genau her; er wandte ebenfalls zur Verfolgung des Ganges der Lichtstrahlen die trigonometrische Rechnung an. Nach den Gesetzen der geometrischen Optik sollte das Bild um so schärfer werden, je enger die Öffnung des Strahlenkegels ist, während die alte tastende Mikroskopenoptik die Erfahrung gemacht hatte, daß starke Vergrößerungen sich nur mit sehr weitgeöffneten Lichtbüscheln erzielen lassen. Abbe legte in einem ausgezeichneten Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London (1876) dar, daß zur größten Leistungsfähigkeit das Objektiv des Mikroskopes möglichst weitgeöffnete Strahlenbüschel aufzunehmen imstande sein muß.

Aber alle seine Bemühungen auf diesem Wege förderten wohl die Theorie des Mikroskopes, sie waren jedoch nicht imstande, das Instrument wesentlich zu verbessern, denn es zeigte sich (1873) durch seine scharfsinnigen Betrachtungen über die Grenzen der geometrischen Optik, daß die Vervollkommnung des Mikroskopes in dieser Richtung eine bestimmte Grenze habe, ja daß die Leistungen der tastenden Optik von dieser Grenze gar nicht mehr weit entfernt waren. Die Grenze ist nämlich durch die Entfernung zweier Punkte, die wir getrennt wahrnehmen können, gesteckt; wir sehen sie nicht getrennt, wenn sie innerhalb einer Wellenlänge fallen.

Abbe ließ sich jedoch dadurch nicht abschrecken, an der

Vervollkommnung des Mikroskopes weiter zu arbeiten, und es sollte ihm dies auch in ungeahntem Grade gelingen. Sein Nachdenken brachte ihm eine tiefere Einsicht in das Wesen des mikroskopischen Sehens; er erkannte, daß das Licht nicht von den einzelnen Punkten des Objektes ausgeht, also mit dem Mikroskop das Objekt nicht direkt angesehen wird, sondern das Beugungsbild des Objektes, welches durch die Ablenkung oder Beugung des Lichtes an den feinen Einzelheiten des Objektes entsteht. Das Bild ist dem Objekt um so ähnlicher je mehr Beugungsbüschel an dem Zustandekommen des Bildes beteiligt sind, daher die Mikroskope um so mehr leisten je größer der Öffnungswinkel ist. Das Beugungsbild ist also nicht immer identisch mit dem Objekt; wenn die Länge der Lichtwellen verschwindend klein ist gegenüber den Einzelheiten des Objektes, ist das Bild ähnlich; sind aber die Einzelheiten des Objektes feiner und die Lichtwellenlängen dagegen verhältnismäßig größer, dann entsteht hinter dem Objekt ein Gewirre von nach allen Seiten auseinandergehenden Lichtstrahlen und das Bild wird verschwommen, da die Beugungsbüschel um so mehr divergieren, je feiner die Einzelheiten des Objektes sind. Bei schiefer Beleuchtung können stärker divergierende Büschel ins Objektiv treten, weshalb bei schiefer Beleuchtung das Auflösungsvermögen des Mikroskops gesteigert ist. Vermag das Mikroskop diese Lichtstrahlen vollständig zu sammeln, so erscheint die Beugungsfigur richtig oder nur wenig von der wahren Gestalt abweichend; werden durch das Mikroskopenobjektiv nicht alle gebeugten Strahlen aufgenommen, so sieht man nur einen Rest der Beugungsfigur des Objektes, deren Gestalt von der des Objektes beliebig weit abweichen kann, so daß wir den schlimmsten Täuschungen ausgesetzt sind, ohne daß das Bild unscharf ist.

Diese Erkenntnisse führten ihn zu richtigen Vorstellungen über das Entstehen des mikroskopischen Bildes und dann auch zu neuen Gesichtspunkten für die Erhöhung der Leistungsfähigkeit des Mikroskopes; zunächst zu der Verbesserung der Beleuchtungsapparate, vor allem zur Konstruktion seines Kon-

densors (1875), durch welchen die vom Spiegel reflektierten Lichtstrahlen so zum Objekt gelangen, daß die genannten Fehler auf das geringste Maß vermindert werden.

Ein weiterer Fortschritt seiner Mikroskope ist die Verbesserung der homogenen Immersion. Der italienische Optiker und Astronom Amici hatte zuerst (1840) die gute Wirkung der Immersion der Frontlinse des Objektives in einem auf dem Deckglas angebrachten Wassertropfen entdeckt und Harnack (1855) sie zur allgemeinen Verwendung empfohlen; Amici gebrauchte später (1850) für gewisse Fälle Öl, Grundlach (1867) Glyzerin. Abbe fand nun, daß die vorher besprochenen großen Öffnungen eine bestimmte Grenze haben und zwar für den Fall, daß das Objekt durch Luft gesehen wird; befindet sich dagegen zwischen Objekt und Objektiv eine Flüssigkeit, so steigert sich die Wirksamkeit der eintretenden Strahlenbüschel im Verhältnis des Lichtbrechungsvermögens der verwendeten Flüssigkeit. Abbe führte mit Stephenson als homogene Immersion (1878) das Zedernöl ein, welches das gleiche Lichtbrechungsvermögen hat wie das Deckglas und die Frontlinse des Objektives, so daß die Lichtstrahlen vom Objekt bis zum Objektiv homogene Medien durchsetzen. Amici und Harnack haben zwar schon den Grund der Wirksamkeit der Immersionslinsen gekannt, Abbe hat aber das Verdienst, ihn klarer dargestellt zu haben.

Bei seinen Bestrebungen, die Farbenabweichung, namentlich das sekundäre Spektrum, um welches sich schon Fraunhofer und seine Nachfolger bemühten, zu beseitigen, ergaben sich Schwierigkeiten, die in der unproportionalen Lichtzerstreuung der damals bekannten und angewandten Gläser begründet waren. Fraunhofer hatte in Benediktbeuern eine Glashütte für seine Zwecke errichtet; er kam auch in der Herstellung des Glases soweit, als es für seine Fernrohrobjektive nötig war, wobei es sich nur um wenige Sorten möglichst großer schlierenfreier Stücke handelte. Nach seinem Tode wurde leider das bayerische Glaswerk aufgegeben und mußte nach dem Verfahren Fraunhofers in Frankreich und England bereitetes optisches Glas bezogen werden.

Abbe erkannte wie schon die früheren Optiker, daß ein bedeutender Fortschritt zur Vervollkommnung der optischen Instrumente nur durch Verbesserung der optischen Eigenschaften der Glasflüsse erreicht werden könne und daß man über solche mit dem verschiedenartigsten Lichtbrechungs- und Zerstreuungsvermögen verfügen müsse, wenn man jene Fehler bezwingen wollte; aber die Technik war noch nicht so weit, die erwünschten Glassorten zu bieten: Die Chemie mußte vorerst neue reine Materialien liefern sowie die Analyse der Gläser vervollkommnen, und die Feuertechnik, insbesondere die Gasfeuerung, mußte sich weiter entwickelt haben, um die nötigen hohen Temperaturen zu liefern. Die Hoffnung Abbes war lange vergeblich, bis sich 1881 der kenntnisreiche und energische Chemiker Dr. Otto Schott erbot, Versuche über die Abhängigkeit der optischen Eigenschaften des Glases von seiner chemischen Zusammensetzung anzustellen; nach den zur Befriedigung ausgefallenen Vorarbeiten wurden die Versuche in großem Maßstabe mit Unterstützung des K. Preußischen Unterrichts-Ministeriums gemacht, welche glänzende Resultate lieferten. Dies war ein großes Glück für Abbe und Zeiß, denn sie erhielten aus dem glastechnischen Laboratorium von Schott die optisch vollkommensten, unter Verwendung einer viel größeren Anzahl chemischer Bestandteile wie bisher, insbesondere durch Anwendung von Phosphorsäure und der Borsäure neben der Kieselsäure hergestellten Gläser in mannigfaltiger Art und dadurch die früher nicht gebotene Möglichkeit, die Fehler der Farbenabweichung der neuen Mikroskop-Objektive der 10linsigen Apochromate mit den Kompensationsokularen (1886) fast ganz aufzuheben. Mit dem neuen Glasmaterial, dem sich Linsenkombinationen aus dem seltenen Flußspat von sehr geringer Lichtzerstreuung anreihten, lieferte Abbe ein Mikroskop mit einem in allen Teilen des Gesichtsfeldes scharfen Bild, ohne Farbenfehler und optisch von einer bis dahin unerreichten Richtigkeit der Abbildung. Die neuen Gläser haben auch in anderen Zweigen der Optik, bei Herstellung von photographischen Linsen und Fernrohrobjektiven, fruchtbar

gewirkt. Es wurden Gläser hergestellt, die nur Strahlen von gewisser Wellenlänge durchlassen, ferner Thermometerglas ohne Depression des Nullpunktes und Geräteglas mit geringeren Ausdehnungskoeffizienten, welches plötzliche Erwärmung und Abkühlung erträgt.

Zu erwähnen ist noch die weit bekannte und viel angewendete Abbe-Zeißsche Zählkammer, ein sinnreiches Instrument mit dem in kurzer Zeit die Zahl der Blutkörperchen in einem gewissen Volumen Blut erhalten werden kann.

Durch alle diese Neuerungen war es gelungen, das Mikroskop in seinen Leistungen in hohem Grade zu verbessern und Dinge damit sichtbar zu machen, die man früher nicht zu erkennen vermochte. Der Nutzen für die Wissenschaft blieb auch nicht aus. Die heutige Entwicklung der Lehre von den feinsten normalen und pathologischen Formen der tierischen und pflanzlichen Organismen wäre ohne Abbes Mitarbeit nicht möglich gewesen. Vor allem ist dadurch die Erforschung der niedersten kleinsten Lebewesen, der Bakterien, welche dem Menschengeschlechte verheerende Erkrankungen bringen, gefördert worden und es wird auf Grund solcher Beobachtungen sich auch die Hilfe gegen diese schlimmen Feinde anbahnen. Robert Koch, der durch die Entdeckung des Tuberkelbazillus den Grund zur jetzigen Bakteriologie legte, erkannte es an, daß er ohne die Abbeschen Immersionsmikroskope diese zarten Gebilde nicht gesehen hätte.

Größer wie als Forscher und die Wissenschaft anwendender Gelehrter ist Abbe als gewaltiger Organisator und Sozialpolitiker. Mit einem einzigartigem Geschick und einer unerreichten Tatkraft, ohne Rücksicht nur sein Ziel verfolgend, wußte er seine Werkstätte auszudehnen und zu der größten Fabrik der Art auf der Erde, zu einer Großindustrie, zu erheben. Man könnte allerdings in Zweifel sein, ob ein solcher gesteigerter Betrieb für den Fortschritt in wissenschaftlichen Dingen das günstigste sei, oder doch so wie die Ansammlung von Kapitalien in einer Hand oder die großen Geschäftshäuser im sozialen Leben gewisse Nachteile mit sich bringt. Als

Abbe (1875) als stiller Teilhaber in das Geschäft von Karl Zeiß eintrat, waren 25 Arbeiter in demselben beschäftigt; nach dem Tode von Karl Zeiß und dem Ausscheiden von dessen Sohn (1888) war Abbe der alleinige Inhaber und Leiter der Fabrik bis 1891, wo sie über 2000 Arbeiter und 160 Angestellte zählte. Für diese sorgte er in wahrhaft väterlicher Weise und man kann sagen, daß er mit seinen Einrichtungen einen Teil der sozialen Probleme löste. Abbe hatte schon früher (1889) die Karl Zeiß-Stiftung gegründet, in welche nun die ganze Werkstätte aufgenommen wurde; dieser Stiftung überließ er (1891) den größten Teil seines Vermögens und trat ihr sein Eigentumsrecht vollständig ab, indem er nur einfaches Verwaltungsmitglied derselben blieb. Diese Karl Zeiß-Stiftung mit ihrer tiefdurchdachten, von ihm geschaffenen Verfassung und sozialen Organisation war wohl das bedeutsamste Werk und die größte Tat seines Lebens. Es war darin für die materielle Lage der Arbeiter in freigebigster Weise gesorgt; sie beziehen zumeist Stücklohn und können nach einigen Jahren sich jährlich auf 1800 Mark stehen, erprobte Arbeiter bis zu 3000 Mark; die Arbeiter und Beamten sind, mit Ausnahme der Verwaltungsmitglieder, am Gewinn beteiligt nach Abzug der statutenmäßig stattfindenden Zuwendungen an die Universität. Bei achtstündiger Arbeitszeit ist Urlaub mit Lohnfortzahlung und Pensionsberechtigung vorgesehen. Die Stiftung verfügt für die Fabrik über eine Pensionskasse, eine Spar- und Krankenkasse, eine Fortbildungsschule, über Freitische für jugendliche Arbeiter und anderes.

Durch besondere eigenartige Anordnungen suchte er seine Ideen und sein Werk für alle Zukunft sicher zu stellen, indem er das Unternehmen aus einem persönlichen in ein unpersönliches verwandelte. Es ist zu wünschen, daß sich die immerhin sehr komplizierten Einrichtungen auch unter den Bedingungen veränderter Zeitverhältnisse erhalten lassen.

Ganz besonders segensreich wirkt das von der Stiftung mit einen Kostenaufwand von einer Million Mark errichtete Volkshaus, nach seinem Tode Ernst Abbe-Haus genannt, welches

allen Schichten der Bevölkerung zugänglich ist und eine reich ausgestattete, öffentliche Lesehalle, eine wertvolle Bibliothek, eine Gewerbeschule, Säle für Unterhaltungen und Versammlungen, einen großen Saal für Konzerte und Vorträge, und eine Kunstausstellung enthält.

Großartig sind ferner seine einmaligen Zuwendungen, namentlich für die Universität Jena zur Förderung der Naturwissenschaften, zum Neubau des Universitätsgebäudes und von Instituten der Universität; sie betragen über zwei Millionen Mark. Außerdem werden aus der Karl Zeiß-Stiftung jährlich beträchtliche Summen für die Erhaltung und den Betrieb der Institute, zur Besoldung von außerordentlichen Professoren etc. unter der Bedingung einer absoluten Lehrfreiheit gewährt. Dadurch ist die Karl Zeiß-Stiftung neben den thüringischen Staaten die Erhalterin der Universität Jena; sie ermöglichte Jena zur Konkurrenz mit den anderen größeren Universitäten.

So suchte Abbe Bildung und Kenntnisse zu verbreiten als das Hilfsmittel für den Fortschritt der Menschheit und ihr Wohlergehen. Er ging dabei von der Ansicht aus, daß der einzelne Mensch die Früchte der Leistungen, welche er, von der Kultur der Gesamtheit getragen, erwirbt, nicht für sich allein beanspruchen darf, sondern die Gesamtheit daran Anteil nehmen lassen muß.

In seltener Uneigennützigkeit und Aufopferungsfähigkeit hatte er sich seines großen Reichtums entäußert, um seine Ideen zu verwirklichen.

Er selbst blieb trotz des um ihn verbreiteten Reichtums und trotz hoher Ehren der schlichte Gelehrte von größter Einfachheit in seiner Lebensweise; er hatte kein anderes Bestreben, als durch unablässige Tätigkeit in ungestümem Schaffensdrang zu nützen. Durch geistige Überanstrengung hatte er sich ein schweres Nervenleiden zugezogen, das seine letzten Lebensjahre trübte und den an geistige Arbeit Gewohnten zwang, derselben zu entsagen.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 4. November 1905.

1. Herr SIEGMUND GÜNTHER legt eine gemeinschaftlich mit dem K. Reallehrer SIMON DANNBECK in Weißenburg i. F. verfaßte Abhandlung: „Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes" vor.

Während die Frage, wann und von wem zuerst der Satz aufgestellt ward, der gewöhnlich den Namen Buy's Ballots trägt, schon wiederholt für die neuere Zeit erörtert wurde, blieb die frühere Zeit so lange unberücksichtigt, bis 1885 v. Bezold auf das Verdienst des Breslauer Physikers Brandes aufmerksam machte. Es ergibt sich jedoch, daß schon 1765 J. H. Lambert in den Denkschriften der damaligen kurbayerischen Akademie mit aller Bestimmtheit behauptete: Die Luft bewegt sich aus einem Gebiete stärksten Druckes gegen ein Gebiet niedrigsten Barometerstandes. Beginnend mit Hadley, dem Begründer der heute noch giltigen Lehre von den Passatwinden, wurde die einschlägige Literatur nach Anklängen an die seit 1860 zur Herrschaft gelangte Anschauung durchforscht, indem wiederholt das betreffende atmosphärische Grundgesetz sich als geradezu „in der Luft liegend" herausstellte.

2. Herr ALFRED PRINGSHEIM hält einen Vortrag: „Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern".

Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 15. November.)

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

wo die a_ν, b_ν beliebige komplexe Zahlen (natürlich mit Einschluß der reellen) bedeuten, u. a. die folgenden hinreichenden Bedingungen angegeben:[2])

$$\text{(a)}\qquad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{für } \nu > 1:$$

und ich habe darauf hingewiesen, daß eine andere von Herrn Helge von Koch[3]) mit Hilfe von unendlichen Kettenbruch-Determinanten abgeleitete Konvergenz-Bedingung, nämlich die absolute Konvergenz der Reihe $\sum \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$ mit dem Zusatze:

$$\text{(b)}\qquad \sum_2^\infty{}_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| < \frac{1}{2},$$

---

[1]) Dieser Berichte Bd. 28 (1898), p. 295 ff.

[2]) A. a. O. p. 323.

[3]) Comptes rendus, T. 120 (1895), p. 145.

als ein sehr spezieller Fall der Bedingung (a) erscheint.[1]) Nun bin ich neuerdings darauf aufmerksam gemacht worden, daß Herr Helge von Koch die Bedingung (b) späterhin zu der folgenden erweitert hat:[2])

$$\text{(c)} \qquad \sum_{2}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| < 1,$$

die dann allerdings nicht mehr ohne weiteres als eine unmittelbare Folge aus den Bedingungen (a) angesehen werden kann. Denn die Bedingung (c) würde immerhin noch gestatten, daß entweder:

$$\left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| = a, \text{ wo } \frac{1}{2} \leq a < 1,$$

oder für ein einzelnes bestimmtes n:

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{b_{2n} b_{2n+1}} \right| + \left| \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+1} b_{2n+2}} \right| = a', \text{ wo } \frac{1}{2} < a' < 1,$$

sofern nur die Summe aller übrigen Terme $\left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right|$ dann unterhalb $1 - a$ bezw. $1 - a'$ bleibt. Mit anderen Worten, sie gestattet einer oder allenfalls zweien der Zahlen $\left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right|$ eine etwas größere Freiheit, wogegen dann die Gesamtheit aller übrigen in ganz unverhältnismäßig stärkerer Weise eingeschränkt wird, als durch die Ungleichungen (a). Obschon hiernach das Kriterium (c) sichtlich einen sehr viel spezielleren Charakter trägt, als das Kriterium (a) und der soeben näher charakterisierte Einzelfall, in welchem das Kriterium (c) über

[1]) A. a. O. p. 323, woselbst infolge eines Druckfehlers sich die Angabe $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}$ statt $\sum_{2}^{\infty}{}^{\nu}$ findet. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit gleich noch einen weiteren, mehrfach wiederkehrenden und sinnentstellenden Schreib- oder Druckfehler berichtigen. Auf p. 312, Formel (34) und Fußnote 1, Zeile 4, ferner auf p. 317, Formel (54) und (55) muß es statt $|a_\nu - b_\nu|$ durchweg $|b_\nu - a_\nu|$ heißen.

[2]) Bullet. Soc. math. de France, T. 23 (1895), p. 37.

das Kriterium (a) hinausgreift, für die Praxis wohl kaum wesentlich in Betracht kommen dürfte, so schien es mir immerhin wünschenswert zu zeigen, daß das von Herrn Helge von Koch mit Hilfe funktionentheoretischer Betrachtungen hergeleitete Kriterium (c) mit ganz denselben rein-elementaren Hilfsmitteln gewonnen werden kann, welche mir zur Herleitung des Kriteriums (a) gedient hatten. Dabei wird sich sogar an Stelle der Bedingung (c) die noch um ein weniges weitere ergeben (s. unten § 2 am Schlusse):

(d) $$\sum_{2}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| < 1.$$ [1]

Ferner hat Herr C. B. van Vleck[2]) für eine spezielle Form von Kettenbrüchen ein Konvergenz-Kriterium angegeben und daran die Bemerkung geknüpft, daß das für $b_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ aus (a) hervorgehende Kriterium, also die Bedingung:

(e) $$|a_2| < \frac{1}{2}, \quad |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leq \frac{1}{2} \text{ für } \nu \geq 1,$$

welche (abgesehen von dem besonderen Falle durchweg reeller positiver a_ν) bisher wohl als das allgemeinste Kriterium für die Konvergenz von Kettenbrüchen der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ anzusehen gewesen sei, lediglich einen speziellen Fall des von ihm gefundenen Konvergenz-Kriteriums darstelle. Das ist allerdings richtig, rührt aber doch einzig und allein davon her, daß das Kriterium des Herrn van Vleck — wie diesem entgangen zu sein scheint — ganz unmittelbar aus demselben, in der zitierten Mitteilung von mir abgeleiteten Haupt-Kriterium[3])

[1]) Die Erweiterung $\sum_{2}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| = 1$ dürfte zwar schwerlich irgendwelches praktische, doch immerhin einiges theoretische Interesse beanspruchen, da gerade für diesen Fall die von Kochsche Beweismethode völlig versagt.

[2]) Transact. Americ. math. Soc. Vol. 2 (1901), p. 481.

[3]) A. a. O. p. 316.

folgt, welches eben auch die Grundlage des Kriteriums (e) bildet. Bei der Herleitung des van Vleckschen Kriteriums aus dem genannten Haupt-Kriterium gewinnt man überdies für dasselbe eine merklich präzisere Fassung als die von Herrn van Vleck angegebene, welche nach meinem Dafürhalten leicht mißverstanden werden kann, zum mindesten aber bezüglich der Tragweite einer darin enthaltenen Aussage der genügenden Klarheit ermangelt (s. unten § 3).

Außer der Erledigung der soeben näher bezeichneten Punkte enthält die vorliegende Note verschiedene Ergänzungen und Verallgemeinerungen der in jener früheren Mitteilung von mir abgeleiteten Konvergenzsätze. Insbesondere wird das oben erwähnte Haupt-Kriterium noch in gewisser Weise vervollkommnet und eine zwar sehr naheliegende, indessen, wie mir scheint, bisher wohl nicht bemerkte und an sich nicht uninteressante Umformung desselben angegeben (§ 1). Sodann aber wird daraus ein anderes Kriterium abgeleitet (§ 2), welches in Bezug auf Allgemeinheit der Form (ich sage nicht der Tragweite) eine merkliche Analogie mit dem Kummerschen Reihen-Kriterium darbietet und welches im übrigen außer dem Kriterium (a) (und einer beliebig zu vermehrenden Anzahl ähnlicher) auch das Kriterium des Herrn Helge von Koch (in der erweiterten Form (d)) und dasjenige des Herrn van Vleck als spezielle Fälle enthält.

§ 1.

1. Der Inhalt des früher von mir abgeleiteten Haupt-Kriteriums (a. a. O. p. 316, 317) kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Bedeuten a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen, so bildet die Bezeichnung

$$(1) \qquad |b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz des

Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$. *Sein absoluter Wert liegt stets zwischen* 0 *und* 1, *außer wenn die folgenden* **drei** *Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:*

a) Es ist für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *durchweg* $|b_\nu| - |a_\nu| = 1$.

b) Es ist für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *durchweg* $\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu \cdot b_{\nu+1}} < 0$ *(also reell und negativ).*

c) Die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ *divergiert.*

In diesem Falle hat man:

$$(2) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{b_1} \cdot \left|\frac{b_1}{a_1}\right|, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Der auf den Wert des fraglichen Kettenbruches bezügliche zweite Teil des vorstehenden Satzes gestattet zunächst, die Bedingung (1), soweit sie sich auf den Index $\nu = 1$ bezieht, merklich zu erweitern. Ist nämlich die Bedingung (1) nur für $\nu \geq 2$ erfüllt, so konvergiert jedenfalls der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ unbedingt und zwar, sofern nicht der oben genau bezeichnete und sogleich auch noch näher zu erörternde Ausnahmefall eintritt, gegen einen Wert, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Unterwirft man daher b_1 nur der Bedingung:

$$(3) \qquad |b_1| > 1,$$

so ist im allgemeinen Falle $b_1 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ von Null verschieden, also schließlich auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ unbedingt konvergent. Tritt aber jener Ausnahmefall ein, d. h. bestehen die oben mit a) und b) bezeichneten Bedingungen für $\nu \geq 2$ gleichzeitig mit der Divergenz der Reihe $\sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu|$

(oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft gleichzeitig mit der Divergenz der unter c) angegebenen Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$), so ergibt sich mit Berücksichtigung von Gl. (2):

$$(4) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \frac{a_2}{b_2} \cdot \left|\frac{b_2}{a_2}\right|$$

Daraus folgt aber, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auch in diesem Falle noch unbedingt konvergiert, sofern nur

$$b_1 + \frac{a_2}{b_2} \cdot \left|\frac{b_2}{a_2}\right|$$

von Null verschieden ist. Man gewinnt somit die folgende Verbesserung des zuerst ausgesprochenen Konvergenz-Kriteriums:

Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist hinreichend, daß:*

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} (1) & |b_1| > 1 \\ (2) & |b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1 \text{ für } \nu \geqq 2. \end{cases}$$

Nur, wenn durchweg:

$$(\mathrm{A}', 2) \qquad |b_\nu| - |a_\nu| = 1 \text{ für } \nu \geqq 2,$$

außerdem:

$$(\mathrm{A}', 3) \qquad \frac{a_{\nu+1}}{b_\nu \cdot b_{\nu+1}} < 0 \text{ für } \nu \geqq 2,$$

$$(\mathrm{A}', 4) \qquad \sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu| \textit{ divergent},$$

so hat man die Bedingung (A, 1) *durch die folgende zu ersetzen:*

$$(\mathrm{A}', 1) \qquad b_1 \neq -\frac{a_2}{b_2} \cdot \left|\frac{b_2}{a_2}\right|.$$ [1]

[1] Für $b_1 = -\frac{a_2}{b_2} \cdot \left|\frac{b_2}{a_2}\right|$ wird der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ infolge der Beziehung (4) ***eigentlich divergent.***

Zusatz. Man bemerke, daß in dem besonders häufigen Falle lauter reeller positiver b_ν die auf den Ausnahmefall bezüglichen Bedingungen (A', 3), (A', 1) sich auf die folgenden beiden reduzieren:

$$(5) \qquad a_{\nu+1} < 0 \text{ für } \nu \geq 2, \quad b_1 \neq -\frac{a_2}{|a_2|},$$

und daß die zweite dieser Bedingungen einfach lautet

$$(5^{\text{bis}}) \qquad b_1 \neq 1,$$

wenn auch noch $a_2 < 0$ ist.

2. Transformiert man den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ mit Hilfe der beliebig, nur von Null verschieden zu wählenden Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ in einen äquivalenten, so wird:

$$(6) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1}{c_0}\left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu\, b_\nu}\right]_1^\infty,$$

also, wenn man für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_\nu = \frac{1}{a_{\nu+1}}$$

setzt:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = a_1 \cdot \left[\frac{1 : a_{\nu+1}}{b_\nu : a_{\nu+1}}\right]_1^\infty.$$

Wird jetzt auf den so transformierten Kettenbruch der zuletzt bewiesene Satz angewendet, so nehmen die Konvergenz-Bedingungen (A) die Form an:

$$\left|\frac{b_1}{a_2}\right| > 1, \text{ also: } |b_1| > |a_2|$$

$$\left|\frac{b_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - \left|\frac{1}{a_{\nu+1}}\right| > 1, \text{ also: } |b_\nu| - |a_{\nu+1}| > 1 \quad (\nu > 2).$$

während die Ersatzbedingung (A', 1) nunmehr lautet:

$$\frac{b_1}{a_2} \neq -\frac{|b_2|}{b_2}, \text{ also: } b_1 \neq -\frac{|b_2|}{b_2} \cdot a_2$$

und der sie erfordernde **Ausnahmefall** eintritt, wenn:

$$|b_\nu| - |a_{\nu+1}| = 1, \quad \frac{a_{\nu+1}}{b_\nu \cdot b_{\nu+1}} < 0 \quad (\nu \geq 2)^{1})$$

und $\sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu|^{-1}$ divergiert. Es besteht somit neben dem zuvor ausgesprochenen Konvergenz-Satze auch der folgende:

Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist hinreichend, daß:*

$$\text{(B)}\begin{cases} (1) & |b_1| > a_2 \\ (2) & |b_\nu| - |a_{\nu+1}| \geq 1 \text{ für } \nu \geq 2. \end{cases}$$

Nur, wenn durchweg:

$$\text{(B}', 2) \qquad |b_\nu| - |a_{\nu+1}| = 1 \text{ für } \nu \geq 2,$$

außerdem:

$$\text{(B}', 3) \qquad \frac{a_{\nu+1}}{b_\nu \cdot b_{\nu+1}} < 0 \text{ für } \nu \geq 2,$$

$$\text{(B}', 4) \qquad \sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu|^{-1} \textit{ divergent},$$

so hat man die Bedingung (B, 1) *durch die folgende zu ersetzen:*

$$\text{(B}', 1) \qquad b_1 \neq -\frac{|b_2|}{b_2} \cdot a_2.$$

---

[1]) Man bemerke, daß bei jeder Transformation eines Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ in einen äquivalenten $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ stets:

$$\frac{a'_{\nu+1}}{b'_\nu b'_{\nu+1}} = \frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}}$$

wegen:

$$a'_{\nu+1} = c_\nu c_{\nu+1} \cdot a_{\nu+1}$$
$$b'_\nu = c_\nu \cdot b_\nu$$
$$b'_{\nu+1} = c_{\nu+1} \cdot b_{\nu+1}.$$

§ 2.

1. Schreibt man die Transformations-Formel (6) folgendermaßen:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{c_1\, a_1}{c_1\, b_1},\ \frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{c_\nu\, b_\nu}\right]_2^\infty \tag{7}$$

und setzt sodann für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$c_\nu = \frac{p_\nu}{b_\nu},$$

so wird:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{p_1\, a_1 : b_1}{p_1},\ \frac{p_{\nu-1}\, p_\nu\, a_\nu : b_{\nu-1}\, b_\nu}{p_\nu}\right]_2^\infty. \tag{8}$$

Versteht man jetzt unter $p_1, p_2, p_3, \ldots$ irgend eine Folge positiver Zahlen, so lehren die Bedingungen (A) des vorigen Paragraphen, daß der fragliche Kettenbruch unbedingt konvergiert, wenn

$$p_1 > 1 \tag{9}$$

und für $\nu > 2$:

$$p_\nu - p_{\nu-1}\, p_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| > 1, \text{ d. h. } \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| < \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu}. \tag{10}$$

Der „Ausnahmefall", welcher hier eintritt, wenn durchweg

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| = \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} \text{ für } \nu > 2, \tag{11}$$

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} < 0 \text{ für } \nu \geq 3, \tag{12}$$

und die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$p_1\, p_2 \left|\frac{a_2}{b_1\, b_2}\right| \cdot p_2\, p_3 \left|\frac{a_3}{b_2\, b_3}\right| \cdots p_{\nu-1}\, p_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right|,$$

also die Reihe

$$\sum_2^\infty{}^\nu\, (p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_\nu - 1) \tag{13}$$

divergiert, würde zur Konvergenz des fraglichen Kettenbruches an Selle der Bedingung (9) zunächst die folgende erfordern (s. die zweite der Ungleichungen (5)):

$$p_1 \neq -\frac{a_2}{b_1 b_2} \cdot \left|\frac{b_1 b_2}{a_2}\right|.$$

Da aber die rechte Seite dieser Ungleichung eine Zahl mit dem absoluten Betrage 1 ist und andrerseits p_1 von vornherein eine positive Zahl bedeutet, so kommt die vorstehende Bedingung überhaupt nur dann in Betracht, wenn sie die Form hat:

$$p_1 \neq 1 \tag{14}$$

und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn:

$$\frac{a_2}{b_1 b_2} < 0, \tag{15}$$

mit anderen Worten, wenn die Bedingung (12) auch schon für $\nu = 2$ erfüllt ist. In der Tat konvergiert alsdann, wie aus dem zu Anfang von § 1 zitierten Hauptsatze hervorgeht (s. Gl. (2)), der Kettenbruch

$$\left[\frac{p_{\nu-1}\, p_\nu\, a_\nu : b_{\nu-1}\, b_\nu}{p_\nu}\right]_2^\infty$$

gegen den Wert — 1 (und zwar, auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen mit lauter negativen Teilzählern und positiven Teilnennern,[1]) numerisch wachsend), so daß also im Falle $p_1 = 1$ der vorgelegte Kettenbruch eigentlich divergiert (noch genauer gesagt nach $+\infty$, wenn $\frac{a_1}{b_1} > 0$ ist).

Durch Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse gewinnt man somit den folgenden Satz:

[1]) Stern, Journ. f. Math. 10 (1833), p. 367. Vgl. z. B. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie (1905), p. 496, 523. — Enzyklopädie der Math. Wissensch. I, p. 125.

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist unbedingt* ***konvergent***, *wenn irgend eine Folge positiver Zahlen* p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *und zwar* $p_1 \geqq 1$) ***existiert, derart daß:***

$$\text{(C)} \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} \quad \text{für } \nu > 2.$$[1]

In dem einzigen Falle, daß folgende ***vier*** *Bedingungen gleichzeitig bestehen:*

$$(\mathrm{C}')\begin{cases}(1) & p_1 = 1, \\ (2) & \left|\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| = \dfrac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} \\ (3) & \dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} < 0 \end{cases} \text{für } \nu > 2, \\ \quad (4) \quad \sum_2^\infty{}_\nu\, (p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdots(p_\nu - 1) = +\infty,$$

divergiert *der Kettenbruch und zwar eigentlich.*

2. Durch passende Spezialisierung der Zahlen p_ν lassen sich aus dem obigen allgemeinen Kriterium mannigfache Spezial-Kriterien herleiten.

I. Setzt man:

$$p_1 = 1, \quad p_{2\nu} = 2 \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so nimmt die für $\nu = 2$ aus (C) hervorgehende Anfangs-Bedingung die Form an:

---

[1]) Die Form der Bedingung (C) lehrt, daß die im übrigen völlig **willkürlichen** positiven Zahlen p_ν für $\nu > 2$ eo ipso der Bedingung $p_\nu > 1$ genügen müssen. Übrigens kann man diese einzige Beschränkung auch formal beseitigen, wenn man $1 + p'_\nu$ statt p_ν schreibt, also:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| < \frac{p'_\nu}{(1 + p'_{\nu-1})(1 + p'_\nu)}.$$

Die in der Einleitung hervorgetretene formale Ähnlichkeit mit dem **Kummerschen** Reihen-Kriterium liegt in der Willkürlichkeit der p_ν bezw. p'_ν.

$$(\mathrm{I^a}) \qquad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| \leqq \frac{1}{2},$$

während im übrigen durch Trennung der für ungerade und für gerade Indices geltenden Bedingungen resultiert:

$$(16) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{a_{2\nu-1}}{b_{2\nu-2}\, b_{2\nu-1}}\right| \leqq \dfrac{p_{2\nu-1}-1}{2\, p_{2\nu-1}} \\[2ex] \left|\dfrac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}}\right| \leqq \dfrac{1}{2\, p_{2\nu-1}} \end{array}\right\} (\nu \geqq 2).$$

Die noch völlig willkürlich (nur größer als 1) anzunehmenden Zahlen $p_{2\nu-1}$ lassen sich durch Addition dieser beiden Ungleichungen ohne weiteres eliminieren. Auf diese Weise ergibt sich:

$$(\mathrm{I^b}) \qquad \left|\frac{a_{2\nu-1}}{b_{2\nu-2}\, b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}}\right| \leqq \frac{1}{2} \quad (\nu \geqq 2),$$

also in Verbindung mit der Anfangs-Bedingung ($\mathrm{I^a}$) wiederum das in der Einleitung mit (a) bezeichnete Kriterium (mit dem einzigen Unterschiede, daß in der Anfangs-Bedingung nunmehr auch noch das Gleichheitszeichen zugelassen wird).

Um das allgemeine Glied der für den „Ausnahmefall" in Betracht kommenden Reihe (C', 4) zu bestimmen, findet man, wenn in den beiden Relationen (16) das Gleichheitszeichen gilt, durch Division der betreffenden Gleichungen:

$$p_{2\nu-1} - 1 = \left|\frac{a_{2\nu-1}\, b_{2\nu}}{a_{2\nu}\, b_{2\nu-2}}\right| \quad (\nu \geqq 2),$$

so daß also die fragliche Reihe (nach Weglassung des einflußlosen Faktors $\left|\frac{1}{b_1}\right|$) die Form annimmt:

$$(17) \qquad \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \left|\frac{a_3 \cdot a_5 \ldots a_{2\nu-1}}{a_4 \cdot a_6 \ldots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}\right|.$$

Es verdient vielleicht bemerkt zu werden, daß die Divergenz dieser Reihe, welche ja, falls die übrigen Spezial-

Bedingungen erfüllt sind, die **Divergenz** des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ nach sich zieht, auf Grund eines bekannten Satzes[1]) gerade eine **notwendige** Bedingung für die **Konvergenz** des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ bildet. In der Tat kommt ja die (eigentliche) **Divergenz** des Gesamt-Kettenbruches nur dadurch zustande, daß der mit $\frac{a_2}{b_2}$ beginnende Kettenbruch gegen den Wert $-b_1$ **konvergiert**, so daß also die Reihe (17) in dem vorliegenden Falle wirklich stets **divergent** ist.

II. Setzt man wiederum

$p_1 = 1$, im übrigen aber $p_\nu = 1 + p$, d. h. **konstant** für $\nu = 2, 3, \ldots$, so nehmen die Bedingungen (C) die Form an:

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| \leqq \frac{p}{1+p}$$

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| < \frac{p}{(1+p)^2} \quad \text{für } \nu > 3.$$

Da der letzte Ausdruck für $p = 1$ ein **Maximum** wird, so erweist sich offenbar die Wahl $p = 1$ als die **vorteilhafteste**. Es ergeben sich alsdann die Konvergenz-Bedingungen:

$$\text{(II)} \qquad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| < \frac{1}{4} \quad \text{für } \nu > 3,$$

welche im übrigen lediglich einen speziellen Fall der Bedingungen (I^a), (I^b) darstellen und somit nichts Neues bieten.

Da die Reihe (C′, 4) wegen $p_\nu - 1 = 1$ (für $\nu > 2$), divergent ist, so muß im Falle $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0$ (für $\nu > 2$) in mindestens **einer** der unter (II) angegebenen Bedingungen das Un-

---

[1]) **Stolz**, Vorlesungen über Allg. Arithmetik, Bd. 2 (1886), p. 279. — **Stolz-Gmeiner**, a. a. O. p. 511. — Enzyklopädie der Math. Wissenschaft I, p. 128.

gleichheitszeichen gelten, wenn der Kettenbruch noch konvergieren soll.

III. Eine etwas höhere obere Schranke für die $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right|$ ($\nu \geq 3$), als die soeben gefundene (d. h. $\frac{1}{4}$), ergibt sich, wenn man setzt:

$$p_\nu = \frac{2\nu+1}{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Konvergenz-Bedingungen (C) lauten alsdann:

$$\text{(III)} \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leq \frac{\nu^2}{4\nu^2-1} \quad (\nu \geq 2).$$

Da $p_1 = \frac{3}{2}$, also > 1, so ist Divergenz hier ausgeschlossen, selbst wenn alle übrigen Bedingungen des „Ausnahmefalles“ erfüllt sein sollten. Daraus ergibt sich insbesondere, daß der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu \nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty$, wo die ε_ν reelle oder komplexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1 bedeuten, **stets** (also selbst in dem ungünstigsten Falle: $a_\nu = -1$ für jedes $\nu \geq 2$) **konvergiert** (was aus den bisher bekannten Kriterien nicht ohne weiteres hervorgehen würde).

IV. Der in (C) auftretende Ausdruck $\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}p_\nu}$ liefert für die $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right|$ ($\nu \geq 2$), wie auch die p_ν gewählt werden mögen, eine obere Schranke, die **kleiner als 1** ausfällt: in den bisher betrachteten Fällen betrug sie sogar nur $\frac{1}{4}$ (s. II) oder wenig darüber (s. III), bezw., was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, $\frac{1}{2}$ für die Summe je zweier konsekutiver $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right|$ (s. I). Andererseits ist aber klar, daß $\frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}p_\nu}$ beliebig der Ein-

it genähert werden kann, wenn man nur p_ν hinlänglich oß, dagegen $p_{\nu-1}$ nur wenig größer als 1 annimmt. Auf und dieser Überlegung ergibt sich ein von den bisherigen iterien wesentlich verschiedener Kriterien-Typus, bei welchem ner Kategorie von Termen $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right|$ (z. B. denjenigen mit radem Index ν) eine obere Schranke zugewiesen wird, die t unbegrenzt wachsendem Index gegen die Einheit konvert, wogegen dann die obere Schranke der anderen Kategorie ließlich der Null zustrebt. Man setze z. B.

$$p_{2\nu-1} = 1 + \frac{1}{q_\nu},\ p_{2\nu} = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

q_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge oberhalb der Einheit liegenr, mit ν irgendwie ins Unendliche wachsender Zahlen beutet. Alsdann ergeben sich aus (C) durch Trennung der r gerade und ungerade Indices ν geltenden Ungleichungen folgenden Konvergenz-Bedingungen:

$$\text{'})\quad \left|\frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1}b_{2\nu}}\right| < \frac{q_\nu - 1}{q_\nu + 1},\quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu}b_{2\nu+1}}\right| < \frac{1}{q_\nu(q_{\nu+1}+1)} \quad (\nu > 1).$$

Wegen $p_1 = 1 + \frac{1}{q_1} > 1$ ist auch hier das Eintreten des usnahmefalles" von vornherein ausgeschlossen.

V. Es möge jetzt unter p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge it ν monoton ins Unendliche wachsender Zahlen verstanden d speziell $p_1 = 1$ gesetzt werden. Unterwirft man hierauf die $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}$ der Bedingung:

$$)\qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| \leq \frac{p_\nu - p_{\nu-1}}{p_{\nu-1}p_\nu} \quad (\nu > 2),$$

genügen sie a fortiori der Konvergenz-Bedingung (C) und ar hat man sogar, da $p_{\nu-1} > 1$ für $\nu \geq 3$:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\right| < \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}p_\nu} \quad (\nu > 3)$$

(mit Ausschluß der Gleichheit). Somit zieht die Existenz der Bedingung (V) ohne jede Einschränkung die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ nach sich. Nun ist aber $\frac{p_\nu - p_{\nu-1}}{p_{\nu-1}\, p_\nu}$ das allgemeine Glied einer aus positiven Termen bestehenden konvergenten Reihe von der Beschaffenheit, daß:

$$\sum_2^\infty{}^\nu \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} = \sum_2^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{p_{\nu-1}} - \frac{1}{p_\nu}\right) = \frac{1}{p_1}, \text{ d. h. } = 1.$$

Und umgekehrt läßt sich das allgemeine Glied c_ν jeder positivgliedrigen konvergenten Reihe mit der Summe $\sum_2^\infty{}^\nu c_\nu = 1$ in die obige Form setzen.[1]) Die Bedingung (V) besagt also lediglich, daß $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right|$ höchstens gleich sein soll dem Gliede c_ν einer konvergenten Reihe, für welche $\sum_2^\infty{}^\nu c_\nu = 1$ ist, d. h. schließlich, daß die Reihe $\sum \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right|$ selbst konvergiert und $\sum_2^\infty{}^\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| \leqq 1$ ist. Somit ergibt sich:

---

[1]) Vgl. Math. Ann. 35 (1890) p. 327. — Will man auf diesen allgemeinen Satz nicht rekurrieren, so hat man nur zu setzen:

$$\sum_n^\infty{}^\nu c_\nu = \frac{1}{p_{n-1}},$$

also:

$$\sum_2^\infty{}^\nu c_\nu = \frac{1}{p_1} = 1, \quad p_n > p_{n-1} \text{ und } \lim_{n=\infty} p_n = +\infty.$$

Da sodann:

$$\sum_{n+1}^\infty{}^\nu c_\nu = \frac{1}{p_n},$$

so folgt, wie behauptet:

$$c_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n} = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}\, p_n}.$$

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *ist unbedingt konvergent, wenn die Reihe* $\sum \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$ *absolut konvergiert und*

$$\sum_2^\infty{}' \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq 1$$

ausfällt.

Das ist aber das Helge von Kochsche Kriterium mit der in der Einleitung angekündigten Erweiterung.[1])

---

§ 3.

1. Der in der Einleitung erwähnte Konvergenz-Satz des Herrn C. B. van Vleck lautet (in wörtlicher Übersetzung) folgendermaßen:

„Bedeutet r_ν eine positive Zahl, so bildet die Konvergenz der Reihe

$$(18)\quad 1 + \frac{r_2}{1-r_2} + \frac{r_2 r_3}{(1-r_2)(1-r_3)} + \frac{r_2 r_3 r_4}{(1-r_2)(1-r_3)(1-r_4)} + \cdots$$

eine notwendige Bedingung dafür, daß der Kettenbruch

$$(19)\quad \frac{1}{1} + \frac{r_2 e^{\vartheta_2 i}|}{|\,1} + \frac{r_3(1-r_2)e^{\vartheta_3 i}|}{|\,1} + \frac{r_4(1-r_3)\cdot e^{\vartheta_4 i}|}{|\,1} + \cdots$$

für alle Werte der Argumente ϑ_ν konvergiert. Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls $r_\nu < 1$ für alle Werte von ν."

Wie schon früher bemerkt wurde, scheint mir die Fassung des obigen Kriteriums nicht recht glücklich und zwar aus folgendem Grunde. Es werde angenommen, daß durchweg $r_\nu < 1$. Alsdann ist nach dem Wortlaute des Kriteriums die Konvergenz der Reihe (19) hinreichend, aber auch notwendig, wenn der Kettenbruch (18) für alle Werte der

---

[1]) Bezüglich der Herleitung des van Vleckschen Kriteriums aus dem Kriterium von Nr. 1 s. Nr. 2 des folgenden Paragraphen.

Argumente ϑ_ν konvergieren soll. Danach muß doch jeder Unbefangene vermuten, daß eine irgendwie nennenswerte Anzahl von Wertkombinationen der ϑ_ν $(\nu = 2, 3, \ldots)$ existiert, für welche die Konvergenz der Reihe (19) zur Konvergenz des Kettenbruches (18) wirklich notwendig ist. Nun gibt es aber in Wahrheit einen einzigen Fall, in welchem die Konvergenz jener Reihe für diejenige des Kettenbruches in Frage kommt: nämlich, wenn durchweg $e^{\vartheta_\nu i} = -1$, also $\vartheta_\nu = \pi$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ ist. In allen übrigen erdenklichen Fällen konvergiert der Kettenbruch, sofern nur $r_\nu < 1$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$, mag im übrigen die Reihe (18) konvergieren oder divergieren.[1]) Die in dem obigen Kriterium betonte Notwendigkeit jener Bedingung kommt also lediglich dadurch zustande, daß ein ganz markanter Ausnahmefall, der einzig und allein die Erfüllung jener Bedingung erheischt, mit allen überhaupt vorhandenen übrigen Fällen zu einer Gesamtheit vereinigt und sodann über diese Gesamtheit ohne jede weitere Erklärung eine Aussage gemacht wird, deren Richtigkeit ausschließlich auf der Existenz jenes Ausnahmefalles beruht und die sofort hinfällig wird, wenn man den letzteren aus der Gesamtmenge der Fälle entfernt.

---

[1]) Genügen die r_ν nicht der Bedingung, daß durchweg (oder zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) $r_\nu < 1$, so lassen sich allgemeine Aussagen über eine etwaige Konvergenz des Kettenbruches überhaupt nicht machen. Die in Frage stehende Notwendigkeit jener Konvergenz-Bedingung hat dann wiederum nur den Sinn, daß in dem speziellen Falle $e^{\vartheta_\nu i} = -1$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ der Kettenbruch (19) sicher divergiert, wenn die Reihe (18) divergiert.

Das letztere findet z. B. immer statt, wenn durchweg (oder zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) $r_\nu > 1$. Ist dann $e^{\vartheta_\nu i} = -1$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$, so werden offenbar alle Teilbrüche von einer bestimmten Stelle ab wesentlich positiv. Der mit dem unmittelbar vorangehenden Gliede beginnende Rest-Kettenbruch kann dann mit Hilfe der für Kettenbrüche mit positiven Gliedern geltenden Kriterien beurteilt und eventuell als konvergent erkannt worden, obschon der Gesamt-Kettenbruch nach ∞ divergiert. (Genauer ausgedrückt: sein absoluter Wert divergiert nach $+\infty$, während er selbst zwischen $+\infty$ und $-\infty$ oszilliert).

Eine derartige Darstellungsweise scheint mir aber ein Mißverständnis in Bezug auf die Tragweite der betreffenden Aussage nicht nur nicht auszuschließen, sondern geradezu herauszufordern.

2. Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie der obige Konvergenz-Satz in merklich präziserer Fassung sich ohne weiteres aus dem Hauptsatze des § 1 ergibt.

Setzt man zur Abkürzung

$$e^{\vartheta_\nu i} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so nimmt der fragliche Kettenbruch (19) mit Benützung der sonst von mir gebrauchten Schreibweise[1]) die Form an:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_\nu r_\nu (1 - r_{\nu-1})}{1}\right]_3^\infty.$$

Bedeuten dann wiederum $c_2, c_3, \ldots$ irgendwelche Konstanten, so wird zunächst:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_\nu r_\nu (1 - r_{\nu-1})}{1}\right]_3^\infty = \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 c_2 r_2}{c_2}, \frac{\varepsilon_\nu c_{\nu-1} c_\nu r_\nu (1 - r_{\nu-1})}{c_\nu}\right]_3^\infty$$

und wenn jetzt

$$c_\nu = \frac{1}{1 - r_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_\nu r_\nu (1 - r_{\nu-1})}{1}\right]_3^\infty = \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2 : (1 - r_2)}{1 : (1 - r_2)}, \frac{\varepsilon_\nu r_\nu : (1 - r_\nu)}{1 : (1 - r_\nu)}\right]_3^\infty$$

$$= \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_\nu r_\nu : (1 - r_\nu)}{1 : (1 - r_\nu)}\right]_2^\infty.$$

Bezeichnet man den letzten Kettenbruch zur Abkürzung mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, so hat man

$$b_1 = 1$$

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898), p. 296, Formel (6).

und für $\nu \geq 2$:

$$|b_\nu| - |a_\nu| = \frac{1 - r_\nu}{|1 - r_\nu|},$$

d. h.

$$|b_\nu| - |a_\nu| \begin{cases} = +1, \text{ wenn } r_\nu < 1, \\ = -1, \text{ wenn } r_\nu > 1. \end{cases}$$

Ist also durchweg $r_\nu < 1$, so genügt der mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ bezeichnete Kettenbruch den Bedingungen (A, 1), (A', 2) des § 1 und ist somit konvergent mit Ausnahme eines einzigen Falles (s. die Bedingungen (A', 3), (A', 4) bezw. den Zusatz zu § 1, Nr. 1), in welchem $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = -1$ wird und daher der fragliche Kettenbruch eigentlich divergiert: wenn nämlich

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad (\text{für } \nu = 2, 3, \cdots)$$

und die Reihe

$$\sum_2^\infty {}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu| \quad \text{d. h.} \quad \sum_2^\infty {}^\nu \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_3} \cdots \frac{r_\nu}{1 - r_\nu}$$

divergiert.

Somit ergibt sich für den zu Anfang dieses **Paragraphen** zitierten Satz nunmehr die folgende Fassung:

Der Kettenbruch

$$\frac{1|}{|1} + \frac{\varepsilon_2 r_2|}{|1} + \frac{\varepsilon_3 r_3 (1 - r_2)|}{|1} + \frac{\varepsilon_4 r_4 (1 - r_3)|}{|1} + \cdots,$$

wo $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ *beliebige komplexe Zahlen mit* ***dem absoluten Betrage*** 1, *dagegen* $r_2, r_3, r_4, \ldots$ *positive Zahlen* < 1 ***bedeuten, ist*** *unbedingt konvergiert, außer wenn*

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad (\text{für } \nu = 2, 3, \ldots)$$

und die Reihe

$$\frac{r_2}{1 - r_2} + \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_3} + \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_3} \cdot \frac{r_4}{1 - r_4} + \cdots$$

divergent ist. In diesem Falle konvergiert der mit dem zweiten Gliede beginnende Kettenbruch nach -1, *so daß also der Gesamt-Kettenbruch eigentlich divergiert.*

Im übrigen ist dieser Satz lediglich ein spezieller Fall des im vorigen Paragraphen am Schlusse von Nr. 1 ausgesprochenen allgemeineren Konvergenz-Theorems. Faßt man dort die Bedingungen (C′) ins Auge und setzt durchweg $b_\nu = 1$ $(\nu \geqq 1)$, so folgt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ unbedingt konvergiert, sofern die a_ν den folgenden Beziehungen genügen:

$$a_2 = \varepsilon_2 \frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \text{und für } \nu \geqq 3: \quad a_\nu = \varepsilon_\nu \cdot \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu},$$

außer wenn durchweg

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad \text{für } \nu \geqq 2$$

und die Reihe

$$\sum_2^\infty {}^\nu (p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_\nu - 1)$$

divergent ist, in welchem Falle der betreffende Kettenbruch eigentlich divergiert. Macht man jetzt die Substitution:

$$p_\nu = \frac{1}{1 - r_\nu} \quad (\nu > 2),$$

so daß also $0 < r_\nu < 1$ wegen $p_\nu > 1$ und:

$$p_\nu - 1 = \frac{r_\nu}{1 - r_\nu}, \quad \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1}\, p_\nu} = r_\nu (1 - r_{\nu-1})$$

$$\left(\text{speziell: } \frac{p_2 - 1}{p_2} = r_2\right),$$

so nimmt dieses Resultat, wenn man noch dem willkürlich gebliebenen Anfangszähler a_1 den Wert 1 beilegt, genau die Form des oben ausgesprochenen Satzes an.

3. Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch bemerken, daß auch zwei andere Theoreme, die Herr van Vleck in der er-

wähnten Abhandlung mitgeteilt hat,[1]) soweit es sich dabei um die Konvergenz des in Frage kommenden Kettenbruches handelt, als ganz unmittelbare Folgerungen eines schon in meiner früheren Mitteilung angegebenen,[2]) in der vorliegenden in § 2, p. 371 unter (II) aufgeführten Kriteriums sich ergeben. Der wesentliche Inhalt jener beiden Theoreme läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

Sind $a_2, a_3, \ldots$ beliebige komplexe Zahlen und besitzen die absoluten Beträge $|a_\nu|$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ die obere Grenze a und den oberen Limes a', so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_2^\infty$ und zwar gleichmäßig für $|x| < \varrho$, wo $\varrho = \frac{1}{4a}$; er konvergiert, wenn $a' < a$ ist,[3]) auch noch für $\varrho \leqq |x| < \varrho'$, wo $\varrho' = \frac{1}{4a'}$, und zwar gleichmäßig für $|x| \leqq \varrho' - \delta$ (wo $\delta > 0$ beliebig klein) mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen, jedoch bei unbegrenzter Verkleinerung von δ (also in der Nähe des Kreises $|x| = \varrho'$) möglicherweise unbegrenzt zunehmenden Anzahl von Punkten, welche Pole der durch den betreffenden Kettenbruch dargestellten analytischen Funktion sind.

Dabei ergeben sich die auf die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bezüglichen Behauptungen ohne weiteres aus dem Umstande, daß der Kettenbruch konvergent bleibt, wenn man sämtliche Teilzähler $a_\nu x$ durch $-\frac{1}{4}$ ersetzt.

---

[1]) A. a. O. p. 475, Theorem I; p. 477, Theorem II.

[2]) A. a. O. p. 322, Formel (74).

[3]) Es existieren offenbar nur die beiden Möglichkeiten:

$$a' = a \quad \text{und} \quad a' < a.$$

Im übrigen hat man auf Grund der Bedeutung von a und a':

$$|a_\nu| \leqq a \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

$$|a_\nu| < a + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu > n$$

(bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und passend bestimmten n).

Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes.

Von **Siegmund Günther** und **Simon Dannbeck.**

(Eingelaufen 13. November.)

Wie schon bei früherer Gelegenheit kurz angedeutet ward,[1] unterliegt auch das sogenannte barische Windgesetz von Buys Ballot, durch dessen endgültigen Sieg über die Dovesche Zweistromtheorie in den sechziger und siebziger Jahren des XIX. Jahrhunderts eine neue Epoche in der rationellen Meteorologie heraufgeführt wurde, der stets wiederkehrenden Regel, daß es nicht unvermittelt vor die Welt trat, sondern daß ein langes Vorbereitungsstadium den Boden dafür bereiten mußte. Eine quellenmäßige Schilderung dieser einleitenden Phasen hat bisher gefehlt,[2] und so wird es am Platze sein, in einer genauen Charakteristik der einzelnen in Betracht kommenden

---

[1] Vgl. Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 178 ff., S. 190 ff.

[2] Dies bezieht sich allerdings zunächst nur auf die ältere Zeit, die auch sonst, so viele wertvolle Keime in einer weitschichtigen und vielfach ungenießbaren Literatur verborgen liegen, zu sehr vernachlässigt wird. Für die dreißiger, vierziger und fünfziger Jahrzehnte dagegen, für eine Periode also, in der sich die einschlägigen Bemühungen um eine wissenschaftliche Fundierung der Witterungslehre derart häuften, daß bereits von einer Prioritätsfrage für das in Rede stehende Gesetz gesprochen werden kann, hat eben diese van Bebber (Handbuch der ausübenden Witterungskunde, 1. Band, Stuttgart 1884, S. 287 ff.) sehr gründlich abgehandelt, was jedoch Nachträge und Ergänzungen nicht ausschließt. Nicht vergessen werden darf auch die Behandlung der geschichtlichen Seite des Problemes bei R. Börnstein (Leitfaden der Wetterkunde, Braunschweig 1901, S. 85 ff.).

Momente diesen merkwürdigen, oft unterbrochenen Entwicklungsgang vorzuführen, der zugleich wohl geeignet ist, Licht auf die **Geschichte der modernen Meteorologie** überhaupt zu werfen.[1]) Wir legen hier das Gesetz, welches ja selbstverständlich in seiner Fassung mehrfache Wandlungen durchzumachen hatte, ehe es die sozusagen klassische Gestalt angenommen hatte, in welcher es uns jetzt geläufig ist,[2]) in einer Formulierung zu Grunde, die für die Aufdeckung der geschichtlichen Zusammenhänge besonders geeignet erscheint, und drücken es in folgender Weise aus:

In den unteren atmosphärischen Schichten strömt die Luft aus der Gegend eines barometrischen Maximums nach derjenigen des nächst benachbarten barometrischen Minimums hin ab, indem zugleich durch die Achsendrehung der Erde die von Hause aus geradlinige Bewegung in eine zyklonale verwandelt wird, deren Drehsinn auf der Nordhalbkugel ein rechtsseitiger, auf der Südhalbkugel ein linksseitiger ist.

Zerlegt man den durch theoretische Erwägung,[3]) wie praktische Erfahrung gleichmäßig bestätigten Lehrsatz in seine einzelnen Teile, so ersieht man, daß drei an und für sich verschiedene Wahrheiten darin enthalten sind, nämlich

I. **Die ursprüngliche Bewegungstendenz.**

II. **Die ablenkende Tendenz der Erdrotation.**

III. **Die grundsätzliche Übereinstimmung aller in geringer Entfernung von der Erdoberfläche wehenden**

---

[1]) Unterstützt wurde dieses Bestreben wesentlich durch die unentbehrlichen Werke **Hellmanns**, von denen hier namentlich zwei in Betracht kommen: Repertorium der deutschen Meteorologie, Leipzig 1883. Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus (zumal Nr. 6, **Hadleys** Abhandlung über die Passate nebst Einleitung, künftig mit der Signatur H. H. angeführt).

[2]) Vgl. **van Bebber**, Die Veröffentlichungen des K. Niederländischen Institutes, Meteorolog. Zeitschrift, 3. Jahrgang (1886), S. 453.

[3]) Diesen Beweis lieferte **Sprung**, Theoretische Begründung des **Buys Ballot**schen Gesetzes, Ann. d. Hydrogr. und marit. Meteorol. 8. Band, S. 603 ff.

Winde mit Luftwirbeln, denen dann in größerer Höhe ein antizyklonales Ausströmen aus den Gebieten hohen Druckes entspricht.

Die historische Betrachtung wird demgemäß darauf zu achten haben, das Auftreten dieser drei Erkenntnisse zu verfolgen, wenn dieselben auch anfänglich nur isoliert uns begegnen und der Zusammenfassung zu einer einheitlichen Beschreibung der wirklichen Vorgänge noch harren. Uns, die wir in ganz anderen Gedankenreihen aufgewachsen sind, will es ja freilich bedünken, als ob der in dieser Vereinigung liegende geistige Prozeß sich von selbst hätte vollziehen müssen. Allein wer den Werdegang irgend einer Naturwissenschaft sich näher angesehen hat, weiß sehr wohl, daß das, was einer späteren Generation als naturnotwendig vorkommt, dies ursprünglich noch keineswegs zu sein brauchte.

Das Altertum und Mittelalter kommen für unseren Zweck selbstverständlich nur ganz wenig in Frage.[1]) Die aristotelische Lehre ging von gänzlich unzutreffenden Voraussetzungen aus, und lediglich in Theophrasts Fragmente[2]) „περὶ ἀνέμων“ begegnet uns, ebenso wie bei dem Architekten Vitruvius,

[1]) Darüber geben die Geschichtswerke Aufschluß: Poggendorff, Geschichte der Physik, Leipzig 1879, S. 45; A. Heller, Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Stuttgart 1882, S. 59 ff. Das gesamte Material, das sich zum Teil bei den Kommentatoren und Scholiasten verstreut findet, hat musterhaft das Werk von Ideler (Meteorologia veterum Graecorum et Romanorum, Berlin 1832) gesammelt. Für die ältere und neuere Zeit sind wertvoll ein Essay B. v. Lindenaus (Beyträge zu einer Theorie merkwürdiger Winde, von Zachs Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, 13. Band, S. 249 ff.) und Munckes inhaltreicher Artikel „Wind“ (Gehlers Physikalisches Wörterbuch, 2. Auflage, 10. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1842, S. 1860 ff.).

[2]) Der verhältnismäßig sehr freie Standpunkt dieses Griechen kennzeichnet sich namentlich auch darin, daß er neben den gewöhnlichen Winden von angenähert horizontaler Richtung auch solche kennt, die senkrecht zur Horizontalebene, als „Fallwinde“, wehen (C. Neumann-J. Partsch, Physikalische Geographie von Griechenland, Breslau 1885, S. 102).

eine richtigere Deutung des Windes als einer von der Sonnenwärme ausgelösten Luftbewegung. Die u. a. auch von Plinius aufgestellte Behauptung, die Drehung der Winde folge der fortschreitenden Sonne,[1]) war nicht sowohl gelehrten Werken, als vielmehr den populären Lehren von Wind und Wetter entlehnt, wie sie sich am bestimmtesten bei den Seeleuten ausgebildet hatten.[2]) Die wissenschaftliche Welt löste sich auch noch während des XVI. Jahrhunderts von der Autorität des Aristoteles nur sehr langsam und behutsam los, und bis gegen 1650 war die Überzeugung eine allgemein verbreitete, daß Geschwindigkeitsdifferenzen in der Bewegung von Luft und Erdkörper die Hauptursache der irdischen Winde seien. Die Ptolemaiker ließen die Atmosphäre an der Umdrehung der Himmelskugel teilnehmen,[3]) und die Coppernicaner, für welche am entschiedensten Galilei das Wort ergriff,[4]) leiteten umgekehrt aus dem Vorkommen regelmäßiger Windsysteme einen Beleg für die Wahrheit der neuen Kosmologie her. Was Descartes, Mersenne, Rohault

---

[1]) Plinius, Historia Naturalis, lib. II, cap. 48. „Omnes venti vicibus suis spirant majore ex parte, aut ut contrarius desinenti incipiat. Cum proximi cadentibus surgunt, a laevo latere in dextrum, ut Sol, ambiunt." Es ist dies vielleicht die prägnanteste Äußerung antiker Meteorologie; was man, den Angaben der „Doxographen" folgend, bei den ionischen Naturphilosophen, was man bei Hippocrates und Herodot, was man in mehr wissenschaftlich-systematischer Form bei Aristoteles und Seneca findet, erhebt sich nicht über eine vage Spekulation und über Spiele mit Worten.

[2]) Diese nautischen Regeln bespricht, als durch die aristotelische „Meteorologie" immerhin beeinflußt, H. Balmer (Die Romfahrt des Apostels Paulus und die Seefahrtskunde im römischen Kaiserzeitalter, Bern-Münchenbuchsee 1905, S. 339).

[3]) Die Beobachtungen der Reisenden über die regelmäßigen Tropenwinde wurden in diesem Sinne interpretiert. Man findet [illegible] dergleichen Bemerkungen bei den weit herumgekommenen Jesuiten Alonso Sanchez und José D'Acosta.

[4]) Galilei, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, deutsch von E. Strauß, Leipzig 1891, S. 459. Die Lufthülle wird durch die Unebenheiten der Erdoberfläche mitfortgerissen, und zwar [illegible] am Äquator, und so entsteht ein Dauerwind. „Diesen Wind [illegible]

und andere Physiker jener Übergangszeit über die Winde zu sagen wissen, bewegt sich immer in den gleichen Bahnen, und auch der große deutsche Geograph Varenius, dem in umfassender Kenntnis der tatsächlichen Windverhältnisse unseres Planeten es niemand gleich tat, vermochte sich dem Bannkreise, in dem man sich allgemein bewegte, nicht völlig zu entwinden.[1] Doch war schon damals wenigstens der Anfang gemacht, diesen Bann zu brechen und einer Anschauung über das Wesen der Winde zum Durchbruche zu verhelfen, welche unverkennbare Berührungspunkte mit derjenigen der Gegenwart darbietet.

Der Schriftsteller, den wir hier meinen, war Francis Bacon. Man hat oft Anstoß daran genommen, daß sein Streben, sich von scholastischen Schlacken zu befreien, durchaus nicht immer von Erfolg gekrönt war, allein eine objektive Würdigung des Sachverhaltes führt zu einer gerechteren Beurteilung,[2] und gerade in dem uns hier beschäftigenden Falle hat er sich seinen Zeitgenossen überlegen gezeigt. Er besaß, sehr im Gegensatze zu Varenius, eine gewisse Vorstellung vom Wesen der Aspiration und suchte deren Wirkung durch ein prinzipiell ganz richtig angelegtes Experiment zu veranschaulichen. Er unterschied zwischen erwärmter, leichterer und kühlerer, also schwererer Luft und sah ein, daß diese die erstere kraft ihres Druckes zur Seite schieben und sich an

---

würde da am merklichsten sein, wo die Drehung der Erde am raschesten vonstatten geht, also an Stellen, die möglichst entfernt von den Polen und nahe dem größten Kreise der täglichen Rotation liegen."

[1] Die Abhängigkeit der Luftbewegung von der Insolation wird nicht verkannt, aber sonderbarerweise wird den Sonnenstrahlen die Kraft zugeschrieben, die Luftteilchen vor sich hertreiben zu können (Varenius, Geographia Generalis, Amsterdam 1649, S. 387 ff.). Die atmosphärische Physik des deutschen Geographen muß als ein Ganzes ins Auge gefaßt werden (Günther, Varenius, Leipzig 1905, S. 83 ff.).

[2] Eine solche ist, in bewußter Polemik gegen den unhistorischen Standpunkt J. v. Liebigs, von E. Wohlwill gegeben worden (Bacon von Verulam und die Geschichte der Naturwissenschaft, Konstitutionelle Jahrbücher, 9. Band, S. 404 ff.).

ihre Stelle setzen müsse.[1]) Nicht minder ist in seinem Beginnen,[2]) eine Parallele zwischen strömender Luft und fließenden Gewässern zu ziehen, ein Gefühl für die Wirklichkeit anzuerkennen. Nächst Bacon hat Isaak Vossius in einem kleinen Werkchen, von dessen hoher geophysikalischer Tragweite man immer deutlichere Begriffe gewinnt, eine korrekte Stellung eingenommen.[3]) Was sein Vorgänger mehr nur gefühlt hat, spricht er mit klaren Worten aus: Die Bewegungsgesetze für flüssige und luftförmige Massen sind in der Hauptsache die gleichen. Auch sonst begegnet man bei ihm, vorab in der Behandlung der Land- und Seewinde,[4]) einem den Durchschnitt des Zeitalters bei weitem überragenden Verständnis des Naturgeschehens. Wenn man sich vergegenwärtigt, welch ungemein krause und absurde Hypothesen man noch später bei Lister, Garden, Sarrabat, Dupain de Nemours, vermischt mit einzelnen ganz korrekten Gedanken, antreffen kann,[5]) so wird man Bacon und Vossius eine volle Anerkennung nicht versagen dürfen. Vor allem war bei den

---

[1]) F. Bacon, Historia naturalis et experimentalis de ventis, Leiden 1648, S. 64 ff. „Itaque excitationis motus in ventis causa est praecipua superoneratio aëris . . .“ Nur wurde in dem ganzen Buche, dessen erste Ausgabe von 1622 stammt, auf die Beschwerung der Luft mit Dämpfen ein zu großes Gewicht gelegt.

[2]) A. a. O., S. 105 ff.

[3]) J. Vossius, De motu marium et ventorum liber, Haag 1663 S. 93 ff. Die Überschrift des 21. Kapitels lautet: „Ventum esse aëris motum, et ostenditur aërem iisdem quibus aqua legibus moveri.“

[4]) Es ist anscheinend noch nicht hervorgehoben worden, daß bei Vossius die jenen Windwechsel bedingende Tatsache von der ungleichen Koerzitivkraft, welche Festland und Wasser für die Wärme aufweisen, zuerst mit voller Präzision hingestellt worden ist. Wir lesen nämlich bei ihm (S. 104): „Verum praeterea non est terram diutius inditum a Sole calorem conservare quam maria.“ Der Einzug des Winters werde unter sonst gleichen Umständen auf dem Meere um zwei volle Monate später als auf dem Lande wahrgenommen, weil eben ersteres die ihr zugeführte Wärme weit langsamer wieder von sich gebe.

[5]) Hierüber orientieren Muncke (a. a. O., S. 1963 ff.) und Hellmann (H. H., S. 6 ff.) im Vereine mit der zitierten Abhandlung v. Lindenaus

meisten Autoren die astrometeorologische Spekulation[1]) noch immer maßgebend, und wir werden bald zu konstatieren haben, daß nach dieser Seite hin auch das XVIII. Jahrhundert keine wesentliche Änderung brachte.

Gleichwohl hatte sich schon in den letzten zwei Dezennien des XVII. Jahrhunderts ein Umschwung angebahnt, an dem neben hervorragenden Forschern auch die Praktiker ihren Anteil hatten.[2]) Den großen Seefahrer Dampier, der auch seine Erfahrungen in einer besonderen Schrift niederlegte,[3]) hat kein geringerer als Dove, mag auch sein Lob vielleicht als etwas zu stark aufgetragen erscheinen, als Begründer einer Lehre von den großen tellurischen Windsystemen gefeiert,[4]) und es ist die Vermutung kaum abzuweisen, daß seine Darstellung auf Hadley einen gewissen Einfluß ausgeübt haben möchte. Das Wesen der Luftauflockerung hatte er jedenfalls durchdrungen. Gleichzeitig mit Dampier lebten Hooke,[5])

[1]) Vgl. dazu Günther, Der Einfluß der Himmelskörper auf Witterungsverhältnisse, Nürnberg 1884. Nicht minder eingehend behandelt die Periode des Überwucherns der Astrometeorologie und ihrer Konsequenzen van Bebber (Handb. etc., 1. Band, S. 34 ff.). Bis zu welcher Abneigung gegen den trügerischen Führer sich die Erkenntnis von der Unzulänglichkeit dieser Abart der Astrologie bei wirklichen Naturforschern steigern konnte, zeigt uns augenfällig ein wenig bekanntes Schriftchen des Astronomen J. E. Bode (Gedanken über den Witterungslauf, Berlin 1819). Derselbe geht so weit, der Meteorologie jede Vervollkommnungsfähigkeit abzusprechen, verfällt also in ein entgegengesetztes, ebensowenig zu billigendes Extrem.

[2]) Welch hohes Maß einer allerdings nur empirischen, aber dafür um so mehr von vorgefaßten Schulmeinungen unbeeinflußten Sachkenntnis in den Aufzeichnungen der Ozeanfahrer aufgespeichert war, zeigt uns ein Aufsatz von Gelcich (Beiträge zur Geschichte der ozeanischen Schiffahrtregeln und Segelhandbücher, Ausland, 65. Jahrgang, S. 769 ff.). Ohne Vertrautheit mit den ständigen Windrichtungen wären ja die jetzt bereits zu hoher Vollkommenheit gebrachten Traversierungen der Weltmeere eine Unmöglichkeit gewesen.

[3]) Dampier, Discourse of Trade Winds, London 1699.

[4]) A. W. Dove, Über Moussons und Passate, Ann. d. Phys. u. Chem., 24. Band, S. 194.

[5]) Hooke, Posthumous Works, ed. R. Waller, London 1705, S. 363.

der als der erste die Idee einer großen terrestrischen Luftzirkulation in die Debatte warf, ohne sich, seiner Gepflogenheit nach, auf deren Ausführung im einzelnen einzulassen, und Mariotte,[1]) dessen wir hier vorzugsweise zu gedenken verpflichtet sind, weil bei ihm die frühesten Anklänge an eines der oben formulierten drei Leitprinzipien nachgewiesen werden können. Ohne dasselbe freilich in seiner vollen Wichtigkeit zu erkennen, äußerte er doch, daß die ungleiche Rotationsgeschwindigkeit solcher Erdorte, deren geographische Breite verschieden ist, auch in der Luftbewegung zur Geltung kommen müsse. In diesem Punkte erwies er sich als den tiefer Blickenden gegenüber Halley,[2]) der den für die Passate typischen Austausch zwischen der kühleren Luft der höheren und der wärmeren Luft der niedrigeren Breiten zutreffend aufgefaßt, es jedoch noch nicht dahin gebracht hat, die von Mariotte wenigstens geahnte Mitwirkung der Erdumdrehung in Rechnung zu ziehen. Dieses Verdienst muß voll zugesprochen werden einem anderen Briten, der infolge des Gleichklanges der Namen gar nicht selten hinter dem älteren und hier minder glücklichen Halley hat zurücktreten müssen. Damit ist dann unsere Schilderung in das XVIII. Jahrhundert eingetreten.

Der fragliche Vortrag war schon im Jahre 1686 vor der Royal Society gehalten, aber nicht der Öffentlichkeit übergeben worden.

[1]) Mariotte, De la nature de l'air, Oeuvres, I. Auflage, 2. Band, Leiden 1717, S. 161 ff.; II. Auflage, 2. Band, ebenda 1740, S. 343 ff.

[2]) Halley, A Historical Account of the Trade Winds and Monsoons observable in the Seas between and near the Tropicks, with an Attempt to assign the Physical Cause of the said Winds, Philos. Transact. 16. Band (1686), S. 153 ff. Es liegt nicht ganz ferne, anzunehmen, daß eine Stelle in dem verbreiteten Werke von Fournier (L'hydrographie, contenant la théorie et la pratique de toutes parties de la navigation, Paris 1643; II. Auflage, ebenda 1767, S. 355 ff.) dem englischen Astronomen eine gewisse Anregung gegeben habe. Es ist dort davon die Rede, daß die mit der stärkeren Verdampfung am Gleicher in Verbindung stehende Luftverdünnung einen Zustrom von den Polen aus zur Folge habe.

George Hadley, dessen Bruder John als tatsächlicher Erfinder des Spiegelsextanten der Geographie ebenfalls nicht hoch genug zu schätzende Dienste leistete, ist der Begründer jener Theorie der Passate, welcher in den Grundzügen ein dauernder Wert verblieben ist. Sein nur wenige Seiten umfassendes Memoire[1]) gipfelt in zwei Thesen, deren Inhalt deutsch wiedergegeben werden möge. I. Ohne das Eingreifen der Erdrotation wäre die Schiffahrt, insonderheit die nach Osten oder Westen gerichtete, sehr schwierig und eine Umsegelung der Erde überhaupt ganz untunlich. II. Den Nordost- und Südostwinden zwischen den Wendekreisen müssen Nordwest- und Südwestwinde als Kompensationsströme an anderen Orten entsprechen, wie denn ganz allgemein jeder Wind, er möge wie immer wehen, durch einen Gegenwind an anderer Stelle kompensiert werden muß, und jeder derartige Gegensatz in den Windrichtungen ist bedingt durch die Erdrotation. Es erhellt, daß hier schon eine allgemeinere, über die Erklärung der Passatwinde hinausgehende Wahrheit ausgesprochen ist. Insbesondere jedoch muß uns der Umstand interessieren: G. Hadley hat zuerst in zielbewußter Weise die Abhängigkeit der Windrichtungen von der täglichen Bewegung der Erde klargestellt.

Fürs erste blieben freilich diesem bedeutsamen Erkenntnisfortschritte die günstigen Folgen fast durchweg versagt, welche man hätte erwarten sollen, und erst in der zweiten Jahrhunderthälfte zeigt sich eine Wendung zum besseren. Indessen darf nicht vergessen werden, daß unmittelbar vor Hadley auch ein deutscher, sonst wenig bekannter Gelehrter,[2]) der Gießener

---

[1]) G. Hadley, Concerning the Cause of the General Trade Winds, Philos. Transact., 39. Band (1635), S. 58 ff.; H. H., S. 17 ff. Im folgenden Bande (S. 174) kennzeichnet er noch die Bedingtheit des Winkels, unter dem Unter- und Oberwind einen Parallelkreis durchschneiden, von der geographischen Breite des letzteren.

[2]) Nur durch seine Ansichten über den Tau, die in unseren Tagen eine Wiederauferstehung gefeiert haben (Wollny, Untersuchungen über die Bildung und Menge des Taues, Forschungen über Agrikulturphysik,

Physiker Gersten, mit einer Windtheorie[1]) hervorgetreten ist, die allerdings der überzeugenden Klarheit des Engländers ermangelt, hier aber um so weniger übergangen werden darf, weil auch in ihr die doppelte Ursache des Wehens der Passate in der Hauptsache aufgedeckt wird. Das Aufsteigen des Windes infolge stärkerer Erhitzung der tropischen Gegenden bewirkt einen stetigen Zustrom aus den Gebieten kühlerer Lufttemperatur, und dieser Luftstrom muß, je nach der Polhöhe, eine Ablenkung erfahren. Der Lehrsatz, welcher, obwohl vom Autor nicht eben schärfer betont, die Quintessenz von Gerstens meteorologischem Glaubensbekenntnis in sich schließt,[2]) läßt keine andere Deutung zu. Es verdient ferner noch angemerkt zu werden, daß Gersten sich auch anschickt,[3]) das Steigen des Quecksilbers im Barometer beim Vorherrschen bestimmter Windrichtungen zu erläutern. Aus der Folgezeit sind, wenn wir Muncke[4]) folgen, die Arbeiten von Mylius,[5])

---

15. Band, S. 111 ff.) ist man auf den verdienten Forscher wieder aufmerksam gemacht worden.

[1]) Gersten, Tentamen systematis novi ad mutationes barometri ex natura elateris aërei demonstrandis, Frankfurt a. M. 1733. Als Anhang (S. 195 ff.) ist der Versuch über die Taubildung beigegeben, von dem eine zweite Ausgabe (Oppenheim 1748) bekannter geworden ist.

[2]) Gersten, a. a. O., S. 85. „Cum tellus sit globosa, et aër in locum expansi, undiquaque, occidentali excepta, directione affluat, per demonstrata, facile concipi potest, motionem hanc universalem circa tropicos tantum, ab oriente versus occidentem dirigi, in aliis vero regionibus, ab orientali versus septentrionem aut australem plagam declinare, et celeritate minui, eo magis, quo viciniores sunt polis regiones.“ An Bündigkeit läßt die Einkleidung manches zu wünschen übrig, aber sachlich ist wenigstens der Unterpassat korrekt erklärt.

[3]) Gersten, a. a. O., S. 115 ff. Als neunzehnte Propositio erscheint da die nachstehende: „Quando ventus ex ea plaga spirat, quae directioni venti universalis opposita est, altitudo mercurii in barometro magis minuitur, quam solo universali vento vigente.“

[4]) Muncke, a. a. O., S. 1869.

[5]) Mylius, Versuch einer Bestimmung der Gesetze der Winde, wenn die Erde überall mit einem tiefen Meere bedeckt wäre, Berlin 1747

argentin,[1]) Strahl,[2]) De Lacoudraye[3]) als solche namhaft machen, welche sich auf den durch Hadley bereiteten den stellen. Die Mehrzahl der Fachmänner, die eben deslb hier nicht sämtlich genannt werden können, begnügt sich cht mit dieser einfachen Grundlage, sondern sucht, wofür besondere Musschenbroek als ein klassischer Zeuge beiziehen ist,[4]) die mannigfaltigsten und teilweise fremdartigsten ypothesen zusammen. Dem Zeitgeschmacke[5]) kam am besten Alembert mit seiner berühmten Berliner Preisschrift[6]) tgegen, deren mathematischer Wert im umgekehrten Verltnis zu ihrem physikalischen steht, wie von allem Anfange D. Bernoulli in kräftig polemischer Sprache hervorhob.[7])

[1]) Wargentin, Korta Anmärkningar om Blasvädren, Svenska tenskaps Akad. Handlingar, 1762. Kurze Anmerkungen vom Winde, K. Schwedischen Akademie d. Wissensch. Abhandl. a. d. Naturlehre, shaltungskunst und Mechanik f. d. Jahr 1762, übersetzt v. A. G. estner, 24. Band, Hamburg-Leipzig 1765, S. 173 ff. Die ganz elemene Auseinandersetzung des bekannten Astronomen enthält keine neuen, hl aber im wesentlichen richtige Ansichten; so z. B. über die entgengesetzten Richtungen von Unter- und Oberwind.

[2]) Strahl, Theorie des Windes und der Kälte, Samml. z. Phys. u. turgesch. von einigen Liebhabern dieser Wissenschaften, 2. Band, ipzig 1782, S. 575 ff. Der Autor, der nebenbei auch (S. 586) für einen tarktischen Kontinent Stimmung zu machen sucht, stellt das Aspirasprinzip ganz mit Recht obenan: „Die Luft schießt hin, wo sie veront war."

[3]) De Lacoudraye, Théorie des vents et des ondes, Kopenhagen . Ohne Sonne kein Wind, ist hier die Losung.

[4]) Musschenbroek, Introductio ad philosophiam naturalem, ed. lefe, 2. Band, Leiden 1762, passim. Für jede der vier Klassen von inden, die es geben soll, werden eigenartige Ursachen zu ermitteln sucht.

[5]) Man sehe etwa die grotesken Meinungen eines großen Herrschers er die Winde nach (Hinterlassene Werke Friedrichs II., Königs n Preußen, 9. Band, Augsburg 1789, S. 4 ff.). Stärkere Winde sollen n der Sonne, schwächere von den Planeten hervorgebracht werden.

[6]) D'Alembert, Reflexions sur la cause générale des vents, Berlin 1747.

[7]) In einem Briefe an L. Euler (R. Wolf, Biographien zur Kulturschichte der Schweiz, 3. Zyklus, Zürich 1860, S. 185) bedient sich der eder Mathematiker harter Worte gegen den genialen Fachgenossen,

Neben der Anziehung der Himmelskörper, in welcher mit D'Alembert auch Toaldo und Chiminello die Panacee der meteorologischen Dynamik erblickten, spielte auch die Elektrizität eine einflußreiche Rolle, so z. B. in dem fein ausgesponnenen Systeme von Hube.[1] Eine mehr selbständige Stellung unter den modern denkenden Forschern des XVIII. Jahrhunderts nehmen ein Kant,[2] dessen Essay über die Monsune dieser Erscheinung erst völlig gerecht ward, und H. B. De Saussure,[3] von dem das seitdem unentbehrlich gewordene Wort aufsteigender Luftstrom („courant ascendant") herrührt. Gegen Ende des Jahrhunderts endlich wurde von Deluc[4] der augenblickliche Stand der Lehre von den Winden in eine systematische Form gebracht, ohne daß aber der auf

---

der sich vermessen habe, für jede Polhöhe Richtung und Stärke des Windes zu gegebener Zeit durch ein Integral ausdrücken zu können.

[1] Hube, Über die Ausdünstung und ihre Wirkungen in der Atmosphäre, Leipzig 1790.

[2] Gemeint ist das bekannte und von den Herausgebern der Kantschen Vorlesungen über physische Geographie mit aufgenommenen Fragment „Einige Anmerkungen zur Erläuterung der Theorie der Winde". Vgl. z. B. in der neuen Ausgabe von Gedan (Philosophische Bibliothek, 51. Band, 2. Auflage, S. 359 ff.) dieses geistvolle Aperçu des Königsberger Philosophen. Dessen historische Stellung präzisiert Schneidemühl (Kant und die moderne Theorie der Winde, Ausland, 63. Jahrgang, S. 661 ff.).

[3] De Saussure, Reisen durch die Alpen, aus dem Französischen übersetzt, 4. Band, Leipzig 1788, S. 115 ff. Schon lange vorher zeichnet in ähnlicher Weise den aufsteigenden Strom J. H. Müller (De hiemis nuperae praeter ordinem mitis causis conjecturae physicae, Altdorf 1724).

[4] J. A. Deluc, Nouvelles Idées sur la Météorologie, 2. Band, Paris 1787; Übersetzt aus dem Französischen, 2. Band, Berlin-Stettin 1788, S. 331 ff. Ein Übelstand der sonst verdienstlichen Darstellung lag darin, daß die der Atmosphäre beigemengten Dünste als bestimmende Faktoren für das Zustandekommen der Winde hingestellt wurden. Dagegen legte Protest ein Beguelin (Recherches sur les variations du baromètre, Nouv. Mém. de l'Acad. R. des sciences et de belles lettres de Berlin, Année 1773, Berlin 1775, S. 47 ff.), der nur Veränderungen im Drucke, die er als Massenverschiebungen auffaßt, als Ursachen gelten lassen wollte.

anderen Gebieten mit Erfolg schöpferisch aufgetretene Genfer Physiker zu dem schon Bekannten wesentlich Neues hinzuzufügen in der Lage war.

Allein damals war bereits der Fundamentalsatz aufgestellt worden, den wir eingangs als den ersten bezeichneten, und nur der Vereinigung besonderer Umstände mochte es zuzuschreiben sein, daß die Gelehrtenwelt von dieser wirklich großen Neuerung anscheinend gar keine Notiz genommen hatte, so daß die Vermutung besteht, es möge hier zum ersten Male auf die Tatsache selbst hingewiesen werden. Der Aufsatz, auf den es ankommt, war in einer Akademieschrift von damals noch nicht sehr weiter Verbreitung erschienen, und sein Titel ließ einen Beitrag zur Theorie der Winde nicht mit Notwendigkeit ersehen;[1]) zudem ist es gar nicht unwahrscheinlich, daß der Verfasser auf das von ihm ganz beiläufig ausgesprochene Korollar gar keinen besonderen Nachdruck gelegt wissen wollte, weil er die betreffende Wahrheit für ganz selbstverständlich erachtete. Lambert, einer der umfassendsten Denker und Forscher jener Zeit im Bereiche der exakten Wissenschaften, präzisierte aus freien Stücken, ohne von Hadley (s. o.) geleitet zu sein, das atmosphärische Zirkulationsgesetz, demzufolge Unter- und Oberwinde entgegengesetzte Richtung haben, und stellte alsdann fest, daß die Bewegungen der Luft, von Einzelfällen abgesehen, ausschließlich durch die wechselnde Schwere und Federkraft der Luft ausgelöst würden. Und daran reiht sich der maßgebende Satz:[2]) „Diese Bemühung der Luft, sich wieder ins Gleichgewicht zu setzen, gibt uns nicht nur den Grund von den Änderungen der Winde, sondern es lassen sich daraus auch verschiedene allgemeine Winde erklären. Ein-

[1]) J. H. Lambert, Abhandlung von den Barometerhöhen und ihren Veränderungen, Abhandl. d. kurbaier. Akad. d. Wissensch., 3. Bandes 2. Teil (1765), S. 100 ff.

[2]) Der Sperrdruck der beiden Sätze findet sich nicht im Originale, welches erwähntermaßen ganz gleichmütig über die Gelegenheitsbemerkung hinweggeht.

mal erhellet daraus, daß die Luft sich von denen Orten, wo das Barometer höher steht, an diejenigen hinziehen müsse, wo es niedriger steht, wenn beyde Barometer in gleicher Höhe über dem Meere sind." Dieser letzte Zusatz charakterisiert die volle Einsicht dessen, der so schrieb, in den Zusammenhang der behandelten Fragen. Auch darüber bestand Klarheit, daß das Spiel der Winde aus mechanischen Gründen ein viel freieres in den gemäßigten Erdgürteln als in der Tropenzone sein müsse, indem dort, wie es hier heißt,[1] die allgemeine Zirkulation sich in viele kleinere Zirkulationen auflöse. Lambert hat keine Schule gemacht,[2] und es verging noch eine längere Pause, ehe sein Bewegungsprinzip aufs neue entdeckt wurde, aber nichtsdestoweniger bleibt das geschichtliche Faktum bestehen:

Schon vor 140 Jahren hat ein deutscher Physiker den Inhalt des ersten der drei Theoreme, aus denen sich das barische Windgesetz aufbaut, mit unzweideutiger Bestimmtheit formuliert.

Die ersten zwei Jahrzehnte des XIX. Jahrhunderts mußten dieses unschätzbaren Hilfsmittels der meteorologischen Forschung noch gänzlich entraten, obwohl mitunter nur ein ganz kleiner Schritt noch zu fehlen scheint, um desselben habhaft zu werden. Zu denjenigen, welche von der Erkenntnis der Wahrheit nicht weit entfernt waren, gehörte vor allem L. v. Buch,[3] der von dem Grundsatze, daß lokale Erwärmung eine Luftauf-

---

[1] Lambert, a. a. O., S. 168.

[2] Vielleicht darf man eine Einwirkung Lambertscher Gedanken zu einer etwas später gedruckten Dissertation von Steiglehner-Leveling (Atmosphaerae pressio varia observationibus propriis et alienis barometricis quaesita, Ingolstadt 1783) erkennen. Als oberster Zweck der auch die Beziehungen zwischen Druck und Ausgleich streifenden Arbeit ist der Nachweis anzusehen, daß auch für weit auseinanderliegende Orte die barometrischen Oszillationen synchron erfolgten.

[3] Die viel zu wenig gewürdigten Verdienste des großen Geologen um Meteorologie und speziell Klimatologie bilden den Gegenstand einer besonderen Untersuchung (Günther, Leopold v. Buch und die atmosphärische Physik, Beiträge zur Geophysik, 6. Band (1903), S. 174 ff.).

lockerung nach sich ziehen muß, als von dem „Schlüssel der gesamten Meteorologie" ausgedehnten Gebrauch machte und einerseits in das Wechselspiel von Berg- und Talwind Klarheit zu bringen suchte,[1]) andererseits der Wissenschaft in seinen barometrischen Windrosen ein hodegetisches Verfahren von höchster Nützlichkeit zum Geschenke machte.[2]) Auf die Beziehungen der Barometerschwankungen zu Art und Stärke der Luftbewegung warfen Ramonds Untersuchungen[3]) neues Licht. Allein noch immer jagten selbst bevorzugte Geister, wie v. Lindenau,[4]) dem Phantome einer generellen mathematischen Fixierung des atmosphärischen Bewegungszustandes für beliebige Zeiten und Orte nach. Wenn ein Schriftsteller, wie der jüngere Tobias Mayer,[5]) sich damit bescheidet, den Wind als Ausgleich verschieden temperierter Partien in der Lufthülle zu definieren, so darf man in dieser Resignation ein Verdienst gegenüber den noch immer nicht aufgegebenen Bestrebungen, das Hauptproblem auf eine falsche Fährte zu leiten, unbedingt anerkennen.

Hier hat nun das dritte Dezennium des Jahrhunderts Ansätze zu einer Besserung gebracht, aus denen allerdings infolge einer eigentümlichen Verkettung der Verhältnisse noch lange keine glatt verlaufende Entwicklung resultierte, die aber trotzdem nicht ganz vergebens unternommen waren. In neuerer Zeit erinnerte zuerst v. Bezold[6]) wieder daran, daß schon 1820 ein deutscher Gelehrter den Satz von der zentripetalen

---

[1]) v. Buch, Über den Hagel, Abhandl. der Akad. zu Berlin, Physik. Klasse, 1818, S. 73 ff.; Gesammelte Werke, 2. Band, Berlin 1870, S. 268 ff.

[2]) v. Buch, Über barometrische Windrosen, Abhandl. etc., 1820, S. 103 ff.; Ges. Werke, 3. Band, Berlin 1872, S. 694 ff.

[3]) Ramond de Carbonnières, Mémoires sur la formule barométrique de la Mécanique Céleste, Clermond-Ferrand 1811.

[4]) v. Lindenau, a. a. O., S. 435 ff.

[5]) T. Mayer, Lehrbuch über die physische Astronomie, Theorie der Erde und Meteorologie, Göttingen 1805, S. 219 ff.

[6]) W. v. Bezold, Über die Fortschritte der wissenschaftlichen Witterungskunde während der letzten Jahrzehnte, Meteorol. Zeitschr., 2. Jahrgang (1885), S. 315 ff.

Luftbewegung gegen das Minimum hin rückhaltlos ausgesprochen und mit seiner Hilfe Ordnung in eine Fülle sonst schwer zu enträtselnder Witterungsvorgänge gebracht habe. Der damalige Professor der Mathematik und Physik G. W. Brandes (Breslau) darf als der Begründer der modernen synoptischen Meteorologie angesehen werden,[1]) indem er schon 1816 in einem an Gilbert, den Herausgeber des damals und jetzt geschätztesten Zentralorganes der Physik, gerichteten Schreiben[2]) bemerkt, illuminierte Witterungskarten der Erde für alle 365 Tage des Jahres würden die bedeutsamsten Aufschlüsse über Verbreitung und zeitliche Veränderung irgend eines merkwürdigen Phänomens liefern. Wir möchten die wertvolle Mitteilung des Berliner Meteorologen noch ergänzen: Brandes hat lange vor Buchan, auf den diese Neuerung in der meteorologischen Graphik durchgängig zurückgeführt zu werden pflegt, die Isobaren in der Wissenschaft eingebürgert; und zwar geschieht dies eben auch in der Schrift,[3]) deren ganz eigenartige, vordem aber verkannte geschichtliche Stellung v. Bezold mit Recht hervorgehoben hat. Leider hat ersterer die Zeichnungen, die er seinen Angaben zufolge angefertigt haben muß, in sein Buch nicht aufgenommen; die

---

[1]) Als chronologisch frühestes literarisches Denkmal für das Emporkommen des synoptischen Grundgedankens bezeichnet v. Bezold (a. a. O.) eine Universitätsschrift von Hamberger dem Älteren (Dissertatio de barometris, Jena 1701). Daß von dieser ersten schüchternen Andeutung sich im Laufe des Jahrhunderts das Gefühl von der Notwendigkeit gleichzeitig erfolgter Ablesung der meteorologischen Instrumente beträchtlich verstärkt hatte, beweist die oben zitierte Schrift von Steigenberger-Leveling. Auch der Schweizer Scheuchzer betont schon sehr früh den Wert solcher Barometerbeobachtungen (Hoeherl, J. J. Scheuchzer, der Begründer der physischen Geographie des Hochgebirges, München 1901, S. 67 ff.).

[2]) Brandes, Einige Resultate aus der Witterungsgeschichte des Jahres 1783 und Bitte um Nachrichten aus jener Zeit, Gilb. Ann. d. Phys., 61. Band (1819), S. 421 ff.

[3]) Brandes, Beiträge zur Witterungskunde, Leipzig 1820. Es sind drei nicht innerlich in allen Teilen zusammenhängende Abhandlungen, welche ihr Verfasser hier vereinigt hat.

Figurentafeln verfolgen einen anderen Zweck. Aber den Sturm, der vom 6. bis 9. Februar über einem großen Teile Europas wütete, hat er isobarisch genau verfolgt,[1]) wobei ihm die von der pfälzisch-meteorologischen Sozietät Abt Hemmers zusammengestellten Sammelbände als Stütze dienten. „Hätten wir,“ sagt er etwas später, indem er aus den gestaltlichen Verschiedenheiten der Ortskurven gleichen Druckes die lokalen Winde herauszulesen trachtet, „die genauen Barometerstände von noch fünfzig Orten in Deutschland und Italien an jenem Tage, und hätten wir zugleich genaue Angaben für Richtung und Stärke des Windes, so müßte sich sogleich entscheiden, ob die Barometerstände so mit der Richtung des Windes übereinstimmen, wie es nach dem bisher Angeführten den Anschein hat. . . .“ Und weit später kommt er nochmals auf diese vorläufig noch unerfüllbare Forderung zurück und übergibt dieselbe einer besser ausgestatteten Folgezeit:[2]) „Es möchte eben kein unausführbares Unternehmen sein, die Geschwindigkeiten des Windes, welche bestimmten Unterschieden der Barometerstände entsprechen, anzugeben und die so hergeleiteten Bestimmungen mit Rücksicht auf Ungleichheit der Wärme zu verbessern.“ Zwei Menschenalter, nachdem dieser Hoffnung Ausdruck verliehen worden war, befanden sich Unternehmungen dieser Art, wie sie Brandes vorahnend als möglich erkannt hatte, im besten Gange, und jederman weiß, wie reichlich sie Frucht getragen haben.

Und nun gehen wir über zu einer noch tiefer einschneidenden Neuerung, der man, wie v. Bezold betonte, bei Brandes begegnet. Ihm kam es darauf an, die Luftbewegung rein mechanisch, ohne Anlehnung an eine wie immer beschaffene Hypothese, zu begreifen. Zu dem Ende skizziert er einen einfachen Versuch; nur durch eine dünne gemeinsame Wand getrennt, stehen nebeneinander zwei Behälter, die mit Luft von ungleichem Drucke erfüllt sind, was am einfachsten da-

[1]) A. a. O., S. 74 ff.
[2]) Ebenda, S. 371 ff.

durch erreicht wird, daß der eine Raum, bei sonst gleichen Verhältnissen, eine größere Höhe hat, und wenn nun in die trennende Wand eine Öffnung gemacht wird, so strömt die unter stärkerem Druck stehende Luft in den Nachbarbehälter ein.[1] „So heftig dringt nun freilich die über Rochelle oder Rom stehende, stärker gepreßte Luft nicht nach Copenhagen hin, wo die Luft mindern Druck leidet, denn offenbar hindert die zwischenliegende Luft diese Wirkung; aber dennoch ist ein starker Westwind durch diese Ungleichheit des Druckes wohl erklärbar . . .“ Man wird im allgemeinen nicht umhin können, diesen und den sich anschließenden Sätzen mit v. Bezold zu entnehmen, daß Brandes zwar die Bewegung der Luft gegen den Ort tiefster Depression hin zutreffend erkannt, dieselbe aber als eine geradlinige angesprochen und sich demzufolge in einem immerhin irrtümlichen Geleise bewegt habe.[2] Fig. 1 würde seine Anschauung wiedergeben. Es verdient indessen Beachtung, daß bei der oben erwähnten Analyse des Wintersturmes vom Jahre 1783 ausdrücklich der Konkurrenz der Erdumdrehung gedacht und als deren Folge die Umwandlung eines reinen Südwindes in einen Südwestwind als unumgänglich bezeichnet wird. Man darf eben nicht vergessen, daß an irgend eine systematische Begründung der aus der Betrachtung der Karte abstrahierten einzelnen Tatsachen nicht gedacht ward. Will man also den Standpunkt des Werkes von 1820, welches die Keime zu einer neuen und

Fig. 1. Centripetale Windtheorie von Brandes.

[1] A. a. O., S. 68 ff.

[2] Vgl. Dove, Über barometrische Minima, Poggendorffs Ann. d. Phys. u. Chem., 13. Band (1828), S. 305 ff. Hier wird auf den Mangel der zentripetalen Theorie zutreffend hingewiesen.

bahnbrechenden Windtheorie in sich trug, in einer dem Gedankengange des Autors sich tunlichst treu anpassenden Weise zum Ausdruck bringen, so wird man sagen müssen:

Brandes setzte zwar in erster Linie die Bewegung der Luft gegen ein irgendwo entstandenes barometrisches Minimum als eine allseitig zentripetale voraus, ließ aber zugleich die Deviation dieser Radialbewegungen infolge der Rotation nicht ganz außer acht.

Er steht, ohne von diesem seinem Vorgänger Kenntnis zu haben, auf den Schultern Lamberts (s. o.) und ist sich über Punkt I ganz und gar im klaren. Aber auch Punkt II hat bereits eine gewisse Berücksichtigung gefunden, und es wäre nur nötig gewesen, daß ein theoretisch durchgebildeter Meteorologe Brandes' erfahrungsmäßig ermittelte Sätze gehörig durchgedacht und verallgemeinert hätte, um in den Besitz des barischen Windgesetzes zu gelangen.

Daß dies nicht geschah, mag wohl teilweise in der geringen Verbreitung des genannten Werkes seinen Grund gehabt haben, welches ja v. Bezold recht eigentlich wieder der Vergessenheit entreißen mußte. Es lag auch mit an Inhalt und Schreibart eben dieses Werkes, dem man wahrlich nicht das Prädikat eines leicht lesbaren erteilen kann. Vorzugsweise aber ist für das vollständige Zurücktreten einer so einfachen und verbesserungsfähigen Anschauung das Emporkommen der Doveschen Winddrehungslehre verantwortlich zu machen, welche das Interesse der Fachleute längere Zeit in einem selten erreichten Grade absorbierte und keine anderen Götter neben sich duldete. Ebenso wie v. Buch die Geologie, hat Dove die Meteorologie durch mehr denn dreißig Jahre geradezu für seine Ansichten zu monopolisieren gewußt.

Ein Schüler von Brandes, nach eigener Aussage aber besonders durch ein in Deutschland weniger verbreitetes Werk des englischen Physikers Daniell[1]) beeinflußt,[2]) war der junge

[1]) J. F. Daniell, Meteorological Essays, London 1823.

[2]) Dove, De barometri mutationibus, Berlin 1826, S. 26 ff. „Daniellum saepius vera vidisse, verisimillimum est."

Dove in seiner soeben zitierten Erstlingsarbeit keineswegs ein grundsätzlicher Gegner des Erstgenannten. Nachdem er im Sinne von Ramond und v. Buch (s. o.) von den Beziehungen zwischen thermischen und barischen Schwankungen in der Atmosphäre gehandelt hat, stellt er selber eine These auf, welche wörtliche Anklänge an den Brandesschen Lehrsatz erkennen läßt.[1] Allein die Hoffnung, durch Übertragung des nur für eine bestimmte Erdzone gültigen Hadleyschen Prinzipes auf die ganze Erdkugel ein allgemeingültiges Gesetz konstruieren zu können, scheint ihn zum Verzichte auf eine Vorstellung bewogen zu haben, die freilich nur ein ganz individualistisches Gepräge besaß und jenen großzügigen Plänen, mit denen sich eine gerade erst der naturphilosophischen Periode entwachsene Wissenschaft nur allzu gerne trug, viel zu wenig entgegenkam. Auch verstieße es gegen die Gerechtigkeit, wollte man nicht einräumen, daß das sogenannte Drehungsgesetz das Ergebnis einer ebenso scharfsinnigen, wie mühevollen Arbeit darstellt, ein Ergebnis zudem, welches nach Augustins[2] Überprüfung für ein sicherlich weit ausgedehntes, aber freilich nicht zusammenhängendes Gebiet Gültigkeit hat und zumal für jenen Teil Mitteleuropas, der zunächst in Frage kam, wegen der Lage der Depressionszugstraßen sehr viele Treffer aufweisen konnte. Wenn Dove dieser Überzeugung zuliebe seine ursprüngliche Meinung,[3] daß der Wirbelcharakter der Luftbewegung ein allgemeiner sei, aufgab[4]) und zwischen Wirbelstürmen

---

[1] Ebenda, S. 17 ff. „Minima mercurii altitudine uno loco exstat, venti fere semper ex ea regione spirant, ubi barometri altitudo major ... ita ut aër ab omnibus partibus in illud minimi pressus centrum fluere videatur."

[2] Augustin, Über die jährliche Periode der Richtung des Windes in Mittel- und Westeuropa, Meteorol. Zeitschr., 4. Band (1887), S. 401 ff. Vgl. auch: Satke, Die Drehung des Windes in der jährlichen Periode. Das Wetter, 4. Jahrgang, S. 34 ff.

[3] Dove, Einige meteorologische Untersuchungen über den Wind. Poggendorffs Ann., 11. Band (1827), S. 545 ff.

[4] Hierüber gibt u. a. Aufschluß van Bebber (a. a. O., 1. Bd., S. 281 ff.)

und gewöhnlichen Winden einen prinzipiellen Unterschied zu machen begann, so dürfen wir das unter dem Gesichtspunkte, der damals für ihn bestimmend war, kaum tadeln, und daß er sogar den wirklichen Stürmen zum Teil den zyklonalen Typus absprechen wollte, lag nur in der Richtung der neuen Ideen, zu welchen er sich durchgearbeitet hatte. Durfte er sich doch auch der begeisterten Zustimmung der überwiegenden Mehrzahl seiner Zeitgenossen erfreuen, deren namhaftester Systematiker sich in seinen Lehrbüchern[1]) unbedingt auf seine

Fig. 2. Doves Barometer auf der nördlichen Halbkugel.

Fig. 3. Doves Barometer auf der südlichen Halbkugel.

Seite stellte. Wir werden später noch kurz an die Kämpfe zu erinnern haben, unter denen die Meteorologie sich dem Zauber der inzwischen allzu schematisch gewordenen Doveschen Theorie entwand. Für jetzt sei nur festgestellt, daß in deren Sinne Fig. 2 und Fig. 3 den Gang des Barometers für die beiden Halbkugeln der Erde veranschaulichen.[2]) Es ist

[1]) Kämtz, Lehrbuch der Meteorologie, 1. Band, Halle a. S. 1831; Derselbe, Vorlesungen über Meteorologie, ebenda 1840. Im Geiste Doves stellt auch die Mechanik der atmosphärischen Bewegungen dar das in seiner Art ausgezeichnete, noch jetzt vielfach zu Rate gezogene Werk von E. Schmid (Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig 1860).

[2]) Zur Erläuterung der Zeichnungen mögen Doves eigene Worte Platz finden (a. a. O.). „Das Barometer fällt bei Ost-, Südost- und Süd-

nämlich auch nicht zu verschweigen, daß Dove selbst damals, als er eine Wirbelbewegung der Luft in der Nachbarschaft der Depressionszentren annahm, den dortigen tiefen Barometerstand nicht sowohl als Ursache, sondern nur als Folgeerscheinung des Wehens der Winde betrachtete. Deshalb haben wir kein Recht, ihn als den ersten zu feiern, der den dritten Hauptteil des barischen Windgesetzes in seiner kausalen Bedeutung erkannte, so ungemein nahe er auch dieser wichtigen Entdeckung gewesen ist.

Dieses Verdienst scheint vielmehr, was ebenfalls, wie es scheint, noch nicht wahrgenommen wurde, Muncke zuzugehören. „Die Erfahrungen,“ sagt derselbe,[1] „auf welche die älteren Physiker, zu denen namentlich auch Franklin[2]) gehört, sich stützten, würden die einander scheinbar widersprechenden Resultate nicht ergeben haben, wenn man dabei den Umstand nicht übersehen hätte, daß die Luftbewegung bei den Winden wohl niemals eine geradlinige ist, wie man annahm, sondern vielmehr eine drehende in engeren und weiteren Kreisen, woraus dann zugleich die Umkehrung der Windrichtung, namentlich bei heftigen Stürmen, sehr leicht erklärlich wird, sofern den nämlichen Ort zuerst die eine und später die entgegengesetzte Seite des fortschreitenden Wirbels trifft.... Aus diesen vereinten, zum Teil entgegengesetzt wirkenden Ursachen wird die so ausnehmend unstäte und bedeutend wechselnde Richtung der Windfahnen, das unaufhörliche Schwanken derselben, wie nicht minder der veränder-

---

winden, geht bei Südwest aus Fallen in Steigen über, steigt bei West- Nordwest- und Nordwinden und geht bei Nordost aus Steigen in Fallen über.“ So auf der nördlichen Hemisphäre; auf der südlichen treten die entsprechenden Umkehrungen ein, indem auf der ersteren der Wind im Drehsinne des Uhrzeigers und auf der letzteren gegen den Sinn des Uhrzeigers seine Umsetzung vollzieht.

[1]) Muncke, a. a. O., S. 1965.

[2]) Angespielt wird auf eine für die Existenz „negativer Winde“ eintretende Abhandlung B. Franklins (Meteorological Imaginations and Conjectures, Manchester 1777; deutsche Übersetzung gewisser Franklinscher Werke von Wenzel, 2. Teil, Dresden 1780, S. 104 ff.).

liche Barometerstand leicht erklärbar." Es wurden hier nur zwei besonders bezeichnende Sätze wiedergegeben; aber wenn man überhaupt den ganzen einschlägigen Abschnitt nachliest, so staunt man fast, einer Reihe ganz auffälliger Anklänge an die moderne Meteorologie zu begegnen. Man kann nicht umhin, darin die ganz unzweideutige Betonung des dritten Satzes zu erkennen, der im barischen Windgesetze als Teilwahrheit enthalten ist. Damit schließt sich folglich den von Lambert und Brandes in die atmosphärische Physik hineingetragenen Neuerungen als eine dritte die folgende an, deren Wesen sich in eine kurze These zusammendrängen läßt.

Die Tatsache, daß allen Ausgleichsbewegungen in den unteren Schichten des Luftmeeres ein zyklonaler Charakter beizulegen, zwischen den Wirbelstürmen der tropischen und den sanften Winden der gemäßigten Zone sonach bloß ein gradueller und kein prinzipieller Gegensatz anzunehmen sei, ist im Jahre 1842, als gerade Doves Herrschaft über die Geister ihrem Höhepunkte sich zu nähern anfing, von Muncke in Heidelberg unverhüllt und korrekt festgelegt worden.

Auf deutschem Boden war einstweilen für alle diese wichtigen Gesichtspunkte kein Erfolg zu erwarten; zwanzig Jahre sollten vergehen, ehe die ersten Auflehnungen gegen die Einseitigkeit der Umsetzungstheorie bemerkbar wurden. Das Ausland mußte das Seinige dazu tun, um eine Bresche in das regierende System zu legen, und das konnte um so eher geschehen, weil dort Doves Lehren zwar ebenfalls achtungsvoll aufgenommen, nicht aber zu beinahe dogmatischer Geltung gelangt waren. Und zwar begann die Reform nicht in der Alten Welt, sondern beinahe ausschließlich Amerika muß das Verdienst zugesprochen werden, die dynamische Meteorologie auf eine neue Grundlage gestellt zu haben. Buys Ballots Reform ist nicht denkbar ohne die Tätigkeit seiner Vorgänger in den Vereinigten Staaten und in Britisch-Nordamerika.

Der Chemiker R. Hare aus Philadelphia hat sich, während seine reiche literarische Tätigkeit hauptsächlich seinem eigentlichen Fache galt, nur mehr gelegentlich auch mit Fragen der Atmosphärologie beschäftigt[1]) und dabei allerdings noch die zentripetale Auffassung der normalen Windbewegung, so wie man sie Brandes (s. o.) beilegt, im Gegensatze zu dem Wirbeln der großen Drehstürme vertreten. Auch Espy stand,[2]) indem er sich von seinen Erfahrungen über die Fallrichtung der von Stürmen niedergeworfenen Bäume leiten ließ, auf dem Standpunkte, der Wind folge der Richtung des Gradienten. Es ist bekannt, daß er darin gar nicht so unrecht hatte; denn gerade dann, wenn die Energie eines sich rasch fortbewegenden Sturmfeldes eine recht bedeutende ist, wird der Winkel, den die Richtung der Windbahnen an der Vorderfront des Feldes mit der normalen Trajektorie des Isobarensystemes bildet, ein immer kleinerer, so daß geradezu die Allgemeingültigkeit des Buys Ballotschen Gesetzes in Frage gestellt erscheint.[3])

---

[1]) R. Hares hier in Betracht zu ziehende Arbeiten sind vor allem diese: Causes of the Tornado or Waterspouts, Transactions of the American Philosophical Society, 32. Band [1837], S. 153 ff.; Objections to Redfields Theory of Storms, ebenda, 42. Band [1842], S. 122 ff.; 43. Band [1842], S. 214 ff. Vgl. dazu van Bebbers Werk (a. a. O., 2. Band, S. 196).

[2]) J. Espy, Philosophy of Storms, London 1841; On Storms, Report of the British Association for the Advancement of Science, 1840. Vgl. van Bebber, a. a. O., 1. Band, S. 281; 2. Band, S. 196 ff.

[3]) Darauf, daß heftige Stürme eine solche Abweichung mit sich bringen, hat wohl zuerst W. v. Bezold aufmerksam gemacht (Über die Verteilung des Luftdruckes und der Temperatur während größerer Gewitter, Zeitschr. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol., 18. Band, S. 281 ff.). Daß die Anomalie bloß eine scheinbare ist, läßt sich an der Hand der Guldberg-Mohnschen Formeln leicht dartun (Günther, Die Mechanik der Gewitterfortpflanzung, Humboldt, 7. Jahrgang, S. 418). Allgemein erörterte die Fälle anscheinenden Versagens des barischen Windgesetzes Möller (Über Windrichtungen, welche vom Buys Ballotschen Gesetze abweichen, Zeitschr. d. österr. Gesellsch., 19. Band, S. 80 ff.), und einen weiteren Beitrag zu dieser Diskussion lieferte Lancaster (Discussion des observations faites d'orages en Belgique pendant l'année 1879, Brüssel 1885).

Jedenfalls aber hatten Hare und Espy dadurch einen wirklichen Fortschritt in die Wege geleitet, daß sie auf das Fortschreiten der Sturmzentren hinweisen. Noch mehr Material für die Richtigkeit dieser Ansicht wurde von dem New Yorker Redfield beigebracht, dessen ganzes Leben ausschließlich der Erforschung der Sturmgesetze gewidmet war.[1]) Indem er die noch bei Hare und Espy nicht abgestreifte Hinneigung zu fremdartigen Hypothesen, die Hereinziehung elektromagnetischer Faktoren in die Mechanik der Stürme gänzlich überwand, konnte er die Bewegungszustände in der Umgebung der fortrückenden Minima mehr als bisher klären, wobei er freilich insofern noch immer an der vollen Durchdringung des Geheimnisses sich gehindert sah, als er die rotatorische Bewegung der Luftteilchen nicht in spiraligen Kurven, sondern in Kreisen sich vollziehen ließ. Hierin traten ihm zwei andere Sturmforscher wesentlich bei: W. Reid,[2]) dem als lange Jahre

---

[1]) Aus dem Ertrage eines fast vier Jahrzehnte umfassenden schriftstellerischen Lebens seien die nachstehenden, keineswegs auf Vollständigkeit abzielenden Proben vermerkt: Remarks on the prevailing Storms at the Atlantic Coast of the North American States, Sillimans American Journal of Science, 20. Band (1831), S. 17 ff.; On the Hurricanes and Storms of the West Indies and the Coast of the United States, ebenda, 25. Band (1833), S. 311 ff.; On the Courses of Hurricanes, with Notices of the Typhoons of the China Sea and other Storms, ebenda, 35. Band (1839), S. 201 ff.; Notice of Dr. Hares' Objections to the Whirlwind Theory on the Laws of Storms, ebenda, 44. Band (1843), S. 384 ff.; On the three several Hurricanes of the American Seas, and their Relation to the Northern so called of the Gulf of Mexico, Sillimans New Journal etc., 1. Band (1846), S. 4 ff., 2. Band (1846) S. 333 ff.; On various Pacific Cyclones and Typhoons, ebenda, 24. Band (1857), S. 21 ff. Die Notwendigkeit einer durchgreifenden Revision des damals einigermaßen der Schablone verfallenen Systemes der Meteorologie hatte sich bei diesen auf ein hochwichtiges Spezialproblem gerichteten Studien Redfield sehr bestimmt aufgedrängt, wie sein 1850 der nordamerikanischen Naturforscherversammlung erstatteter Bericht beweist (On the apparent Necessity of revising the received Systems of Dynamical Meteorology). Einiger hier noch nicht aufgezählter Abhandlungen wird gleich nachher noch eigens Erwähnung zu tun sein.

[2]) W. Reid, An Attempt to develop the Laws of Storms, London

auf den Bermudas und Kleinen Antillen wohnenden Beamten eine ausgedehnte Sachkenntnis zur Seite stand, und Piddington,[1]) der zwar auch noch mit Peltier[2]) elektrische Kräfte für die Bildung der Wirbelstürme verantwortlich machen wollte, sich jedoch durch diese vorgefaßte Meinung nicht abhalten ließ, die zyklonale Bewegungsform gründlich zu untersuchen. Bei ihm kommt das seitdem so viel gebrauchte und erheblich verallgemeinerte Wort Zyklone erstmalig vor.

In seinen späteren Jahren hat Redfield, wie die damals entstandenen Arbeiten[3]) ersehen lassen, an seiner ursprünglichen Auffassung eine Korrektur angebracht, durch welche jene der in der Gegenwart obwaltenden wesentlich näher gebracht ward. Er ging nämlich von der reinen Kreisbahn ab und erklärte die Wege der um ein Depressionszentrum wirbelnden Teilchen für spiralförmig, was sie tatsächlich sind. In seinen Figuren allerdings trug er der neuerworbenen Erkenntnis keine Rechnung, sondern behielt die bequemere Kreislinie bei. Aber sachlich war ihm auch wahrscheinlich geworden, daß sich der Einfluß der Erdumdrehung auf den Drehsinn für beide Hemisphären der Erdkugel verschieden gestalten müsse. Ein weiterer Fortschritt, den man Redfield verdankt, besteht darin, daß er mehr und mehr den bisher aufrechterhaltenen Unterschied zwischen tropischen und gewöhnlichen Stürmen fallen ließ. In allen diesen Punkten traf Reid mit seinem Nachbarn in der Union der

---

1838 (auch ins Chinesische übersetzt); The Progreß and the Development of the Laws of Storms and Periodical Winds, ebenda 1849.

[1]) Piddington, The Sailors Horn-Book for the Law of Storms, New-York 1840; Guide du marin sur la loi des tempêtes (französische Bearbeitung), Paris 1869.

[2]) Über Peltiers Hypothese und verwandte Anschauungen orientiert am besten A. C. Becquerel (Traité de l'électricité et du magnétisme, 5. Band, Paris 1840, S. 164 ff.).

[3]) Redfield, Effects of the Earth's Rotation upon falling Bodies and upon the Atmosphere, Sillim. New Jornal, 3. Band (1847), S. 283 ff. On the Spirality of Motion in Whirlwinds, ebenda, 23. Band (1857) S. 23 ff.

Hauptsache nach zusammen. So war durch die transatlantischen Angelsachsen der Einblick in den Zusammenhang der atmosphärischen Bewegungen um ein gutes Stück vertieft worden,[1]) allein jenseits des Ozeanes kam man deshalb nicht so bald zu einer ganz zutreffenden Bewertung der amerikanischen Errungenschaften, weil sich Dove derselben ganz zu bemächtigen und sie mit seltenem Geschicke in seine eigene, bei näherem Zusehen doch auf ganz anderen Voraussetzungen aufgebaute Theorie der Stürme, die er in mehreren Schriften[2]) vertrat, zu verweben wußte. Im übrigen trat die Verquickung dynamisch-meteorologischer und elektrischer Hypothesen, die gerade in Amerika ihren Sitz hatte,[3]) der Verbreitung der gesunden, dort gefundenen Maximen hindernd in den Weg.

Sogar bei dem genialen Geophysiker Maury, dessen „Sailing Directions" eine neue Epoche der Schiffahrtskunde einleiteten, spielt noch der Gedanke, daß der Erdmagnetismus die Winde in ihrem Wechselspiele maßgebend beeinflusse, eine nachteilige Rolle. Was er darüber gedacht und gefunden, hat er in seinem Hauptwerke[4]) niedergelegt, und es zeigt sich,

---

[1]) Für die Einbürgerung der neuen amerikanischen Lehren leistete viel das treffliche Werk von Reye (Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre mit Berücksichtigung der Stürme in der Sonnenatmosphäre, Hannover 1872, 1880).

[2]) Dove, Über das Gesetz der Stürme Berlin 1857; Die Stürme der gemäßigten Zone, mit besonderer Berücksichtigung des Winters 1862—1863, ebenda 1863.

[3]) Einen charakteristischen Beleg für diese Behauptung erbringt u. a. das merkwürdige Werk eines Kapitäns Ch. Wilkes (Theory of the Winds, New York 1856). Zwar wird von der Grundvorstellung ausgegangen, daß Temperaturdifferenzen innerhalb der Lufthülle als die einzige Ursache anzusehen seien, welche den Wind hervorruft und ihm seine Richtung anweist, allein trotzdem muß auch die Elektrizität mitwirken, um die wirklich beobachteten Bewegungsformen erklären zu helfen, und damit ist natürlich eine einheitliche, mechanischen Grundregeln angepaßte Deutung der Vorgänge so gut wie unmöglich gemacht.

[4]) M. F. Maury, The Physical Geography of the Sea, New York 1855. An diesem Orte wird Bezug genommen auf Boettgers deutsche Ausgabe: Die physische Geographie des Meeres, Leipzig 1859.

daß dabei einerseits mancher der neueren Doktrinen über die allgemeine Luftzirkulation vorgegriffen, andererseits jedoch im großen und ganzen über das schon von Hadley (s. o.) erreichte Niveau nicht eigentlich hinausgegangen wird. Man könnte sagen, es seien nur dessen Festsetzungen über die Passate verallgemeinert worden. Manches, was Maury aus der Annahme eines unteren und oberen Luftstromes ableitet, so zumal die fünf „Kreuzungen“ am Äquator, an den beiden Wendekreisen und in der Nähe der Pole, hat sich nicht auf der wissenschaftlichen Tagesordnung zu erhalten vermocht. Die ablenkende Aktion der Erdumdrehung schien ihm wesentlich nur auf meridionale Windrichtungen beschränkt zu sein.

Weit über Maurys Konstruktionen, deren Schematismus denjenigen der Doveschen Winddrehungsregel noch hinter sich ließ, gehen die bereits ganz in modernem Fahrwasser sich bewegenden Bearbeitungen der Windgesetze, welche man den Amerikanern Coffin und Ferrel zu danken hat. Buys Ballot selbst hat auch in Erinnerung gebracht,[1]) daß Lloyd in Dublin bereits 1854 eine Teilwahrheit des allgemeinen Gesetzes ermittelt habe; man darf diese Erkenntnis, daß nämlich auf der Nordhalbkugel das Depressionszentrum zur Linken der Windrichtung gelegen sei, aber wohl schon auf das Jahr 1849 zurückdatieren.[2]) Selbstverständlich handelte es sich aber damals noch um einen Sonderfall, insofern die Windverhältnisse der Insel Irland in Betracht kamen. Auch Coffin hatte einstweilen nur die Zustände der Atmosphäre über Nordamerika im Auge,[3]) allein da man es in diesem Falle mit einer ungeheueren Landfläche zu tun hatte, so näherte sich die ge-

[1]) Buys Ballot, Schreiben an J. Hann, Zeitschr. d. österr. Gesellschaft f. Meteorologie, 12. Band (1885), S. 95.

[2]) H. Lloyd, Notes on the Meteorology of Ireland, Transactions of the Irish Academy of Sciences, 22. Band (1855), S. 284 ff.

[3]) J. Coffin, On the Winds of the Northern Hemisphere, Silliman New Journal, 6. Band (1848), S. 398 ff.; On the Currents of the Atmosphere, Proceed. of the Amer. Assoc., 1858, S. 200 ff.; On the Winds of the Southern Hemisphere, ebenda, 1859, S. 284 ff.

machte Wahrnehmung doch weit mehr der Einsicht in eine mehr durchgreifende Gesetzlichkeit. Nicht weniger als 107 genaue Beobachtungsreihen, die sich zum guten Teile auf den lange unerschlossenen Westen des Kontinentes erstreckten, war er für seine Vergleichung auszunützen in der Lage, und indem er aus den Einzelrichtungen nach Lamberts bekannter Vorschrift[1]) einen Durchschnitt bildete, berechnete er den Winkel, den diese mittlere Windrichtung mit der nach Süden gehenden Mittagslinie einschließt, d. h. also das mittlere Azimut, zu angenähert 86°. Die ungleichmäßige Verteilung der Temperatur erzeugt, wie er feststellt, auch eine ebensolche Verteilung des Luftdruckes, und indem diese Ungleichheiten sich auszugleichen bestrebt sind, kommt unter der konkurrierenden Einwirkung der Erdumdrehung jener Westwind zustande. Die von Coffin formulierte These würde in deutscher Übertragung den folgenden Wortlaut haben:

Ein Wind der Nordhalbkugel hat stets das Gebiet schwächsten Druckes zu seiner Linken und das Gebiet stärksten Druckes zu seiner Rechten, während auf der Südhalbkugel die Dinge sich umgekehrt verhalten. Es scheint von diesem Gesetze keine Ausnahme zu geben.

Man sieht, daß Coffin die Luftbewegungen Nordamerikas sofort als normativ auf diejenigen der Gesamterde übertragen hat. In dieser großartigen Konzeption liegt offenbar ein hoher Vorzug, dessen man nur, weil Europa nicht unmittelbar in Betracht gezogen war, bei uns nicht rechtzeitig inne geworden ist. Was der amerikanische Astronom auf statistischem Wege erreichte, das strebte sein Landsmann Ferrel[2]) auf dem

---

[1]) Lambert, Sur les observations du vent, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1777, S. 26 ff.; Pernter, Die Lambertsche Formel, Meteor. Zeitschr., 8. Band (1891), S. 193 ff.

[2]) S. Ferrel, An Essay on the Winds and the Currents of the Ocean, Nashville Journal, 11. Band, Nr. 4 und 5; The Motion of Fluids and Solids relative to the Earth's Surface, New York 1859/60. Die ersterwähnte, bahnbrechende Abhandlung wurde neu aufgelegt in einem

theoretischen an, indem er von den Fundamentalgleichungen der Bewegung seinen Ausgang nahm. Man hat wohl ein Recht, zu sagen, daß auch Dove und Maury (s. o.) das Bild einer die Gesamterde umspannenden atmosphärischen Zirkulationsbewegung zu zeichnen versucht hatten, aber ihre Bemühungen waren nicht von wirklichem Erfolge gekrönt. Anders bei Ferrel, dessen Hauptsatz, daß den Parallelkreisen von $\pm 35^{0}$ eine Häufung der Luftmasse entsprechen müsse, während von dort aus pol- und äquatorwärts eine Einsenkung auftrete, durch die mit den modernsten Hilfsmitteln geführte Untersuchung Sprungs[1]) bestätigt wurde. Durch Ferrel und seinen viel zu wenig beachteten Konkurrenten James Thomson[2]) ist das vorher allzu schematisch angegriffene Zirkulationsproblem seiner Lösung zugeführt worden. Für uns jedoch, die wir hier gerade die örtlichen Bewegungen zu betrachten verpflichtet sind, steht von Ferrels Forschungsresultaten ein anderes oben an. Was kurz vorher Foucault durch seinen berühmt gewordenen Pendelversuch ermittelt hatte,[3]) das konnte der amerikanische Mathematiker als ein durchgehendes Naturgesetz erweisen:

Jedwede nicht dem Äquator folgende Horizontal-

Sammelwerke: Popular Essays on the Movements of the Atmosphere Washington 1882 (Professional Papers of the Signal Office, Nr. 12).

[1]) Sprung, William Ferrels Untersuchungen über atmosphärische Wirbel, Zeitschr. d. österr. Gesellschaft f. Meteorol., 17. Band S. 161 ff., S. 276 ff. Eine gute Übersicht gewährt auch ein Aufsatz von Pernter (Die allgemeine Zirkulation der Erdatmosphäre, Das Wetter 1890, S. 11 ff., S. 168 ff.).

[2]) J. Thomson, On the Grand Currents of the Atmospheric Circulation, Report of the British Association for the Advancement of Sciences, 1857, S. 38 ff. Man hatte dieses bedeutsame Dokument der meteorologischen Entwicklungsgeschichte ganz aus dem Auge verloren, als G. H. Darwin es wieder unverdientem Dunkel entriß (Opening Addreß of the Section A of the British Association, Nature, 34. Band S. 420 ff.).

[3]) Foucault, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule, Compt. Rend. de l'Acad. Française, 32. Band (1851), S. 138 ff.

bewegung, also keineswegs bloß die in meridionaler Richtung vor sich gehende, wird durch die Erdrotation mit einem Impulse abgelenkt, der nur von der geographischen Breite abhängig ist.

Seit Ferrels genereller Durcharbeitung des Ablenkungsgesetzes weiß man, daß mit sehr großer Annäherung — die genaue Formel muß allerdings auch auf das Anfangsazimut Rücksicht nehmen[1]) — jener Impuls dem Sinus der Polhöhe proportional ist.[2]) Auch die spiralige Natur der Windbahnen im zyklonalen Felde wurde aufs neue hervorgehoben. Nur in einem wichtigen Punkte blieb Ferrel noch hinter der bei anderen bereits nachweisbaren Erfassung der Wirklichkeit zurück; er konnte sich noch nicht von dem Irrtum frei machen, daß ein Zyklonengebiet allseitig von einem Bezirke entgegengesetzt gearteter Luftbewegung umschlossen sein müsse.

Nach dieser Seite hin hat, völlig unbeeinflußt von den ihm noch ganz unbekannt gebliebenen Arbeiten Buys Ballots, der Engländer Galton Wandel geschafft, indem er seine Aufgabe darin erblickte, die Wechselbeziehungen zwischen Maximum und Minimum aufzuklären. Man solle, so urteilte er mit Recht, nicht bloß die horizontale Bewegungskomponente berücksichtigen, die ja allerdings aus den Isobarenkarten allein entnommen werden könne,[3]) sondern auch die

---

[1]) Dies beweist Finger (Über den Einfluß der Erdrotation auf parallel zur sphäroidischen Erdoberfläche in beliebigen Bahnen vor sich gehende Bewegungen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Math.-Phys. Kl., 76. Band, S. 67 ff.).

[2]) Den ganzen Fragenzyklus, welcher mit den beiden hier genannten Problemen untrennbar verknüpft ist, sucht unter einem vereinigenden Gesichtspunkte abzuhandeln eine frühere Abhandlung (Günther, Die sichtbaren und fühlbaren Wirkungen der Erdrotation, Humboldt I. Jahrgang, S. 328 ff., S. 359 ff.).

[3]) Immerhin hat auch gerade aus den die Druckverteilung darstellenden Karten Stevenson die umgekehrte Proportionalität der beiden Größen Windstärke und Gradientenlänge herausgelesen, das notwendige Korrelat des Buys Ballotschen Gesetzes. Die Zusammengehörigkeit dieser Sätze bespricht A. Supan (Statistik der unteren Luftströmungen, Leipzig 1881, S. 3 ff.).

vertikalen Strömungen als gleichberechtigt anerkennen.[1]) Hier stoßen wir zuerst auf den Hinweis, daß die barometrische Elevation von absteigenden, die barometrische Depression von aufsteigenden Bewegungen umgeben sei, daß jedoch eben diese stetig ineinander übergehen müßten. Galton ist, möchte man sagen, für die Antizyklonen das geworden, was Buys Ballot für die Zyklonen bedeutet. Mit Nachdruck betont er, daß die vom Maximum ausstrahlenden Luftbahnen sofort scharf nach rechts (auf unserer Halbkugel) umbiegen, um sodann in den Weg gegen das Minimum hin überzugehen. In Fig. 4 ist die entsprechende Zeichnung zu sehen. Reproduzieren wir den etwas umständlich eingekleideten Satz, in welchem Galton das Fazit seiner Beobachtungen zieht, in unserer Sprache, so können wir dies in folgender Weise tun:

Fig. 4.

Jedesmal dann, wenn die Verteilung des Luftdruckes wohl umschriebene Bereiche von barometrischem Hoch- und Tiefstande hervortreten läßt, deren mittlere Entfernung nicht über etwa 2400 km hinausgeht, bewegt sich die Luft vom Maximum zum Minimum derart, daß die Verbindungslinie beider Punkte unter Winkeln von beiläufig 45° geschnitten wird.

Fig. 5 stellt uns Galtons Originaldiagramm vor Augen, und es ist einleuchtend, daß in ihm der Gegensatz von zyklonaler und antizyklonaler Bewegung zu klarem Ausdrucke gelangt, indem nur das Einströmen in das Minimum, welches ja in Wahrheit einen asymptotischen Punkt bildet, nicht ganz mit den Tatsachen sich deckt. Mag auch

Fig. 5. Highbarom. Low barom.
Galton's dispersion and indraught.

[1]) F. Galton, A Development of the Theory of Cyclones. Proceedings of the Royal Society, 12. Band (1863), S. 385 ff.

jene durchsichtige Formulierung vermißt werden, in welcher eines der Hauptverdienste Buys Ballots zu suchen ist, so läßt sich doch sicherlich nicht in Abrede stellen, daß der eigentlich springende Punkt auch hier getroffen ist. Und fast unbegreiflich erscheint, daß bisher die Leistung Galtons so gut wie ganz[1]) der Vergessenheit hat verfallen können.

Aus der Zeit nach Brandes (s. o.) konnte von deutschen Leistungen auf dem von uns betrachteten Gebiete nichts berichtet werden, weil eben Doves Suprematie gerade in unserem Vaterlande kaum je angefochten ward. Gleichwohl fehlt es durchaus nicht ganz an hierher gehörigen Versuchen, abseits des sozusagen offiziellen Weges die meteorologische Dynamik zu fördern; aber es ist ein charakteristisches Zeichen für die damalige Zeit, daß man sich fast gar nicht um diese achtungswerten Bestrebungen kümmerte, weil sie den Stempel der Anerkennung des Meisters nicht trugen. Um so mehr besteht für uns die Pflicht, diesen so ganz wenig bekannten Stadien des Erkenntnisfortschrittes gerecht zu werden.

Ein deutscher Physiker, dessen Arbeiten sich überhaupt durch ihre Selbständigkeit auszeichnen, hatte die Frage aufgeworfen,[2]) ob bei der barometrischen Höhenmessung auch die Windrichtung einen Einfluß äußern könne; Beobachtungen wurden zur Beantwortung dieser Frage systematisch in Clausthal, Halberstadt und Magdeburg angestellt. Ein paar Jahre später nahm Dippe in Schwerin die Untersuchung von neuem auf[3]) und führte sie nach einer scharf-

[1]) Nur gestreift wird Name und Wirksamkeit des Mannes in dem gründlichen Werke van Bebbers (1. Band, S. 386); indessen wird dort nicht die oben angeführte Abhandlung, sondern ein etwas später publiziertes Werk zitiert, nämlich Galtons Ausgabe des „Weather Book" des Admirals Fitzroy (London 1861).

[2]) G. A. Erman, Über einige barometrische Beobachtungen und die Folgerungen, zu denen sie veranlaßten. Poggendorffs Ann. d. Phys. u. Chem., 88. Band (1853), S. 260 ff.

[3]) M. C. Dippe, Die Ungleichheiten des Barometerstandes an benachbarten, in gleicher Höhe über dem Meere gelegenen Stationen, und

sinnig erdachten Methode durch. Die drei Orte, welche er der Vergleichung unterstellte, waren die mecklenburgischen Städte Wustrow, Schönberg und Schwerin, für welche er bezüglich aus dreijährigen Aufzeichnungen die barometrischen Mittel gleich 336,66 resp. 336,60 und 335,31 Pariser Linien gefunden hatte. Natürlich werden diese Werte, eben weil sie einen Durchschnitt darstellen, nur gelegentlich erreicht; in einem beliebigen konkreten Falle sind die abgelesenen Barometerstände davon etwas verschieden. Sie seien b_1, b_2, b_3. Nunmehr werden die sich ergebenden Differenzen

$$b_1 - b_2,\ b_1 - b_3;\ b_2 - b_1,\ b_2 - b_3;\ b_3 - b_1,\ b_3 - b_2$$

zu den an den drei Normalorten beobachteten Windrichtungen in Beziehung gesetzt, wobei die Besselsche Formel[2]) ihre Dienste zu leisten hat. Aus den Rechnungen zieht Dippe zwei resultierende Sätze ab:

„I. Der Barometerstand an einer Station A ist im Vergleiche mit dem Barometerstande an einer anderen Station B nicht dann am höchsten, wenn der Wind von A nach B hinweht, sondern wenn die Richtung des Windes mit der Verbindungslinie AB der Stationen einen mehr oder minder beträchtlichen Winkel bildet."

„II. Die Richtung des Windes, bei welcher der Barometerstand an der ersten Station ein relatives Maximum ist, weicht in allen Fällen ohne Ausnahme von der Verbindungslinie der Stationen in demselben Sinne ab, und zwar in dem Sinne des Doveschen Drehungsgesetzes oder in dem Sinne der täglichen Bewegung der Sonne."

Damit ist offenbar das Wesen der Luftbewegung in der Nähe des Maximums ganz im Einklange mit dem barischen Windgesetze, von dessen schüchternem Auftreten Dippe noch gar keine Kenntnis besaß, allgemein festgestellt. Daß die

Abhängigkeit dieser Ungleichheiten von der Richtung und Stärke des Windes, Beiträge zur Statistik Mecklenburgs, 2. Bd., 2. Teil, Rostock 1861.

[2]) Bessel, Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung, Astronom. Nachrichten, 6. Band, Sp. 333 ff.

Übereinstimmung des Drehsinnes einer Antizyklone mit demjenigen der Doveschen Drehungsregel nur eine ganz äußerliche ist, tut weiter nichts zur Sache; damals suchte ja jedermann ein neues Forschungsergebnis der herrschenden Doktrin anzupassen. Die Größe des von ihm ermittelten Ablenkungswinkels bringt Dippe ganz richtig in Verbindung mit der Energie des betreffenden Windes; je nach der Windstärke fanden sich die Winkelwerte gleich 59° 6′, 65° 18′ und 61° 54′. Ermans (s. o.) Bestimmungen des vom Harzgebirge gegen das angrenzende Flachland wehenden Windes kommen auf ähnliche Zahlen hinaus.

Man kann sonach mit Hellmann[1]) es aussprechen, bei Dippe seien die „ersten Andeutungen über den Zusammenhang zwischen Windstärke und barischem Gradienten" nachzuweisen. Allein wichtiger ist vielleicht noch seine exakte Analyse der Antizyklonalbewegung. Und vor allem ist bemerkenswert, festzustellen, durch Beschreitung welchen Weges der mecklenburgische Mathematiker sich der Entdeckung des wahren Sachverhaltes so augenfällig genähert hat. Ihn leiteten nicht theoretische Überlegungen aprioristischer Natur; er las nicht aus einer Fülle statistischer Daten eine Regel heraus, sondern indem er sich mit einer bestimmt umschriebenen Aufgabe befaßte, führte ihn die zielbewußte Anwendung jenes machtvollen Rechnungsinstrumentes, welches uns Fourier und Bessel durch die Entwicklung nach trigonometrischen Reihen überliefert haben,[2]) zu einer — an sich ganz ungesuchten — Ermittlung der Größe des Winkels, welche die Windbahnen mit der zentripetalen Richtung einschließen.

Dippes Anregung blieb lange verschollen, weil sie an schwer zugänglichem Orte erschienen war und wegen des Titels der Untersuchung leicht übersehen werden konnte. Sie hätte jedoch, wäre sie konsequent verfolgt worden, ihrerseits unbedingt zu einer selbst-

[1]) Hellmann, Report. d. d. Meteorol., S. 971.

[2]) Vgl. hiezu Ad. Schmidt, Über die Verwendung trigonometrischer Reihen in der Meteorologie, Gotha 1894.

ständigen, von den Methoden aller anderen Forscher unabhängigen Begründung des zugrunde liegenden Gesetzes hinführen müssen.

Um die Zeit, als Galton und Dippe dem alten Fundamentalprobleme der dynamischen Meteorologie noch unbekannte Seiten abgewannen, war Buys Ballot in rastlosem, gleichmäßig konsequentem, aber von Vorgängern und Zeitgenossen wenig beeinflußtem Studiengange mit dem Naturgesetze ins reine gekommen, welches zwei Jahrzehnte später, seinen Namen tragend, zu einer der festesten Grundlagen der meteorologischen Wissenschaft ausgestaltet werden sollte. Da die vorliegende Studie auch den Zweck einer vollständigen Aufklärung über die Prioritätsfrage vor sich hat, so wird es als eine Notwendigkeit zu erachten sein, daß auch der Werdegang des Gesetzes in seiner normativen Ausdrucksform von den Anfängen an dargelegt werde. Denn so wenig daran gezweifelt werden kann, daß es das höchste Interesse gewährt, das Auftauchen eines neuen Gedankens zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten kritisch zu prüfen, so bleibt es doch bei der alten, von der Geschichte aller Wissenschaften einmütig angenommenen Tatsache, daß nur der als der wahre Erfinder oder Entdecker angesehen werden kann, dem der volle **Wert des** von ihm gemachten Fundes zum **klaren Bewußtsein** gekommen ist.

Als Mathematiker, Physiker und Geologe tätig hatte der holländische Gelehrte (1817—1890) erst verhältnismäßig spät die Beziehungen zu der Disziplin gefunden, in welcher er unsterblich werden sollte. Eine Durchmusterung ozeanographischer Nachrichten hat ihn zuerst zu eingehenderer Beschäftigung mit den Winden veranlaßt,[1]) nachdem er einige Jahre zuvor auf der „Sonnenborgh" bei Utrecht mit der Anstellung regelmäßiger Witterungsbeobachtungen begonnen hatte. Von Anfang an war er sich eines gewissen Gegensatzes gegen Doves

[1]) Buys Ballot, Uitkomsten van Wetenskap en Erfaring aangaande Winden en Zeestromingen in eenige Gedeelten van den Oceaan, Utrecht 1851.

bewußt,[1]) wogegen ihm die von Brandes inaugurierte, aber leider nicht ausgebaute synoptische Methode (s. o.) den Schlüssel für die Ergründung der die scheinbare Anarchie der Luftbewegungen durchdringenden Gesetzmäßigkeit darzubieten schien. Dreißigjährige Aufzeichnungen, die in Holland gemacht worden waren, ließen bei ihrer Durchmusterung kein so entschiedenes Überwiegen der Windumsetzung mit dem Uhrzeiger in die Erscheinung treten, wie es nach der Doveschen Regel hätte erwartet werden müssen, und so drängte sich die Durchführung eines Verfahrens ganz von selber auf, welches die Beurteilung des Zutreffens oder Versagens jenes angeblichen Gesetzes ganz wesentlich erleichtern mußte. Das Jahr 1854 brachte die erste einschlägige Note,[1]) in welcher eine neue Art meteorologischer Graphik in Vorschlag gebracht wurde.

Es wurden von dem Gebiete, dem die synoptische Unter-

---

[1]) Damit ist wohl in Einklang zu bringen, daß Buys Ballot in einer seiner frühesten Arbeiten (Einiges über das Dovesche Drehungsgesetz, Ann. d. Phys. u. Chem., 60. Band [1846], S. 447 ff., S. 553 ff.) sehr fleißig Belege für die Richtigkeit der Doveschen Theorie zusammengetragen hatte. An und für sich hätte ja sein synoptisches Verfahren zu deren Bekräftigung, wenn sie nur eben richtig wäre, sehr viel beitragen können. Er selbst schreibt (Zeitschr. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol., 12. Band [1885], S. 95) darüber an Hann: „Meine Regel hat mir die Gunst meines hohen Gönners Dove gekostet. Er hatte mich eben den besten Verteidiger seines Gesetzes von der Drehung genannt, wie ich denn auch in Pogg. Ann. die ausführlichsten Belege dafür gegeben hatte, und nun mußte ich gerade das Umgekehrte beweisen." Eine anscheinend niemals zitierte, die anfängliche Abhängigkeit des holländischen von dem deutschen Meteorologen besonders klar erhellende Stelle sei hier noch angeführt. In einer Besprechung der Bestrebungen J. v. Lamonts, die alten Peißenberger Beobachtungen für die Wissenschaft nutzbar zu machen, sagt Buys Ballot (Bemerkungen zu den Ergebnissen aus den Hohenpeißenberger Beobachtungen, Ann. d. Phys. und Chem., 67. Band [1852], S. 547): „Der Strom, welcher von den Äquatorgegenden die Wärmeänderungen bringt, kann nicht direkt dahin gelangen; er streicht über den Hohenpeißenberg fort." Letzterer würde also, falls diese krasse Auslegung der Doveschen Ansicht berechtigt wäre, unter allen Umständen im Windschatten der Alpen liegen.

suchung gelten sollte, zwei Kärtchen gezeichnet, wie sie Fig. 6 und 7 veranschaulichen. Die erste dient lediglich zum Vergleichen, so daß also, wer mit Fig. 7 zu operieren hat, in Fig. 6 sich dafür den geographischen Schlüssel holen muß.[1] Die den Ortszeichen beigesetzten kleinen Pfeile versinnlichen die Windrichtungen, indem zugleich eine Pfeilkrümmung auf Windwechsel hinweist. Horizontal- und Vertikalstrichelung deutet an, daß die augenblickliche Ortstemperatur unter- oder oberhalb des Mittels liegt. So gewinnt man also eine rasche und bequeme Übersicht über die Wind- und Wärmeverteilung

Fig. 6.
Buys Ballots Orientierungskarte.

Fig. 7. Buys Ballots Wetterkarte für den 30. Oktober 1852.

innerhalb eines gewissen Landstriches. Buys Ballot war der Meinung, es müsse, wenn von allen Teilen der Erde her solche Orientierungskarten einer mit deren Verarbeitung betrauten Zentralstelle geschickt würden, eine rasche Übersicht über die ganze Witterungslage und auch eine gewisse Vorausbestimmung künftiger Zustände ermöglicht werden. Darin täuschte er sich nicht, und vor allem kam sein synoptisches Verfahren der Theorie der Luftbewegungen selbst zugute.

[1] Buys Ballot, Erläuterung einer graphischen Methode zur gleichzeitigen Darstellung der Witterungserscheinungen an vielen Orten. Poggend. Ann. d. Phys. u. Chem., 4 Erg. Bd. (1854), S. 559 ff.

Denn wenn man nunmehr in jedem Einzelfalle zu ermitteln in den Stand gesetzt wurde, woher der Wind kommt und wohin er geht, so ließ sich auch am ersten eine hier allenfalls obwaltende Gesetzmäßigkeit erkennen — zuerst offenbar auf ganz empirischem Wege und vorbehaltlich späterer deduktiver Bestätigung der gewonnenen Erfahrungssätze. So wie Buys Ballot (a. a. O.) zuerst die Grundwahrheit ausspricht, ist die Formulierung derjenigen, die wir (s. o.) bei Lambert antrafen, noch in nichts überlegen. „Wenn ich", so sind seine Worte, „mehr Luftdruck habe als mir zukommt, so gibt es an anderen Orten andere, welche einen zu geringen Luftdruck haben; es wird also von hier, wo ich mich befinde, Luft zu den anderen Orten hinfließen — oder im entgegengesetzten Falle wird Luft zu mir herströmen". Etwas grundsätzlich Neues war, wie der Leser dieser Abhandlung weiß, hiemit in keiner Weise ausgesprochen; aber der niederländische Forscher begnügte sich auch nicht mit seinem vorläufigen Ergebnis, sondern bediente sich in einer weiteren Arbeit[1]) desselben nur zur Anknüpfung weiterer Schlüsse. Die in Utrecht und Helder angestellten Barometerbeobachtungen belehrten ihn, daß die Windstärke mit der barometrischen Differenz zwischen Maximum und Minimum zu- und abnimmt. Aber erst nach und nach verstand er sich dazu, der von Redfield schon zehn Jahre früher zutreffend betonten Mitwirkung der Erdumdrehung gebührend Rechnung zu tragen. Nach dieser Seite hin kennzeichnet einen Markstein der Entwicklung eine Stelle in einem 1857 publizierten Aufsatze,[2]) die in deutscher Einkleidung, wie folgt, lautet: „Der herankommende Wind wird" — auf der Nordhalbkugel — „das Zentrum der Depression zur Linken haben ..." Eine andere,

[1]) Buys Ballot, Note sur le rapport de l'intensité et de la direction du vent avec les écarts simultanés du baromètre, Compt. Rend. de l'Acad. Franç., 1857, II, S. 765 ff.

[2]) Buys Ballot, Beiträge zur Vorhersage von Witterungserscheinungen, (Donders) Holländ. Arch. f. Natur- und Heilkunde, 3. Band (1863) S. 85 ff.

seitdem den Meteorologen besonders geläufige Abänderung dieser Formulierung ist diese: „Der Wind wird, wenn man die linke Körperseite dem Orte niedrigsten Barometerstandes zugewendet hat, gegen den Rücken hin wehen.“ Verfolgt man die Windrichtungen in der Nähe der Depression, so folgt aus den bisher gewonnenen Einsichten eine neue: Das Minimum ist zugleich Mittelpunkt einer Wirbelbewegung der Luft, welche auf unserer Hemisphäre einen dem des Uhrzeigers entgegengesetzt gerichteten Drehsinn aufweist.

Der erste Impuls, so wird im Einklange mit Lambert und Brandes ausgeführt, ist gegen den Ort schwächsten Druckes gerichtet; es findet eine Art von Anziehung gegen dieses Zentrum hin statt. Aber zugleich werden die von Norden kommenden Luftteilchen durch die Erdbewegung gegen Westen abgelenkt und zunächst in eine Nordnordost-, später in eine Nordostrichtung u. s. w. gebracht, während ebenso die von Süden her sich nähernden Partikeln folgeweise eine Südsüdwest-, Südwestrichtung u. s. w. einschlagen müssen. So ereignet sich hier nach Buys Ballot im kleinen etwas der Planetenbewegung Ähnliches, denn auch diese Himmelskörper beschreiben ja ihre Zentralbahnen unter dem gleichzeitig wirkenden Antriebe einer zentripetal und einer tangential wirkenden Kraft.[1]) Man sieht, daß bei der Ziehung dieses Vergleiches sich die an der Wetterkarte gemachten Erfahrungen und rein theoretische Überlegungen Buys Ballots zu gegenseitiger Ergänzung die Hand reichen.

Die qualitative und quantitative Seite des Rotationsimpulses wird in der Hauptsache völlig im Geiste Doves abgeschätzt. Unter t den Ort des barometrischen Minimums, unter n und s je einen rein polaren und einen rein äquatorialen Wind ver-

[1]) Obwohl dieser Vergleich, wie das so oft der Fall, etwas hinkt, insofern eine eigentlich tangentiale Kraft nicht vorhanden ist, so charakterisiert derselbe doch eine klare Auffassung des Bewegungsvorganges, der aus der Koexistenz zweier stetig wirkenden Impulse entspringt. Und darin liegt eben das auszeichnende Merkmal der neuen gegenüber der Doveschen Theorie.

stehend, spricht er es als seine Überzeugung aus, „daß im allgemeinen die Teilchen von *s* sich östlich von *t* und jenen von *n* sich westlich von *t* vorüberbewegen, daß die Bahnen der letzteren westlich von den Bahnen der ersteren liegen,

Fig. 8.

und die gesamte Luftmasse in einer dem Zeiger der Uhr entgegengesetzten Richtung, d. i. auch entgegengesetzt der Bewegung der Sonne sich drehen wird. Der sich daraus ergebende Wind wird bald und vorzüglich in der Nähe des tiefsten

Ortes t nicht mehr gegen diesen Ort (t) hin gerichtet sein, sondern nahezu lotrecht auf die Verbindungslinie mit demselben, so daß derselbe (t) zur linken Hand bleibt". Die von **Buys Ballot** zur Erläuterung beigegebenen Figuren sind hier, teilweise vervollständigt, wiedergegeben (Fig. 8 und 9). Der Punkt t ist, was ja in Wirklichkeit nicht ganz zutrifft, stabil vorausgesetzt; n_1, n_2, n_3, n_4 etc. sind die konsekutiven Örter

Fig. 9.

eines nördlichen Luftteilchens n und ebenso s_1, s_2, s_3, s_4 etc. diejenigen eines südlichen Luftteilchens s. Man ersieht, wie n, durch Konkurrenz der zwei Bewegungsimpulse a_1 und b_1 an den Ort n_2, s_1 ebenso an den Ort s_2 gelangt, und allgemein führen die Antriebe a_i und b_i das Teilchen resp. nach n_i und s_i ($i = 1, 2, 3, 4$ etc.).

Zwar liegt dieser Konstruktion noch insofern eine irrige Einschätzung der Deviation zu grunde, als eine solche für rein

west-östliche Bewegungen nicht zugelassen wird, während doch tatsächlich (s. o.) das Anfangsazimut gar keine Rolle spielt; allein im Endeffekte tut dieser der Doveschen Theorie von Anfang an anhaftende Fehler nichts zur Sache, und die Spiralbewegung im Depressionsfelde findet sich mit vollkommener Deutlichkeit ausgesprochen.

Wenn Buys Ballot seinen Lehrsatz nicht in einzelnen Etappen, sondern sofort mit derjenigen Bestimmtheit der Welt übergeben hätte, zu welcher er sich selbst erst allmählich durchrang, so würde es nicht ein volles Jahrzehnt angedauert haben, bis sich der Sieg des neuen Gedankens der herrschenden Lehre gegenüber durchsetzte. Gewöhnlich wird als diejenige Publikation, welche einen gewissen Abschluß herbeigeführt hat, jene Abhandlung namhaft gemacht, in welcher der Gebrauch des neuen Sturmwarnungsapparates auseinandergesetzt wird,[1]) der ja recht eigentlich die reife Frucht des neuen Prinzipes darstellte. Tatsächlich jedoch ist die entscheidende Bekanntmachung, was hie und da übersehen ward, bereits früher erfolgt,[2]) und mit Rücksicht hierauf muß die für die Prioritätsuntersuchung nicht unwichtige chronologische Feststellung platzgreifen:

Die erste allgemeinere, nicht bloß Einzelfälle beachtende Formulierung des Buys Ballotschen Gesetzes gehört schon dem Jahre 1860 an.

Nachdem einmal diese Erkenntnis, zunächst freilich nur in engeren Kreisen, sich Bahn gebrochen hatte, konnte es

---

[1]) Buys Ballot, Das Aëroklinoskop und Regeln, mittelst desselben die bevorstehenden Änderungen des Windes mit einiger Wahrscheinlichkeit vorherzusehen, übersetzt von Jelinek, Zeitschr. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol., 3. Band (1868), S. 451 ff.

[2]) Buys Ballot, Eenige regeln voor te wachten van weersveranderingen in Nederland, Utrecht 1860. Daß dieses Schriftchen als die eigentliche Geburtsstätte des bis dahin nur erst in Umrissen und in etwas schattenhafter Form bekanntgegebenen barischen Windgesetzes anzusehen sei, finden wir auch hervorgehoben bei Poggendorff (Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 3. Band, 1. Abteilung, Sp. 222).

nicht fehlen, daß alle Luftbewegungen, die regelmäßigen Windsysteme der niedrigen Breiten sowohl als auch die unperiodisch wehenden Winde von den Drehstürmen der Tropenzone bis zu dem sanften West der gemäßigten Regionen, als mit dem neuen Gesetze bestens vereinbar auf dieses ursächlich zurückgeführt wurden. Das durch die Figuren 10a und 10b verdeutlichte Originaldiagramm Buys Ballots gab den Schlüssel für alle Vorkommnisse an die Hand, und im Verlaufe von wenig über zehn Jahren war der Sieg der individualistischen

Fig. 10a. Fig. 10 b.

über die schematische Betrachtung der sich nahe dem Grunde des Luftmeeres abspielenden Vorgänge entschieden.[1]) Welches

[1]) Daß eine so machtvolle Persönlichkeit, wie es Dove war, den Kampfplatz nicht ohne erbitterte Verteidigung räumte und für seinen Teil bis zum Tode (1879) die alte Winddrehungslehre aufrechtzuerhalten trachtete, kann nicht überraschen. Dahin gehören z. B. die scharf kritischen Bemerkungen in der oben angeführten Schrift über die Stürme gegen einen Aufsatz von Prestel (Ergebnisse der neuesten auf das Gesetz der Stürme gerichteten Untersuchungen, Petermanns Geogr. Mitteil. 1862, S. 401 ff.), welcher nur Andraus Resultate (De Wet der Stormen getoetst aan latere Waarnemingen, Utrecht 1861) in Deutschland bekannter zu machen bestimmt war. Ein noch unerquicklicheres Kapitel

endgültigen Schluß aber gestattet uns jetzt unsere Würdigung der einzelnen Zwischenstadien, durch welche sich die Wahrheit auf ihrem langwierigen Wege hindurch bewegt hat, und wie hat unser Schlußurteil über die Prioritätsfrage zu lauten? Wir wollen versuchen, dasselbe, wie folgt, in eine tunlichst objektive, den Einzelleistungen nach Kräften gerecht werdende Form zu fassen.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß das atmosphärische Grundgesetz der neuesten Zeit damals, als es in unscheinbaren Gelegenheitsveröffentlichungen an die Öffentlichkeit gelangte, schon geradezu „in der Luft lag", daß es von einer ganzen Anzahl von Forschern in vollster gegenseitiger Unabhängigkeit seinem Wesen nach erkannt und nur noch nicht in seiner beherrschenden Bedeutung erfaßt war. Selbst ein minder hervorragender Geist hätte, wären ihm nur die vorbereitenden Andeutungen bei Hadley, Lambert, Brandes, Muncke bekannt gewesen, zu einer durchaus korrekten Formulierung des barischen Prinzipes durch einfache Zusammenfassung und ohne jede selbständige Geistesarbeit durchdringen müssen. Ganz nahe waren, von den verschiedensten Motiven geleitet, Coffin, Ferrel und Dippe diesem Prinzipe gekommen, allein keiner von ihnen hatte jenen entscheidenden Schritt getan, dessen Ausbleiben in unmittelbarster Nähe des Zieles man so oft in der Geschichte der exakten Wissen-

in den Jahrbüchern der modernen Meteorologie ist die Polemik, welche Dove gegen Vettin eröffnete, als dieser von 1857 an mit seinen mit höchstem Geschicke inszenierten, zunächst noch gar nicht auf eine Bekräftigung der neuen Anschauungen abzielenden Experimenten über aufsteigende Luftströme, Aspiration und Ablenkung hervorzutreten begann (vgl. dazu Günther, Strömungsversuche und deren Bedeutung für die Physik des Kosmos und der Erde, Humboldt, 6. Jahrgang [1887], S. 329 ff.). Es gelang der Autorität, über eine gegnerische Meinung noch einmal die Oberhand zu gewinnen; heute sind Vettins Demonstrationen ein gesichertes Besitztum der atmosphärischen Physik.

schaften zu konstatieren hat. Galton allein war sich vollständig klar über den Sachverhalt und seine Tragweite, allein seine Publikation liegt drei Jahre hinter der maßgebenden von Buys Ballot. Im Hinblicke auf diese jetzt in ihrer historischen Zuordnung festgestellten Tatsachen wird man das Fazit zu ziehen haben:

Das barische Windgesetz darf unter dem Rechtstitel der Geschichte den Namen des Mannes tragen, der es nicht nur, wie auch sonst geschehen, in speziellen Fällen als gültig wahrgenommen, sondern in konsequent induktiver Entwicklung als alle Bewegungen in den unteren Luftschichten regelnd gekennzeichnet hat.

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 18. November 1905.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. v. Heigel, eröffnete die Festsitzung mit der folgenden Ansprache:

Zur Erinnerung an die Erhebung Bayerns zum Königreich.

Unsere heutige, der Huldigung für den ehrwürdigen Landesherrn gewidmete Festsitzung gewinnt dadurch noch erhöhte Bedeutung, daß sie am Vorabend einer für Bayern bedeutsamen Gedenkfeier stattfindet: am 1. Januar 1806 hat der Großvater unseres allverehrten Regenten, Max Joseph, die Würde eines Königs von Bayern angenommen! Seitdem sind hundert Jahre verflossen. Der gründlichste Kenner bayerischer Geschichte hat dafür das Wort geprägt: Das glücklichste Jahrhundert der bayerischen Geschichte! Da kommt der Vorsitzende einer Gelehrtengesellschaft, die in erster Reihe gestiftet ist „zum Betrieb aller Sachen, die mit den Geschichten der teutschen, insbesondere der bayerischen Nation und mit der Weltweisheit überhaupt eine nützliche Verbindung haben", wohl nur einer Ehrenpflicht nach, wenn er den verdienstvollen Männern, die zu diesem Glück, zum Aufschwung des Bayerlandes den Grundstein gelegt haben, ein anspruchsloses Wort der Erinnerung widmet.

Am 26. Mai 1789 hielt Schiller in Jena seine akademische Antrittsrede: „Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?" Indem er bei seinem eigenen Zeitalter stille steht, rühmt er den reichen Segen der Gegenwart, die

vielen Schöpfungen der Kunst, die Wunder des Fleißes, das Licht auf allen Gebieten des Wissens und Könnens. „Endlich unsere Staaten“, fährt er fort, „mit welcher Innigkeit, mit welcher Kunst sind sie ineinander verschlungen! Wie viel dauerhafter durch den wohltätigen Zwang der Not als vormals durch die feierlichsten Verträge verbrüdert! Den Frieden hütet jetzt ein geharnischter Krieg, und die Selbstliebe eines Staates setzt ihn zum Wächter über den Wohlstand des andern. Die europäische Staatengesellschaft scheint in eine große Familie verwandelt. Die Hausgenossen können einander anfeinden, aber hoffentlich nicht mehr zerfleischen!“

Ein Prophet war also auch Schiller nicht. Kaum daß jene Rede verhallt war, begann in Frankreich eine furchtbare Umwälzung von Staat und Gesellschaft, und drei Jahre später ein Krieg, in welchem sich zwei Jahrzehnte lang die Hausgenossen der Familie Europa zerfleischten. Dem siegreichen Feldherrn fiel, wie so oft in der Weltgeschichte, die Herrschaft zu, und es glückte ihm, ganz Europa an seinen Triumphwagen zu fesseln.

Inzwischen hatte sich auch in einem kleinen deutschen Staat glücklicherweise ohne Blutvergießen und Gewalttat ein gründlicher Umschwung vollzogen. Bei Karl Theodors Ableben glich Pfalz-Bayern einem Wrack, das steuerlos der ungestümen See preisgegeben war, das schon der nächste Windstoß aus den Fugen reißen konnte. Vom Reich war Schutz nicht zu erwarten, denn der Kaiser selbst war es, der auf den in Verfall und Auflösung begriffenen Nachbarstaat begehrliche Blicke richtete. Nirgend ein Anwalt, nirgend ein Freund!

Im gefährlichsten Augenblick, unmittelbar nach dem Tode Karl Theodors, brachte Rettung die Verwicklung Österreichs in neuen Krieg mit Frankreich. „Die von Österreich bewiesene Uneigennützigkeit gegen Bayern,“ schrieb Haugwitz, als die Regierung an den Nachfolger aus zweibrückischem Hause ohne Störung übergegangen war, „findet im kritischen Augenblick so viel wichtigerer Entscheidung ihre natürliche Erklärung von selbst“.

Bald ließ sich aber auch erkennen, daß mit dem aufgeklärten, volksfreundlichen Max Joseph ein guter Geist eingezogen, daß es mit der Schlaffheit und Lässigkeit in Bayern vorbei sei.

Am 21. Februar 1799 wurde Max Freiherr von Montgelas zum Leiter der auswärtigen Politik ernannt.

Vom Reichsfreiherrn von Stein bis auf Pertz, Häusser und Treitschke ist der „Französling" Montgelas seiner „undeutschen", seiner „großmannsüchtigen" Politik wegen bitter verurteilt worden. Heute ist jene Auffassung aufgegeben. Die Wahrheit hat auch in dieser Frage ihre sieghafte Kraft bewährt. Auch hier hat sich gezeigt, wie schädlich es war, politische Papiere als tabu anzusehen und deshalb vor jedem profanen Auge zu verschließen, während sich doch das Urteil über Tun und Lassen von Fürsten und Staatsmännern nur günstiger gestalten kann, wenn die Beweggründe, sowie die einflußreichen Nebenumstände so erschöpfend und genau wie möglich bekannt werden. Zur Stärkung vaterländischer Gesinnung trägt unbestreitbar die Kenntnis vaterländischer Geschichte bei, doch es steht ebenso fest, daß nur die wahrhaftige Geschichte diese Kraft besitzt. Ohne Freiheit der Forschung aber keine Wahrheit!

Je helleres Licht über die Politik der Rheinbundperiode verbreitet wurde, desto weniger frevelhaft erschien sie unbefangenen Richtern. „Man darf den Fürsten und ihren Räten nicht mehr zum Vorwurf machen, daß sie gehandelt haben, wie sie mußten: unverzeihlich wäre es erst gewesen, wenn sie sich *nicht* von den zur Lüge gewordenen Formen und Forderungen des alten Reiches losgesagt, wenn sie sich zu den Don Quixotes des hl. römischen Reiches deutscher Nation hätten machen wollen. Sie haben nur getan, was vernünftig war, sie haben die Pflicht gegen ihr Land erfüllt und sein Dasein gerettet, indem sie die Hand der Eroberer ergriffen, von denen ihre Vernichtung oder Erhöhung abhing." Diese Worte stammen nicht von mir, sondern von dem Berliner Historiker Max Lenz. „Die Verhältnisse waren in Deutschland dahin gediehen, daß die partikularen Interessen des deutschen Reichsfürstenstandes, jedes anderen wirksamen Schutzes ledig, ihre Wahrung und

Förderung selbständig in die Hand zu nehmen sich genötigt sahen; der Trieb der Selbsterhaltung und der der Vergrößerung fielen dann fast mit Notwendigkeit zusammen." Diese Worte stammen nicht von mir, sondern von dem Heidelberger Historiker Erdmannsdörffer.

Aus Berliner und Wiener Archivalien wurde in jüngster Zeit die Tatsache festgestellt, daß Montgelas sein politisches System keineswegs von vornherein auf Lieb' und Gunst Bonapartes gestellt hat.

Da sich im Frühjahr 1799 voraussehen ließ, daß bei Wiederausbruch der Feindseligkeiten Süddeutschland wieder den Kriegsschauplatz abgeben werde, rief Montgelas die Hilfe Preußens an und zugleich brachte er eine Wiederbelebung des deutschen Fürstenbundes in Vorschlag. Preußen und die übrigen deutschen Mittel- und Kleinstaaten sollten zu einer Union zusammentreten, welche an bewaffneter Neutralität festhalten und jede Besetzung rechtsrheinischen Gebiets durch Franzosen oder Österreicher verhindern sollte. Hören wir, wie sich Montgelas in einem Schreiben an den bayerischen Gesandten in Berlin, Baron Posch, darüber ausspricht: „Wenn der Wiener Hof aufhört, deutsche Politik zu treiben, kann nur ein enger Zusammenschluß der schwächeren deutschen Staaten unter preußischer Führung die Rettung bringen!" Könnte dieses Wort nicht von Bismarck aus den fünfziger Jahren stammen? Würde nicht Treitschke ein weniger vernichtendes Urteil über den bayerischen Staatsmann gefällt haben, wenn ihm dieser als Anwalt der Fürstenbundsidee bekannt geworden wäre?

Als Friedrich Wilhelm III. im Juni 1799 seine fränkischen Provinzen bereiste, traf Max Joseph in Ansbach mit ihm zusammen. Der Kurfürst und sein Minister bestürmten den König, er möge die ängstliche Neutralitätspolitik aufgeben und mit geschlossenem Programm gegen Österreich und Frankreich Front machen. Haugwitz war Feuer und Flamme für den Vorschlag. „Ja wohl, es ist an der Zeit, endlich einmal deutsche Politik zu treiben," sagte er zu Montgelas, „ich will fortan ganz zu vergessen suchen, daß ich preußischer Minister bin!" Doch

gelang es nicht, den König zu solcher Auffassung zu bekehren. Friedrich Wilhelm hielt fest an den Grundsätzen seines Kabinetts Lombard-Köckeritz: „Frankreich darf unter keinen Umständen gereizt werden. Preußen hat kein anderes Ziel anzustreben, als sich den Frieden zu erhalten!"

Nach der erfolglosen Ansbacher Zusammenkunft schloß sich Max Joseph enger an Österreich an. Um außer dem Reichskontingent noch eine stärkere Truppenmacht gegen Frankreich ins Feld stellen zu können, nahm er sogar gegen den Willen der Stände und gegen den Wunsch des Volkes englische Subsidien in Anspruch. Die Bayern fochten sodann an der Seite der Österreicher gegen Jourdan und Moreau. Erst als der Kampf unter kaiserlichem Kommando nur Niederlage des Heeres und Not und Elend des Volkes im Gefolge hatte und durch den vom Kaiser abgeschlossenen Parsdorfer Vertrag der größte Teil der kurfürstlichen Lande den Franzosen preisgegeben wurde, trat ein Umschwung in der Stimmung am bayerischen Hofe ein. „Die preußische Parthey frohlockt!" klagte der Kaiserliche Gesandte Graf Seilern. „Nun werden die Illuminaten Bayern bald ins französische Lager ziehen!" Montgelas eröffnete loyal dem preußischen Ministerium, daß die verzweifelte Lage Bayerns die Sendung eines Vertrauensmannes nach Paris und den Abschluß eines Separatfriedens erheische. „Seine Majestät der König," erwiderte darauf Haugwitz, „kann nicht umhin, zu gestehen, daß er schon zur Zeit der Sendung des Grafen St. Julien nach Paris und besonders seit den vertraulichen Mitteilungen des Generals Moreau über die Rätlichkeit einer Annäherung des Kurfürsten an die französische Regierung daran gedacht hat, diesem Fürsten nahe zu legen, daß auch er ohne Aufschub sich zu einem Vorgehen entschließen möge, wozu der Wiener Hof selbst das Beispiel gegeben hat. Da sich jetzt Seine Kurfürstliche Durchlaucht selbst dafür entschieden hat, kann der König nur seinen Beifall geben diesem Plane, dessen möglichst rasche Ausführung seinem Interesse den größten Vorteil bringen wird."

Kein Zweifel, die preußische Regierung hat mit solcher

Billigung und Begünstigung der Verbindung Bayerns mit Frankreich eine Politik verfolgt, die weder dem preußischen, noch dem deutschen Interesse entsprach. Wer möchte aber den bayerischen Staatsmann schelten, der in einer Zeit, da Recht und Moral sozusagen verhüllt und vertagt waren und jeder nur seinen Vorteil auf Kosten des anderen erstrebte, zur Erhaltung des ihm anvertrauten Staates Hilfe im Ausland suchte?

Und wenn Montgelas, was nicht verschwiegen werden soll, in der Folge noch gefügiger, als es die Not erheischte, dem Willen Napoleons sich unterordnete, — wer hebt den ersten Stein gegen ihn? Wirkte nicht auf alle die Erscheinung Napoleons mit bestrickendem Zauber? Mit seinen Fahnen war der Sieg, wo immer sie wehten. Wie einst Hellas dem großen Feldherrn und Räuber Alexander Altäre errichtete, so berauschte der ungeheure Erfolg des Unbesieglichen auch diejenigen, denen nicht Gewinnsucht oder Furcht den Rücken bog. Ob er Recht hat oder Unrecht, meinte Goethe, kommt nicht in Betracht, er muß beurteilt werden, wie man über physische Ursachen, über Feuer und Wasser denkt.

Während aber in anderen Staaten die Ergebung in den Willen Napoleons träge Gleichgültigkeit in Fragen der inneren und äußeren Politik nach sich zog, war die bayerische Regierung unermüdlich bestrebt, die Mosaik der durch Frankreichs Gunst gewonnenen neuen Territorien mit dem alten Stammland zu einem einheitlichen, wohl gegliederten Staatskörper zu verschmelzen, diesen Staat durch zeitgemäße Reformen — es sei hier nur an das Statut von 1807 erinnert, das unsere Akademie aus unglaublicher Stagnation zu ersprießlicher Tätigkeit erweckte — zukunftsfähig zu machen und so den Eintritt Bayerns in die Reihe der stimmberechtigten Mächte Europas vorzubereiten. Auf dieses System sind ebenso die leider mit josephinischer Hast und Härte betriebenen kirchenpolitischen Neuerungen, wie die mit straffer Energie betriebene Heeresorganisation zurückzuführen. Nur im Sturm und Drang des dreißigjährigen Krieges hatte Bayern unter dem tatkräftigen Maximilian I. zu ähnlichen Großtaten sich aufgerafft. Diese

Steigerung der Kräfte, der Leistungen und des Ansehens fand ihren natürlichen Abschluß in der Erhebung zum Königreich. Es war ungerecht und unrichtig, wenn Stein darin nur die Krönung eines gehorsamen Satrapen erblicken wollte oder wenn die Erhöhung lediglich als Lohn für die Vermählung der Prinzessin Augusta mit dem Stiefsohn und Liebling Napoleons bezeichnet wurde. Das Bündnis mit dem im Herzen Deutschlands gelegenen, von einem rührigen, weitblickenden Staatsmann geleiteten Mittelstaat war für Napoleon von hohem Wert. Die bayerischen Truppen hatten 1805 in den Kämpfen bei Lofer und Iglau wacker eingegriffen. Der Sieg bei Austerlitz würde kaum erfochten worden sein, wenn nicht ein beträchtlicher Teil der österreichischen Heeresmacht im Nordwesten festgehalten worden wäre. Auch waren nur durch das Bündnis Bayerns mit Frankreich die Nachbarn Württemberg und Baden auf die nämliche Bahn gezogen worden.

Um die neue Würde vor der Öffentlichkeit nicht als Geschenk eines Fremden erscheinen zu lassen, wurde offiziell von Wiederherstellung des alten bayerischen Königtums gesprochen. „Man gefiel sich in der Vorstellung,“ sagt Montgelas lakonisch in seinen Denkwürdigkeiten, „daß Bayern ehedem schon ein Königreich war und das neue Ereignis nur dasjenige zurückbrachte, was frühere Vorgänge geraubt hatten.“ Joseph Spitzenberger, der Dichtkunst ehemaliger Lehrer in München, spendet in einer Ode auf den 1. Januar 1806 dem Günstling des Himmels und dem Glück der Erde, Kaiser Napoleon, untertänigen Dank, weil er ein altes Unrecht der Geschichte wieder gut gemacht habe.

„Du bist nun wieder, Bayern, was Du zu Pipins
Und Arnulfs Zeiten warst: Länderbeherrscherin!“

In einer Schrift: „Das erneute Königtum Bayern“ von Freiherrn von Löwenthal, wird ausgeführt, wie die Bayern schon von Christi Geburt an bis zum Jahre 591 eine lange Reihe von einheimischen Königen hatten, Ahnen des regierenden Königshauses, das seine Stammesreihe sogar wahrscheinlich bis auf die Könige Trojas zurückführen könne. Die agilolfingische

Periode repräsentiere das zweite, Ludwig der Deutsche das dritte, Arnulf, Liutpolds Sohn, das vierte bayerische Königtum.

Richtig ist, daß Paul Warnefried den Agilolfingern Garibald und Thassilo den Königstitel gibt, doch Dahn und Riezler erklären dies aus einer Ungenauigkeit des langobardischen Geschichtschreibers; rex sei nur gleichbedeutend mit dux oder princeps; Warnefried spreche ja auch von einem König der Alemannen, wo doch gewiß nur von einem Herzog die Rede sein könne.

Mit besserem Recht hätten jene offiziösen Federn darauf hinweisen können, daß sich Ludwig der Deutsche und Karlmann Könige von Bajoarien nannten. Mag darunter auch nur der Königstitel der Karolinger zu verstehen sein, so ist es doch gewiß nicht bedeutungslos, daß er gerade auf Bayern übertragen wurde. Bayern wird dadurch als der Kern des ostfränkischen Reiches gekennzeichnet. Noch wichtiger ist jedenfalls die Tatsache, daß von allen deutschen Stämmen nur noch der bayerische auf dem nämlichen Boden, wo er vor mehr denn tausend Jahren zuerst festen Fuß gefaßt hatte, einem auch heute noch lebenskräftigen Staat den Namen gibt.

Weniger harmlos als jene Legenden war ein anderer, in jenen Tagen mit Vorliebe behandelter Lehr- und Leitsatz. Pallhausen, Krenner, auch Westenrieder betonten nicht ohne frohlockenden Hinweis auf das neue Bündnis die uralte Verwandtschaft der Bayern, der Boier, mit den Stammesgenossen des Vercingetorix, den Ahnen der Sieger von Austerlitz. Auch die Vermählung der bayerischen Prinzessin mit dem Vizekönig von Italien bot Anlaß zu historischen Reminiszenzen und Reflexionen. Am Hochzeitstage, am 15. Januar 1806, war an unserem Akademiegebäude eine Inschrift angebracht: Sequanam et Eridanum Isarae jungunt regales nuptiae! Durch die Hochzeit im Königshause ist jetzt die Isar mit Seine und Po verbunden. Und ein deutscher Gelehrter, ein Akademiker, leistete sich in der Münchener Zeitung den Überschwang: O Napoleon! *Ὦ πᾶν λέον*! O Du ganz Löwe! *Ἓν ὅλῳ πᾶν*! Du alles im Weltall! *Ὦ πᾶν ἑλὼν*! Du, der alles sich untertan macht!

Doch in der nämlichen Zeit gab es in der öffentlichen

Meinung schon eine Unterströmung. Nicht alle schätzten das Utilitätsprinzip so hoch wie der leitende Minister, nicht alle sahen im Rheinbund eine politische und kulturelle Erhebung des bayerischen Volkes, nicht alle waren dem von Napoleon ausgeübten dämonischen Bann unterworfen. Es gab auch im Süden eine Gemeinde, die von der Wiederbelebung des deutschen Nationalgeistes einen glücklicheren Umschwung ersehnte und erhoffte. An der Spitze dieser von Napoleon verspotteten und gefürchteten Ideologen stand kein Geringerer als Kronprinz Ludwig, und es gehört zu den Ruhmestiteln der Akademie, daß als rührige Träger der neuen Bewegung auch die besten Männer unseres Instituts, Jacobi, Schlichtegroll, Jacobs, Niethammer u. a., wirkten und litten.

Ein Jahrhundert ist seitdem verflossen. Unter dem Schutze von Herrschern, deren jeder seine Volksfreundlichkeit und sein Interesse an Landeskultur in eigentümlicher Weise betätigte, ist das Bayerland zu schöner Blüte gediehen. Ernst und eifrig ist unter vier Königen an der geistigen und sittlichen Befreiung des Volkes, wie an wirtschaftlichen Verbesserungen gearbeitet worden. Nicht minder rühmliches Beispiel gibt der greise, einfache, aber welterfahrene, weitsehende Fürst, der heute den Thron der Wittelsbacher ziert, der ebenso mit Klugheit und Takt berechtigte Forderungen der neuen Zeit erfüllt, wie er mit festem Willen über sein Herrscherrecht und Bayerns Selbständigkeit wacht. Bayerns Selbständigkeit ist ein unversieglicher Jungbrunnen! Der breitschulterige Bursche mit den hellen Augen und der geschickten Hand, immer sangesfroh und immer ein wenig rauflustig, derb, aber ehrlich, schwerfällig im Ausdruck, aber ein Poet im Gemüt, niemals nachträgerisch, immer tapfer und unverzagt, wird nicht aussterben! Diese Selbständigkeit hat aber nicht mehr, wie 1806, die Gunst eines Fremden nötig, sondern steht, denn in der Politik ist der Starke nicht am mächtigsten allein, unter dem Schutz des geeinten Deutschen Reiches.

Ich habe auf die Worte hingewiesen, womit Schiller die Segnungen und den Fortschritt seines Zeitalters rühmte.

Wenn heute der Unsterbliche aus den ewigen Gefilden zu uns zurückkehrte, wie würde er, ich will nicht sagen, über unsere Litteratur, doch über die Verbreitung und Volkstümlichkeit der Künste überhaupt, über die Wunder des Fleißes und die Lichtfülle des Wissens in unserem Zeitalter staunen! Auch ein Universalgenie vermöchte nicht ihm alle die Erfindungen der Technik und die wissenschaftlichen Entdeckungen zu erklären, die zwischen der ersten Fahrt mit der Lokomotive Georg Stephensons und den schon zu überraschendem Gelingen gebrachten Versuchen mit der drahtlosen Telegraphie gemacht worden sind.

Und doch! „Der Freiheit eine Gasse" sind die Schienenwege von einem großen Techniker genannt worden. Allein das vielmaschige Netz, das alle Weltteile überzieht, und der ins Ungeheure angewachsene Schiffsverkehr können so wenig ein freies, wie ein geknechtetes Volk vor brutalem Angriff und vor Eroberung schützen. Alle wissenschaftlichen Beweise für die Einheit des Menschengeschlechts vermögen nicht politische Gegner zu versöhnen und können heute so wenig wie vor hundert Jahren verhüten, daß „die Hausgenossen sich zerfleischen!"

Was für eine Lehre sollen wir aus dieser Erfahrung ziehen?

Daß wir uns in den idealen Forderungen und Hoffnungen bescheiden müssen! Der große Dichter selbst, wenn er heute noch die Kluft zwischen dem Erreichten und dem Wünschenswerten gähnen sähe, würde uns wieder zurufen: Ans Vaterland, ans teure, schließ' Dich an!

Es ist im allgemeinen sicherlich überflüssig, das Gelübde treuen Festhaltens an Kaiser und Reich immer wieder zu erneuen. Als ob das nicht eine selbstverständliche Sache wäre! Doch wenn wir der Ereignisse von 1806 gedenken, wollen wir, obwohl begeistert das blauweiße Banner schwingend, obwohl aufrichtig dankbar jenen Kräften, die uns den modernen Staat Bayern geschaffen haben, auch unsere Genugtuung nicht verhehlen, daß Bellowes und Sigowes aus der bayerischen Geschichte verschwunden, daß Seine und Po nicht mehr mit der Isar verbunden sind, wir wollen schlicht und stolz Ausdruck geben unserer Freude am deutschen Vaterlande!

Hierauf verkündigte der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, die Wahlen der mathematisch-physikalischen Klasse. Es wurden dabei gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zum ordentlichen Mitgliede das bisherige außerordentliche Mitglied:

Dr. Siegmund Günther, ordentlicher Professor der Erdkunde an der hiesigen technischen Hochschule;

zum außerordentlichen Mitgliede:

Dr. Ludwig Burmester, ordentlicher Professor für darstellende Geometrie und Kinematik an der hiesigen technischen Hochschule;

zu korrespondierenden Mitgliedern:

Dr. Karl Chun, ordentlicher Professor der Zoologie an der Universität Leipzig;

Henri Moissan, Membre de l'Institut und Professor der Chemie an der Universität zu Paris;

Dr. Emil Warburg, Direktor der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 2. Dezember 1905.

1. Herr Carl v. Linde legt eine Mitteilung der Herren O. Knoblauch und M. Jakob über eine Reihe von Versuchen vor, welche im Laboratorium für technische Physik der technischen Hochschule „*zur Messung der spezifischen Wärme des überhitzten Wasserdampfes* (bei konstantem Druck)“ ausgeführt worden sind.

Dieselben haben ergeben: 1. In der Nähe des Sättigungszustandes wächst die spezifische Wärme mit dem Drucke und nimmt bei konstantem Drucke mit wachsender Temperatur ab. 2. Bei je einer bestimmten Inversionstemperatur erreicht die spezifische Wärme ein Minimum, um alsdann mit zunehmender Temperatur zu wachsen. 3. Die Inversionstemperatur wächst mit dem Drucke. Man darf hierin die erstmalige Feststellung eines allgemeinen Gesetzes für die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme der Gase und Dämpfe vermuten, welches den Physikern bisher entgangen ist, weil sie stets nur bei niedrigem (atmosphärischem) Drucke gemessen haben, wobei die Veränderungen so klein sind, daß sie innerhalb der Fehlergrenze liegen.

2. Herr Hermann Ebert legt eine Arbeit des Herrn Reallehrers Dr. A. Endrös in Traunstein „*Über die Schwingungsbewegungen (Seiches) des Waginger-Tachingersees*“ vor.

Dieser Doppelsee stellt ein interessantes Beispiel eines an einem Punkte durch Querschnittsverminderungen eingeengten langgestreckten Seebeckens dar, dessen Wassermassen wie die Teile einer in der Mitte durch einen Steg festgehaltenen Saite

hin- und herpendeln. Da die Einengung zufällig an einer solchen Stelle liegt, daß die Periodendauer der Schwingungsbewegungen in beiden Teilbecken einander sehr nahe gleich sind, kommt eine gemeinsame rhythmische Bewegung von 62 Minuten Dauer zu Stande, welche den ganzen Doppelsee beherrscht: die Hauptschwingung. Ausserdem führt aber jedes Teilbecken für sich gewisse Oberschwingungen aus, die — musikalisch gesprochen — nicht mehr harmonisch oder aufeinander abgestimmt sind. Wohl aber zwingt gelegentlich das eine Becken seine Eigenschwingung dem anderen Becken auf, es kommt zu sog. „erzwungenen" Schwingungen. Im Ganzen wurden ausser der Hauptschwingung noch zwölf solcher Nebenschwingungen nachgewiesen, welche reichliches Material bieten die vorhandenen Theorien solcher Seeschwingungen (sog. „Seiches") zu prüfen.

3. Herr Siegmund Günther überreicht einen Aufsatz: „Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren."

Die schon früher angedeuteten Leitsätze über die Bildung von Erdpyramiden wurden, zumal an dem klassischen Beispiele der „Colonnes" von Useigne (Unterwallis), näher belegt: I. Die krönenden Felsblöcke sind nur eine zufällige Beigabe; II. durchweg tritt bei Kolonien solcher Gebilde die lineare Scharung zutage; III. das Material darf weder zu hart noch auch allzu leicht zerstörbar sein.

4. Herr Alfred Pringsheim legt eine Mitteilung des Herrn Dr. Oskar Perron vor: „Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche."

Die erste von O. Stolz herrührende Lösung des fraglichen Konvergenz-Problems leidet an dem wesentlichen Mangel, daß der Hauptteil des Beweises nicht in einer naturgemäßen Herleitung, vielmehr lediglich in einer Verifikation gewisser gleichsam aus dem Stegreif aufgestellter Grundformeln besteht. Herrn O. Perron ist es gelungen, diesen Mangel durch Entwickelung

einer Methode zu beseitigen, welche um so mehr Interesse verdient, als sie bei passender Ausdehnung auch zur Behandlung der entsprechenden Fragen für die allgemeinen Jacobischen Kettenbruch-Algorithmen sich als ausreichend erweist.

5. Herr Wilhelm Koenigs hält einen Vortrag: „Über die Konstitution der China-Alkaloide.“ Die Abhandlung hierüber wird in Liebigs Annalen erscheinen.

6. Herr August Rothpletz legte eine für die Denkschriften bestimmte Arbeit vor von Dr. H. Keidel und Pater St. Richarz über „ein Profil durch den nördlichen Teil des zentralen Tian-Schan,“ welche einen Teil der wissenschaftlichen Ergebnisse der Merzbacher'schen Tian-Schan-Expedition bildet.

Sie gibt zum erstenmal genaue geologische Profile aus diesem Gebirge und zwar aus einem Gebiet desselben, in dem zwei mächtige Granitzüge auftreten. Die Sedimentgesteine, welche den Tian-Schan aufbauen, sind alle paläozoisch und von den Granitzügen ist der nördliche, ein Biotitgranit, älter als Karbon, der südliche ein Amphibolitgranit jünger als die Gebirgsaufrichtung. Beide haben die von ihnen durchsetzten Gesteine stark umgewandelt. Den geologischen Teil der Arbeit hat Dr. Keidel, der als Geologe die Merzbacher'sche Expedition begleitete, geschrieben, den petrographischen Teil Pater Richards, der seine Untersuchung im petrographischen Institut des Professors Weinschenk ausgeführt hat mit dem Material, das Dr. Merzbacher der geologischen Staatssammlung geschenkt hat.

Über die spezifische Wärme C_p des überhitzten Wasserdampfes für Drucke bis 8 Atmosphären und Temperaturen bis 350° C.

Von **Oscar Knoblauch** und **Max Jakob.**

(*Eingelaufen 20. Dezember.*)

(Mit Tafel II.)

Bei der stetig wachsenden Verwendung des überhitzten Wasserdampfes gewinnen alle physikalischen Eigenschaften desselben ein zunehmendes Interesse. Deshalb wurde im Laboratorium für technische Physik der K. Technischen Hochschule München das spezifische Volumen des Wasserdampfes eingehend untersucht, und es sind dann auf Grund der dabei erhaltenen Beobachtungsergebnisse von R. Linde[1]) die thermischen Eigenschaften des Dampfes vom Standpunkt der Thermodynamik behandelt worden. Von besonderer Wichtigkeit war dabei das theoretisch abgeleitete Resultat, daß bei unverändertem Druck die spezifische Wärme C_p vom Sättigungszustande an mit steigender Temperatur kleiner wird, daß sie dagegen für eine gegebene Temperatur mit wachsendem Drucke zunimmt. Hiedurch war eine Gesetzmäßigkeit für C_p festgelegt und der bisher herrschenden Unsicherheit[2]) über die

[1]) R. Linde, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, Heft 21; im Auszuge mitgeteilt i. d. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure 49, S. 1697 und 1743, 1905.

[2]) Vgl. z. B. die historische Zusammenstellung in Zeuners Technischer Thermodynamik Bd. 1, S. 137 ff., 1900 oder die umfassende Abhandlung von Weyrauch, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 48, S. 24 und 50, 1904.

Abhängigkeit von C_p von Druck und Temperatur ein Ende gemacht. Gleichzeitig mit der Abhandlung von R. Linde erschien eine experimentelle Bestimmung von C_p durch H. Lorenz,[1] in welcher die von Linde abgeleitete Gesetzmäßigkeit qualitativ bestätigt wurde, während quantitativ nicht unbeträchtliche Differenzen zwischen den von Linde berechneten und den von Lorenz beobachteten Werten bestehen.

Aus diesem Grunde wurde eine im Laboratorium für technische Physik München damals bereits in Angriff genommene Experimentalarbeit über C_p nicht unterbrochen, sondern noch etwa $1^1/_2$ Jahre lang weitergeführt. Ein ausführlicher Bericht über diese Untersuchung, für die der Verein deutscher Ingenieure in dankenswerter Weise die Mittel zur Verfügung stellte, soll in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure und in den von demselben herausgegebenen „Mitteilungen über Forschungsarbeiten" demnächst erfolgen. An dieser Stelle seien nur die wichtigsten Ergebnisse kurz mitgeteilt.

Durchführung der Versuche: Der Wasserdampf wurde einem Dampfkessel entnommen, mittels Wasserabscheider entwässert und dann durch einen vertikalen, zylindrischen, etwa 4 Meter langen ersten Überhitzer geleitet. Dieser enthielt elektrische Heizkörper, denen der Strom einer Gleichstrommaschine zugeführt wurde, und lieferte homogen überhitzten Dampf. Der ihm entnommene Dampf trat mit einer bestimmten Anfangstemperatur t_1 in eine Kupferschlange, die sich in einem Ölbade befand. Durch einen elektrischen Heizkörper, der vom städtischen Netz mit Gleichstrom gespeist wurde, konnte das Ölbad geheizt und durch seine Vermittlung der Dampf in der Kupferschlange weiter überhitzt werden. Er verließ mit einer bestimmten Endtemperatur t_2 diesen zweiten Überhitzer und wurde in einen Kondensator geleitet.

Die von dem Dampfe während des Durchströmens [illegible]

[1] H. Lorenz, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, Heft [illegible]. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure [illegible], S. [illegible], [illegible].

Spirale aufgenommene Wärme ist die Differenz der dem Ölbade im ganzen zugeführten elektrischen Energie und der durch Ausstrahlung u. s. w. verloren gegangenen Wärme. Dieser Wärmeverlust wurde in einer Nachperiode in der Weise bestimmt, daß unmittelbar nach der Abstellung der Dampfzufuhr die Heizenergie gemessen wurde, welche zur Konstanthaltung der Öltemperatur nötig war.

Aus der stündlich hindurchströmenden Dampfmenge, dem Betrage der erzielten Überhitzung (t_2-t_1) und der vom Dampfe aufgenommenen Wärme berechnet sich dann die spezifische Wärme C_p des Dampfes.

Bei unseren Versuchen betrug das Dampfgewicht im Mittel 40 kg pro Stunde, die erzielte Überhitzung (t_2-t_1) im Mittel 40°; die Versuche wurden bei absoluten Drucken von 2, 4, 6 und 8 kg/cm² angestellt und bei Temperaturen, die in Intervallen von ungefähr 50° von der Sättigungstemperatur bis zu 350° C. anstiegen.

Versuchsergebnisse: Die Resultate unserer Untersuchung sind in der beigegebenen Kurventafel zur Darstellung gebracht. Die Kurven sind durch die Punkte hindurchgelegt, welche je bei den Drucken 2, 4, 6, 8 kg/cm² beobachtet worden sind. So entstand das vorliegende Isobaren-System, in dem die spezifischen Wärmen C_p als Ordinaten, die Temperaturen t als Abszissen eingetragen sind. Bei der graphischen Interpolation wurde einerseits darauf geachtet, daß die Abweichung der einzelnen beobachteten Punkte von der ausgleichenden Kurve möglichst klein war; andrerseits wurde bei dem Aufzeichnen jeder einzelnen Kurve auch der Verlauf der anderen drei Kurven berücksichtigt. Diese Rücksichtnahme ist stets geboten, wenn es sich nicht um den Entwurf einer Einzelkurve, sondern um den einer Kurvenschar handelt. Im vorliegenden Falle ist ihre Bedeutung die, daß man nicht nur die Beobachtungen von gleichem Druck aber anderer Temperatur, sondern auch die Beobachtungen von gleicher Temperatur aber anderem Druck der graphischen Darstellung zu Grunde legen muß. Dieses gegenseitige Abgleichen der Isobaren

ist selbstverständlich nur innerhalb enger Grenzen zulässig und wurde beim Zeichnen der Kurven nur bis zum Höchstbetrage von 0,5% des absoluten Wertes vorgenommen. Man erhielt dabei zwanglos eine Schar von Kurven, von welchen die Versuchspunkte im Mittel nur um 0,5%, im ungünstigsten Falle um 1% des Absolutwertes abweichen. Wir halten den Schluß für gestattet, daß der benutzten Beobachtungsmethode prinzipielle Fehler anhaften müßten, wenn man den Beobachtungen nicht eine Genauigkeit von etwa 1% zusprechen dürfte. Somit scheint durch unsere Versuche die zweite Dezimale des Wertes von C_p in unserem Beobachtungsbereich festgelegt zu sein.

Der Anblick der Kurven zeigt, daß vom Sättigungszustand an C_p bis etwa 250° C. mit zunehmender Temperatur kleiner, mit zunehmendem Drucke größer wird. Wir finden also in diesem Bereiche eine Bestätigung der theoretischen Voraussagung von R. Linde und eine qualitative Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Experimentaluntersuchung von H. Lorenz. Quantitativ weichen unsere Werte um nur einige Prozente von den Lindeschen ab, bleiben dagegen zumeist weit unter den von Lorenz angegebenen.

Bei höheren Temperaturen von etwa 250° C. an tritt eine von dem oben besprochenen Verhalten verschiedene Veränderlichkeit von C_p mit der Temperatur ein, indem jetzt mit zunehmender Temperatur C_p wieder ansteigt. Dies Ergebnis ist für alle 4 Isobaren übereinstimmend unserer graphischen Darstellung zu entnehmen.

Zusammenfassend läßt sich also der Satz aussprechen, daß bei unverändertem Druck die spezifische Wärme bei geringen Überhitzungen mit zunehmender Temperatur kleiner, bei großen Überhitzungen mit zunehmender Temperatur größer wird. Der Übergang der beiden Temperaturbereiche ineinander erfolgt durch ein Minimum von C_p. Dies für Wasserdampf von uns gefundene Gesetz steht in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, die Lussana (Nuov. Cim. 1896) an Kohlensäure gemacht hat.

und besitzt wahrscheinlich allgemeine Gültigkeit für alle mehratomigen Gase und Dämpfe. Eine zwanglose Erklärung für dieses Gesetz läßt sich der kinetischen Gastheorie entnehmen: Die Dampfmoleküle verhalten sich bekanntlich in der Nähe des Sättigungspunktes anders als bei höheren Temperaturen (vgl. auch L. Sohncke, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 27, S. 337, 1897 und R. Linde, a. a. O., S. 89 und 90). Im ersteren Falle sind bei der Erwärmung die zwischen den Molekülen tätigen anziehenden Kräfte zu überwinden; diese Kräfte nehmen bei konstantem Druck mit steigender Temperatur ab, woraus sich die Abnahme von C_p mit wachsender Temperatur erklärt. Bei höheren Temperaturen wird schon in größerer Entfernung von dem Zustande quantitativ meßbarer Dissoziation ein nicht unbeträchtlicher Teil der zugeführten Wärme zu einer der Dissoziation vorangehenden Lockerung des Atomverbandes innerhalb des Moleküles verbraucht, der mit zunehmender Temperatur wächst und dadurch die Zunahme von C_p zur Folge hat.

Für höhere Drucke tritt die Lockerung erst bei höherer Temperatur ein; in der Tat ist aus unseren Kurven zu entnehmen, daß das Minimum von C_p für höhere Drucke sich nach höheren Temperaturen verschiebt.

Ferner erkennt man bei unserem Isobarensystem eine Konvergenz der Kurven bei zunehmender Temperatur. Molekulartheoretische Erwägungen lassen es als wohl möglich erscheinen, daß die Konvergenz bei Temperaturen, die oberhalb 350° C. liegen, zu einem Durchschneiden der Isobaren führt, von wo dann für gleichbleibende Temperatur C_p mit zunehmendem Drucke abnehmen würde. Die bisherige Versuchsanordnung war für so hohe Temperaturen nicht verwendbar; es ist jedoch die Ausdehnung der Untersuchung auch auf diesen Temperaturbereich nach entsprechender Abänderung der Apparate in Aussicht genommen.

Außerdem sollen später auch noch Versuche bei höheren Drucken durchgeführt werden, durch die u. a. festzustellen wäre, ob die Isobaren für höhere Drucke immer näher zusammenrücken, wie dies nach unseren Versuchen uns fast scheinen möchte.

Schließlich seien noch einige Resultate erwähnt, die sich durch graphische Extrapolation aus unserer Kurvendarstellung ergeben:

Durch Verlängerung der Isobaren bis zur Sättigungstemperatur und Verbindung der so erhaltenen Punkte gewinnt man eine „Sättigungslinie", die natürlich mit einiger Unsicherheit behaftet ist. Die spezifische Wärme C_p für Sättigung ergibt sich daraus zu ca. 0,48 für 2 kg/cm²
0,51 „ 4 „
0,545 „ 6 „
0,58 „ 8 „

Eine ebenfalls leicht ausführbare Extrapolation liefert eine C_p-Isobare für 1 kg/cm². Diese zeigt in unserem Versuchsbereich befriedigende Übereinstimmung mit den von L. Holborn und F. Henning[1]) neuerdings veröffentlichten Zahlen. Während diese jedoch aus ihren Beobachtungen ein Anwachsen von C_p mit der Temperatur nach einem linearen Gesetz ableiten, weist unsere extrapolierte Kurve natürlich wiederum ein Minimum (bei ca. 170°) und sodann ein Ansteigen nach einem ähnlichen Gesetze auf, wie es für höhere Drucke gewonnen wurde. Als Zahlenwert für C_p läßt sich im Bereich von 100 bis 260° etwa 0,465, für 300° etwa 0,475, für 350° etwa 0,49 angeben.

Extrapoliert man endlich aus unseren Kurven auch auf den Druck von 0 kg/cm², so ergibt sich abweichend von der üblichen Annahme, daß der zugehörige Wert $(C_p)_0$ von der Temperatur unabhängig sei, nur bis 150° ein konstanter Wert von ungefähr 0,45, während von da ab $(C_p)_0$ zu steigen beginnt und bei etwa 250° den Wert 0,46, bei 350° den Wert $0{,}48_5$ erreicht. Auch dies Ergebnis steht mit den Gesetzen der Gastheorie im Einklang; es erklärt sich aus den intramolekularen Vorgängen genau wie für höhere Drucke.

Laboratorium für technische Physik der K. Techn. Hochschule München, im Dezember 1905.

[1]) L. Holborn und F. Henning, Ann. d. Phys. 18, S. 739, 1905.

Die Seiches des Waginger-Tachingersees.

Von **Anton Endrös.**

(Eingelaufen 2. Dezember.)

(Mit Tafel III.)

Die Seichesforschungen am Chiemsee[1]) hatten schon nach den ersten Untersuchungen eine deutliche Einwirkung der Beckenform, besonders der Unterteilung des Sees in mehrere nur durch Einengungen zusammenhängende Teilbecken auf die Dauer und die Zahl der Knoten einzelner Schwingungen ergeben. Da aber die Umrißform des Chiemsees so kompliziert ist und Schwingungen nach den verschiedensten Längs- und Querrichtungen zuläßt, so war die genaue Beobachtung solcher Einwirkungen, namentlich des „Aufzwingens einer Schwingung", daselbst äußerst erschwert. Dieser Umstand veranlaßte mich noch vor Beendigung der Seichesuntersuchungen am Chiemsee den Waginger-Tachingersee als Parallele zu diesem auf seine Schwingungsbewegungen hin zu untersuchen, einen See, der durch zwei starke Einschnürungen in drei Teilbecken zerfällt, dabei aber doch eine ausgesprochene Längsrichtung besitzt, so daß im voraus nur Schwingungen nach dieser einen Achse in Betracht kommen konnten. Herr Professor Dr. Sigmund Günther in München hatte mich schon früher auf diesen See als ein besonders interessantes Objekt aufmerksam gemacht.

---

[1]) A. Endrös, Seeschwankungen (Seiches), beobachtet am Chiemsee. Doktor-Dissertation der K. Technischen Hochschule zu München. Traunstein 1903.

Der Waginger-Tachingersee oder kurz Wagingersee, wie er gewöhnlich genannt wird, ist hinreichend genau von A. Geistbeck ausgelotet worden, auf 1 qkm treffen 18 Lotungen.[1] Die beiliegende Karte, vgl. Tafel III, in welche ich die Knotenlinien der wichtigsten von mir gefundenen Schwingungen eingezeichnet habe, stützt sich im wesentlichen auf seine Messungen.[2] Wie man sieht, zerfällt der See in drei Teile, den südlichen Teil, Weitsee genannt, den mittleren, den Fischingerwinkel, und den nördlichen, den Tachingersee. Der Weitsee ist ein vollkommen konkaves Becken mit einer maximalen Tiefe von 27,5 m ungefähr in der Mitte und hat einen Flächeninhalt von 6,30 qkm bei einer Länge von 5 km und einer größten Breite von 1,7 km. Derselbe verengt sich bei Horn von 1600 m rasch zu 270 m, der Seeboden erhebt sich bis 13 m unter Wasser. Diese Einschnürung teilt den Fischingerwinkel ab, der ein Becken von rund 94 ha Oberfläche und fast gleichmäßiger Tiefe von 13 m bildet. Bei Tettenhausen trennt eine abermalige Einschnürung von 100 m Breite und 5,0 m größter Tiefe den nördlichen Teil, den Tachingersee, ab. Diese Einschnürung wurde durch beiderseitige Auffüllung noch künstlich gesteigert (im Jahre 1864 nach der Tieferlegung des Seespiegels, welche 1 m betrug), so daß deren Breite jetzt nur noch 20 m beträgt, welche durch eine Brücke von 4 Jochen überbrückt ist. Der Querschnitt des verbindenden Wasserarmes ist hier fast rechteckig und hat nach meinen Lotungen eine Fläche von nur 90 qm. Der Tachingersee bildet infolge dieser starken Einschnürung einen See für sich; er ist ebenfalls ein vollständig konkaves Becken von 15,8 m größter Tiefe und einem Flächeninhalt von 2,41 qkm bei einer Achsenlänge von

---

[1] A. Geistbeck, Mitteilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1884. Ein Teil der Zahlenangaben ist entnommen: W. Halbfaß, Die Morphometrie der europäischen Seen. Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin 1903, S. 9, 10, und 1904, 3.

[2] Die Umrißform ist in Geistbecks Tiefenkarte nicht mehr genau, da sie wohl vor der Tieferlegung des Sees entworfen wurde. Dieselbe wurde daher den bayerischen Positionsblättern entnommen.

rund 4 km und einer größten Breite von 1000 m, welche sich in der Mitte bis 500 m verengt. Daß der Tachingersee ein See für sich ist, zeigt schon die vollständig verschiedene Färbung des Wassers; der Tachingersee ist hellgrün, der Wagingersee dagegen braunschwarz.[1]) Da der Abfluß, der Achenbach genannt, am Südende des Wagingersees sich befindet, von wo er sich nordwärts wendend in die Salzach ergießt, so bildet der Wasserarm bei Tettenhausen den Abfluß des Tachingersees. Es herrscht dort auch eine ständige Strömung gegen den Fischingerwinkel, wie der Verfasser selbst zu wiederholten Malen beobachten konnte, eine Strömung, die nach Aussage der Fischer nur selten umschlägt.

Zu den Beobachtungen der Seiches dieses Sees stand mir ein von mir selbst konstruiertes transportables Limnimeter[2]) zur Verfügung. Seine große Empfindlichkeit macht das Instrument zu Untersuchungen an kleineren Seen besonders geeignet, bei denen die Amplituden der Schwingungen gewöhnlich nur 1 bis 2 mm betragen; die große Handlichkeit desselben ermöglichte einen so raschen Wechsel der Beobachtungspunkte, daß die Periodendauer sowohl als auch die Lage der Knotenlinien fast aller nicht zu selten auftretenden Schwingungen in kurzer Zeit hinreichend genau festgestellt werden konnten. Um eine noch raschere Aufstellung zu ermöglichen, wurde eine Änderung insofern angebracht, als der ganze Apparat direkt auf dem Schutzzylinder befestigt und dieser am Ufer eingegraben wurde. Die Aufstellung war so gewöhnlich in 15 Minuten vollendet.

Dabei wurde so verfahren, daß das Limnimeter zuerst an den Enden eines der Becken aufgestellt wurde und dann dort so lange verblieb, bis größere Schwingungen aufgetreten waren. Gleichzeitig wurden an mehreren ausgewählten Punkten Aufzeichnungen des Wasserstandes mit dem von mir für solche

[1]) Seine größeren Zuflüsse kommen von den Mooren südlich des Sees.

[2]) Eine kurze Beschreibung des Limnimeter findet sich in der oben erwähnten Dissertation S. 38 sowie in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 24, 180, 1904.

Vergleichsbeobachtungen konstruierten Zeigerlimnimeter[1]) gemacht, wodurch die Schwingungsphasen und Amplituden verglichen werden konnten. Alsdann wurde das Hauptlimnimeter in der Nähe der einzelnen Knotenlinien aufgestellt, um diese durch gleichzeitige Aufnahmen mit dem Zeigerlimnimeter in unmittelbarer Nähe genauer festzulegen und außerdem Schwingungen höherer Ordnung, die an den Enden nie rein auftreten, sowie eventuelle Querseiches aufzufinden. Das selbstregistrierende Limnimeter stand so an 8 verschiedenen Punkten des Sees und das Zeigerlimnimeter an 12 Punkten, welche z. T. mit den 8 Hauptstationen zusammenfallen. Letztere sind in der Karte mit den laufenden Nummern (I, II . . . . VIII), die gleichzeitig sekundierenden Nebenstationen durch I_1 u. s. w. bezeichnet.

Die ganze Untersuchung am See selbst nahm nur etwas mehr als einen Monat Zeit in Anspruch. Dies zeigt zugleich, wie rasch mit dem genannten einfachen und leichten Instrumentarium (Gesamtgewicht 10 kg) eine solche Untersuchung ausgeführt werden kann. Ich glaube daher, dasselbe auch für Forschungsreisen empfehlen zu können.

Ich darf hier nicht übergehen, daß mir die Untersuchungen durch die bereitwillige Hilfe mehrerer Seeanwohner erleichtert wurden. Besonders erwähnen muß ich Herrn gepr. Lehramtskandidaten P. Gsöttner aus Waging, welcher in meiner Abwesenheit die Beaufsichtigung des Limnimeters übernahm; ferner wurde die rasche Versetzung des Instrumentes dadurch ermöglicht, daß mir die Herren Gebrüder Sager in Gessenberg ein Boot vollständig zur Verfügung stellten. Auch hier sei den genannten Herren bestens gedankt.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Professor Dr. Hermann Ebert an der K. Technischen Hochschule in München, welcher wie meinen früheren Untersuchungen so auch diesen jegliche Förderung zuteil werden ließ.

---

[1]) Dissertation S. 7 und Petermanns Mitteilungen 1904, Heft XII.

Ergebnisse der Beobachtungen an den einzelnen Stationen.

Die Hauptstationen sind im folgenden in der Reihenfolge, in der sie zeitlich aufeinanderfolgend benutzt wurden, aufgeführt; bei jeder Station sind die Ergebnisse für die einzelnen Seiches, wie sie aus den Limnogrammen erhalten wurden, in Tabellen zusammengestellt worden, um den Gang der Untersuchungen im einzelnen verfolgen zu können. Aus der Häufigkeit des Auftretens einer Seiche, wie aus der Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen in demselben Limnogramme und der Größe der Amplituden kann gewöhnlich schon auf die Lage des Beobachtungspunktes zur Knotenlinie der entsprechenden Schwingung geschlossen werden. In den Tabellen selbst steht unter T die Dauer der gemessenen Seiche in Minuten, unter n die größte Anzahl Schwingungen, welche in einer Reihe gemessen werden konnten, und unter 2a die größte Doppel-Amplitude der betreffenden Seiche in Millimetern.

I. Fisching SW., in der Südwestecke des Fischingerwinkels; vom 15.—19. April 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	17 Min. S.	16,80	75	ständig	7	schöne Reihen
2	12 Min. S.	11,80	6	selten	2	in dikroter Form häufig
3	4 Min. S.	3,87	18	öfters	1	bei Ostwind
4	$3^1/_2$ Min. S.	3,46	25	häufig	1	Schwebungen mit 3

Gleichzeitige Aufnahmen mit dem Zeigerlimnimeter:

Ort	Seiche	in Fisching	Bemerkung
1. Gaden, 2000 m südlich Fisching	17 Min. nicht 12 Min.; 1,5 mm 3,45 Min.; $^1/_4$ mm	$1^1/_2$ mm entg. Phase nicht	in dikroter Form

Ort	Seiche	in Fisching	Bemerkung
2. Wolkersdorf, am Nordufer des Weitsees	3,8 Min.; ½ mm 7,5 Min.; ½ mm	1 mm; entg. Ph. nicht	
3. Petting, am Südende des Sees	17 Min.; 4 mm	4 mm; entgeg.	
4. Seefischer, am Nordende des Tachingersees	12½ Min.; 6 mm	17 Min.; rein	12½ Min. S. Eigenschwingung des Tachingersees
5. Fisching, Nordwest	17 Min.; 2,5 mm	17 Min.; 2 mm	also Fisching NW-Ende der Axe

II. Seefischer, am Nordende des Tachingersees; vom 19.—22. April 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	62,4	10	häufig	5	kurze Reihen
2	17 Min. S.	16,82	25	einmal	2	unregelmäßig
3	12½ Min. S.	12,57	35	sehr häufig	2	
4	6,3 Min. S.	6,28	55	„ „	5	
5	3½ Min. S.	3,44	16	einmal	1	

Beobachtung mit dem [illegible]:

Ort	Seiche	in Seefischer	Bemerkung
6. [illegible], am Südende des Tachingersees	62 Min.; 3 mm 12½ Min.; ¾ mm 6,3 Min.	gleiche Ph.; 3 mm entg. Ph.; 1 mm gleiche Phase	sehr kurze [illegible]

III. A n, am Südufer des Tachingersees; vom 22.—25. April 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	62,25	10	häufig	9	
	17 Min. S.			nie		
2	$12^1/_2$ Min. S.	12,54	28	sehr häufig	13	schöne Reihen
3	6,3 Min. S.	6,27	20	häufig	4	
4	$3^1/_2$ Min. S.	3,51	17	öfters	1	

IV. Tettenhausen, 250 m nördlich der Seebrücke; vom 25.—26. April.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	—	2	öfters	5	am Anfang einer neuen Reihe
2	17 Min. S.	16,88	16	häufig	5	
3	$12^1/_2$ Min. S.	—	8	öfters	3	
4	6,3 Min. S.	6,26	30	sehr häufig	10	
5	$4^1/_2$ Min. S.	4,67	26	häufig	4	
6	3 Min. S.	3,0	22	einmal	1	

V. Horn, am Westufer der südlichen Einschnürung. Auf dem Transporte nach Petting am 26. April wurde das Instrument über Mittag hier aufgestellt und während $3^1/_2$ Stunden gemessen:

1. Die 17 Min. S., rein mit 2 mm Amplitude. Ein Vergleich mit Tettenhausen gibt eine Phasenverschiebung von $5^1/_2$ Min.
2. Die $3^1/_2$ Min. S. von sehr kleiner Amplitude.

VI. Petting, am rechten Ufer des regulierten Seeabflusses, 50 m flußabwärts; vom 26. April bis 6. Mai 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	62,00	8	öfters	4	
2	17 Min. S.	16,90	26	häufig	18	
3	$12^1/_2$ Min. S.	—	—	öfters	—	nur in der Form der Schwebung mit der 12 Min. S.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
4	12 Min. S.	11,78	54	sehr häufig	12	
5	9 Min. S.	8,6 bis 8,8	8	zweimal	2	kurze Reihen
6	7½ Min. S.	7,50	22	häufig	70	
7	6 Min. S.	6,0	5	öfters	1	nur ganz kurze Reihen
8	4,7 Min. S.	4,7	5	selten	1	
9	3,8 Min. S.	3,8	6	selten	1	
10	aperiodische Schwankungen (Windstau), häufig.					

Gleichzeitige Beobachtungen mit dem Zeigerlimnimeter.

Ort	Seiche	in Petting	Bemerkung
1. Fisching Nordwest und gleichzeitig[1]) in	17 Min.; 1½ mm 12 Min.; ½ mm	17 Min.; 1½ mm gleiche Ph.	kleine Amplitude
2. Tettenhausen	17 Min.; ½ mm 12½ Min.; (½ mm) 6,3 Min.; 1 mm	17 Min.; 2 mm nicht nicht	Phase nicht zu vergleichen
3. Wolkersdorf, gleichzeitig mit Fisching[1])	17 Min.; nicht 11,7 Min.;	17 Min.; 2 mm entgeg. Ph.	und entg. Phase mit Fisching NW.

VII. Buchwinkel, ungefähr in der Mitte des Westufers des Wagingersees; vom 6.—10. Mai 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	62,7	10	häufig	4	
2	17 Min. S.	16,9	24	„	1	
3	7½ Min. S.	7,50	5	zweimal	1	
4	4 Min. S.	4,0	6	selten	½	
5	3½ Min. S.	3,44	8	öfters	½	
6	3 Min. S.	3,0	5	einmal	1	

[1]) Herr Gsöttner beobachtete in Fisching 3 Stunden lang, während ich selbst gleichzeitig zuerst in Tettenhausen, dann in Wolkersdorf Aufzeichnungen machte.

Gleichzeitige Aufnahmen mit dem Zeigerlimnimeter in Seeleiten, 400 m nördlich:

In Seeleiten wurde die 12 Min.-Seiche mit 0,4 mm Doppelamplitude gemessen, in Buchwinkel dagegen war sie nicht zu erkennen, in Buchwinkel die 17 Min.-Seiche mit $^{1}/_{2}$ mm Doppelamplitude, in Seeleiten dagegen nicht. Hiedurch waren die Knotenlinien beider Seiches ungefähr festgestellt.

VIII. Moosmühle, ungefähr in der Mitte des Westufers des Tachingersees; vom 10.—18. Mai 1905.

Nr.	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	2a in mm	Bemerkung
1	62 Min. S.	61,5	10	häufig	8	
2	17 Min. S.	—	6	selten	1	
3	$12^{1}/_{2}$ Min. S.	(12,6)	9	öfters	2	
4	6,3 Min. S.	**6,25**	36	sehr häufig	4	schöne Reihen
5	$3^{1}/_{2}$ Min. S.	3,48	30	häufig	4	
6	$1^{1}/_{2}$ Min. S.	1,56	20	öfters	2	besonders bei Ostwind

Gleichzeitige Beobachtungen mit dem Zeigerlimnimeter wurden gemacht:

1. In Tettenhausen und gleichzeitig in Au:[1])

a) Die $12^{1}/_{2}$ Min.-S. an allen 3 Punkten mit gleicher Phase; die Amplituden verhielten sich: Moosmühle : Au : Tettenhausen = 1 : 7 : 3.

b) Die 6,3 Min.-S. hat in Au und Tettenhausen entgegengesetzte Phase zu Moosmühle und die Amplituden verhielten sich: Moosmühle : Au : Tettenhausen = 5 : 1 : 4.

c) 17 Min.-S. nur in Tettenhausen mit sehr kleiner Amplitude, in Au und Moosmühle nicht.

2. Eine Beobachtung 500 Meter nördlich Moosmühle fiel in eine Zeit, wo keine meßbare Schwingung auftrat.

[1]) Meine Frau beobachtete in Tettenhausen, während ich selbst in Au Aufzeichnungen machte.

Hiemit waren die Beobachtungen nach 5 wöchentlic
Dauer beendigt. Die Ergebnisse sind nun im folgenden
jede Seiche einzeln zusammengestellt, indem die Stationen
einem See-Ende ausgehend geordnet sind. Jeder Station
das beobachtete Amplitudenverhältnis, umgerechnet auf
Amplitude 100 an einem Ende, beigefügt. Das Vorzei
gibt Aufschluß über die Phase der Schwingungsbewegung.

Das allgemeine Schwingungsbild des Sees.

1. Die 62 Min.-Seiche.

Seefischer	+ 100	
Moosmühle	+ 70	
Au	+ 50	
Tettenhausen	+ 30	
Fisching NW	0	
Fisching SW	0	
Horn	0	0 Wolkersdorf
Gaden	—	
Buchwinkel	— 25	
Petting	— 50	

Die 62 Min.-Seiche ist darnach die uninodale Län
schwingung des vereinigten Waginger-Taching
Sees. Der Knoten befindet sich zwischen den bei
Seeeinschnürungen (siehe Karte).

Eine Vorausberechnung der Periode nach
P. Du Boysschen Formel[1]) hatte 36.2 Min. ergeb
die Beobachtung ergab fast den doppelten Wert. Du
die Auffindung dieser großen Periode war da
deutlich die Unzulänglichkeit der P. Du Boyssch
Formel erwiesen. Es war sofort klar, daß die starken E
schnürungen in der Mitte der Längsachse mitwirken mü

[1]) P. Du Boys: Essai théorique sur les seiches. Arch. Gen. III
S. 629 ff.

Das große Verdienst Professor Chrystals nun ist es, in einer neuen Theorie, seiner hydrodynamischen Theorie der Seiches,[1]) nicht nur die Unzulänglichkeit der alten P. Du Boysschen Theorie erwiesen zu haben, sondern alle bis jetzt unerklärten und z. T. sich widersprechenden Ergebnisse der Seichesforschung mit der Theorie in Einklang gebracht und zugleich eine exakte Methode zur Berechnung der Perioden und Lage der Knoten der einzelnen Seiches eines Sees entwickelt zu haben. Die P. Du Boyssche Formel hatte für die uninodale Längsschwingung vieler Seen zu große Werte ergeben, wie für die des Starnbergersees[2]) und Madüsees[3]) und des Loch Earn,[4]) von anderen wieder zu kleine Werte, wofür unser See ein sprechendes Beispiel ist. Chrystal nun hat Klarheit in diese Frage gebracht, indem er in den genannten Schriften nachweist, daß bei konkaven Seen die Periodendauer nach P. Du Boys zu groß und bei konvexen Seen zu klein wird, wobei der Querschnitt des Sees als Rechteck von konstanter Breite angenommen ist.

Der Waginger-Tachingersee ist nun ebenfalls ein konvexes Becken, da der Seeboden bei der Brücke sich bis 5 Meter unter Wasser erhebt, so daß also nach Crystal schon hiedurch eine Vergrößerung der Periode begründet ist.

---

[1]) Chrystal, on the hydrodynamical theory of seiches; with a bibliographical sketch. Transactions of the Roy. Soc. of Edinbourgh. Juli 1905 S. 599 ff. im folgenden durch H. T. S. bezeichnet, und Some results in the mathematical theory of seiches. Proc. of the Roy. Soc. of Edinbourgh. Juli 1904. Some further results in the mathematical theory of seiches. Proc. of the Roy. Soc. of Edinbourgh. März 1905.

[2]) H. Ebert, Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches), beobachtet am Starnbergersee. Sitz.-Ber. der math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Ak. d. Wiss., Bd. XXX, 1900, Heft III.

[3]) W. Halbfaß, Stehende Seespiegelschwankungen im Madüsee. Zeitschrift für Gewässerkunde, V. Bd., H. 1, 1902 u. VI. Bd., H. 2, 1903.

[4]) Chrystal and Machagan-Wedderburn. Calculation of the periods and nodes of Loch Earn and Treig. Transaction of Roy. Soc. of Edinbourgh. Vol. XLI. III. 1905.

Nun wirken aber bei den Schwingungsverhältnissen eines Sees, wie Chrystal im Gegensatz zu P. Du Boys im einzelnen nachweist, noch wesentlich die Änderungen des Beckenquerschnitts mit. Durch Einführung von zwei neuen Variablen v und $\sigma(v)$ kann die in Betracht kommende Differentialgleichung zweiter Ordnung auch bei komplizierteren Beckenformen von Seen annäherungsweise nach Chrystal gelöst werden. Hiebei bedeutet v die Oberfläche des Sees gerechnet von einem bestimmten Punkte aus. Also

$$v = \int b(x) \cdot dx \ldots,$$

wobei als X-Achse die geradlinig gedachte Richtung des Talweges des Sees gewählt ist und $b(x)$ die Breite des Sees senkrecht zur X-Achse darstellt. Ferner stellt $\sigma(v)$ das Produkt aus $F(x)$, dem Querschnitte des Sees an der betreffenden Stelle, multipliziert mit $b(x)$, der Oberflächenbreite, dar:

$$\sigma(v) = F(x) \times b(x) \ldots$$

Die in Betracht kommende Differentialgleichung erhält dadurch die bekannte kanonische Form der Differentialgleichungen 2. Ordnung und lautet

$$\frac{d^2 P}{dv^2} + \frac{n^2 P}{g\,\sigma(v)} = 0 \ldots$$

wobei P nur noch Funktion von v ist, und g die Erdbeschleunigung des betreffenden Ortes bedeutet. Aus v als Abszisse und σ als Ordinate kann die „Normalkurve" des Sees, wie Chrystal sie nennt, gezeichnet werden. An derselben dürfen die Berechnungen ebenso vorgenommen werden, wie wenn die Kurve selbst der Längsschnitt unseres Sees wäre und derselbe konstante Breite und rechteckigen Querschnitt hätte (vgl. Chrystal, H. T. S. § 20).

Die auf der beigegebenen Tafel unter der Tiefenkarte des Sees gezeichnete Kurve ist in dieser Weise konstruiert; dazu wurden 21 Querschnitte des Sees in vergrößertem Maßstabe gezeichnet und ihre Flächen in Ermangelung eines Planimeters

durch Abteilen in Quadratmillimeter ermittelt.[1] Die gefundenen Werte von $F(x)$ wurden dann mit der Oberflächenbreite $b(x)$ multipliziert. In gleicher Weise wurden die Werte für v d. i. die Oberfläche des Sees bis zu dem betreffenden Querschnitte ermittelt. Die σ_1, σ_2 ... sind als Ordinaten nach unten hin aufgetragen, so daß also die Kurvenmaxima in Wirklichkeit je einem Minimum der dargestellten Größe σ entsprechen; die Abszissen v_1, v_2 ... wachsen nach rechts hin, wobei 1 mm der Abszissen = 10^5 qm und 1 mm der Ordinaten = 25×10^5 cbm bedeutet.

Die Kurve wurde, wie vorauszusehen war, ziemlich kompliziert. Sie hat 3 Maxima und 4 Minima. Das 1. Maximum entspricht der Einengung bei Horn, wo $\sigma(v_{11}) =$ 0,22 mm ist, das 2. der Einschnürung an der Seebrücke mit $\sigma(v_{14}) = 0{,}01$ mm und das 3. der geringen Breite in der Mitte des Tachingersees mit $\sigma(v_{19}) = 0{,}7$ mm. Eben diese Maxima mit dazwischen gelagerten Minimis erlauben nicht die Normalkurve des Waginger-Tachingersees annäherungsweise durch eine der einfachen Kurven zu ersetzen, für welche Chrystal die Lösungen der Differentialgleichung in den §§ 27 u. ff. mitteilt. Die Kurve gehört vielmehr zu dem Typus, wie ihn Chrystal in § 40 seiner H. T. S. behandelt; dort sind aber nur 1 Maximum und 2 Minima angenommen. Um die Seicheskonstanten unseres Sees exakt zu finden, müßte also eine der Gleichung 49 S. 632 entsprechende aufgelöst werden. Einen Begriff von der Rechnungsarbeit, welche diese Auflösung erfordern würde, erhält man, wenn man berücksichtigt, daß schon die Probe, ob die aus den beobachteten Werten erhaltenen Wurzeln die Gleichung befriedigen, eine jedesmalige Auswertung von 48 Reihen, welche zum Teil langsam konvergieren, erfordert. Die

[1] Die Umrißform des Waginger-Tachingersees ist in der S. 448 zitierten Geistbeckschen Tiefenkarte sehr ungenau und gibt zu große Werte für die genannten Variablen. Die angegebenen Werte für $b(x)$ wurden daher, wie schon oben S. 448 bemerkt, den Bayer. Positionsblättern entnommen.

Kurve ist dabei aus 12 Stücken von Parabeln zusammengesetzt gedacht.

Freilich wird diese Rechnung für die von Chrystal entdeckten Funktionen der Seiches — Sinus $S(c, v)$ und Seiche-Cosinus $C(c, v)$ (H.T.S. § 24 S. 617 u. 618) wesentlich dadurch erleichtert, daß J. Halm[1]) für die Werte $S'(c, 1)$ und $C'(c, 1)$ derselben, die hierbei in Betracht kommen, geeignete Tafeln berechnet hat (a. a. O. S. 671). Dieselben standen mir leider bei dieser meiner Bearbeitung noch nicht zur Verfügung.

Bereits ohne alle Rechnung ersieht man aus der Normalkurve, daß die Einengungen am Knoten eine stark konvexe Form der Kurve erzeugen. Die anormal lange Dauer der unninodalen Seiche steht somit ganz im Einklange mit der Chrystalschen Theorie.

Daß trotz der beiden Einschnürungen eine Schwingung des ganzen Sees möglich ist, dürfte nur darin seinen Grund haben, daß das nördliche und südliche Becken bis zu den genannten Einschnürungen ungefähr gleiche Dauer ergeben.[2]) Wir dürfen zu einer solchen vergleichenden Berechnung nach Chrystal die Du Boyssche Formel benützen, welche wirklich für beide Becken fast genau 16 Minuten ergibt. Die beiden Einschnürungen liegen also symmetrisch zum Knoten, wie ja auch die Beobachtung ergeben hat.

Die Amplituden der 62 Minuten-Seiche waren während der ganzen Beobachtungszeit nur klein (größte Amplitude 10 Millimeter) und die Dämpfung sehr stark, so daß die längste Reihe nur 10 Schwingungen zählte. Jedenfalls wirkt die ungleich starke Einengung an der Seebrücke von nur 90 qm Querschnittsfläche gegenüber der südlichen bei Horn von noch rund 2000 qm störend. An-

[1]) J. Halm, On a group of linear Differential Equations of the 2nd Order including Professor Chrystals Seiche-Equations. Transact. Roy. Soc. of Edinbourg, 41, Part III, No. 26, S. 651, 1905.

[2]) Hierauf hat mich Herr Professor Chrystal in einer gütigen brieflichen Mitteilung neben vielen anderen wertvollen Anregungen aufmerksam gemacht.

den kurzen Reihen konnte auch die Dauer der Schwingung nicht genau gemessen werden. Die Messungen schwanken zwischen 63,5 Min. und 60,4 Min. Ein Einfluß der Wasserstandsänderung, welche dazu nur 12 cm betrug,[1]) konnte deshalb nicht wahrgenommen werden.

Das Verhältnis der Amplituden in Petting und Seefischer ist ungefähr 1 : 2 und stimmt mit dem Verhältnis der Seefläche nördlich des Knotens von 300 ha zu der südlich desselben gelegenen von rund 640 ha ungefähr überein.

2. Die 17 Min.-Seiche.

Die Beobachtungsergebnisse seien auch hier ebenso, wie oben, zusammengestellt:

Petting	+ 100	
Buchwinkel	+ 10	
Seeleiten	0	
Gaden	0	(0) Wolkersdorf
Horn	— 50	
Fisching SW.	— 90	
Fisching NW.	— 110	

Die Seiche von 16,80 Min. mittlerer Dauer ist somit die uninodale Längsschwingung des eigentlichen Wagingersees mit den beiden Schwingungsbäuchen in Petting bezw. Fisching Nordwest und der Knotenlinie zwischen Seeleiten und Gaden (s. Karte).

Um die Chrystalsche Theorie auf dieses Teilbecken anzuwenden, dürften wir den Zweig der Normalkurve bis zum Punkte 14 benützen. Die Kurve ließe sich aus 6 Parabeln zusammensetzen, so daß wir genau den Seentypus hätten, wie ihn Chrystal in dem schon erwähnten § 40 seiner H. T. S. behandelt. Aus dem gleichen Grunde wie bei der 62 Min.-Seiche muß ich aber auch hier auf eine genaue Berechnung

[1]) Dem Vorstande des K. Bayer. Hydrotechnischen Bureaus, Herrn Oberbaurat Hense, sei auch an dieser Stelle für die gütige Übersendung der Pegelaufzeichnungen an der Seebrücke ergebenst gedankt.

der Seichekonstanten zunächst verzichten; dazu kommt hier noch der Umstand, daß das Ende der X-Achse noch nicht sicher genug bekannt ist. Die Schwingungsachse kann nämlich einmal abzweigen nach Fisching Nordwest oder sich in den Tachingersee hinein erstrecken.

Auf einen anderen Weg, bei Seen von so komplizierter Normalkurve die exakte Theorie zu prüfen, möchte ich hier aufmerksam machen. In Fällen, wo der eine Teil der Normalkurve bis zu dem durch Beobachtung gefundenen Knoten regelmäßig verläuft, so daß er durch eine Parabel, eine Quartic-kurve oder eine gerade Linie ersetzt werden kann, muß die Dauer der Hauptschwingung mit derjenigen eines symmetrischen Sees übereinstimmen, der eine Länge gleich dem doppelten Knotenabstand hat. So stimmt die Dauer der Hauptschwingung bei einer Normalkurve von der Form einer geneigten Geraden (vgl. Chrystal S. 641 § 51) mit derjenigen eines Sees mit 2 symmetrisch gegen die Mitte geneigten Geraden (vgl. § 49) von der Länge 2 × 0,3943 l und Tiefe 0,3943 h überein. Nämlich

$$T_1 = \frac{4\pi l}{3{,}832\sqrt{gh}} = T_1' = \frac{2\pi l'}{2{,}405\sqrt{gh'}} = 1{,}043\,\frac{\pi l}{\sqrt{gh}}$$

Aus der Beobachtung hat sich nun der Knoten der 17 Min.-Seiche ziemlich sicher bei Punkt 8 der Normalkurve ergeben. Der Teil von 0 bis 8 läßt sich annäherungsweise durch eine Parabel ersetzen, wie es in der Zeichnung geschehen ist. Die Dauer eines symmetrisch parabolischen Sees von der Länge 93,75 und der Tiefe 18,75[1]) ergibt nach Chrystal S. 622 § 28:

$$T_1 = \frac{\pi l}{\sqrt{2gh}};$$

für $l = 93{,}75 \times 10^2\ m^2$ und $h = 18{,}75 \times 25 \times 10^4\ m^2$ und $g = 9{,}81$ m/sec² $\pi = 3{,}14$ gesetzt, erhält man 966,2 sec = 16,1 Min., welcher Wert mit dem beobachteten von

[1]) Da der Maßstab der Kurve verkleinert wurde, mußten die ursprünglich ganzzahligen Maße umgerechnet werden.

16,80 Min. tatsächlich auf 4 % genau übereinstimmt. Da die Lage des Knotens gewöhnlich nur angenähert durch Beobachtung bestimmt werden kann, so kann man auch nur eine erste Annäherung erwarten. In unserem Falle aber dürfte der Knoten ziemlich genau gefunden sein, wie aus den Beobachtungen in Seeleiten und Gaden geschlossen werden kann, und es kann daher diese gute Übereinstimmung als eine Bestätigung der Chrystalschen Theorie gelten.

Der Rest der Normalkurve (von Punkt 8—14) gibt also die gleiche Dauer wie ein Seebecken von $2^1/_2$ mal so langer parabolischer Normalkurvenlinie. Daß die Einengung bei Horn allein die starke Verlängerung verursacht, ist unwahrscheinlich, weil sie näher dem Schwingungsbauche als dem Knoten liegt. Chrystal wiederum gibt uns einen klaren Einblick auch in so komplizierte Schwingungszustände. Er vergleicht nämlich die Seiches mit den Schwingungen einer vertikal aufgehängten Saite, welche an ihren Enden befestigt ist, zwei Vorgänge, welche wegen der Analogie der zugrunde liegenden Differentialgleichungen vollständig übereinstimmen, nur sind die Längs- und Querbewegungen zu vertauschen. Wie nämlich eine Vergrößerung der Dichtigkeit am Schwingungsbauche der Saite die Schwingungsdauer verlängert, näher dem Knoten aber nur einen geringen Einfluß ausübt, so vergrößert auch eine Einengung nahe dem Knoten die Periode einer Seiche, beeinflußt sie aber wenig, wenn sie nahe dem Bauche liegt. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß noch ein Umstand verlängernd mitwirkt; als solchen sehe ich die Kommunikation mit dem Tachingersee an, wohin sich die Schwingung, wie wir weiter unten sehen werden, in der Tat fortsetzt. Nehmen wir eine symmetrische Normalkurve von der gleichen Länge und maximalen Tiefe wie die vorliegende an, so stimmt die Dauer auffällig mit der von Chrystal als „Anomalous Seiche" bezeichneten Schwingung einer vollständigen, konkaven Quartic-Kurve überein.[1]) Nach Chrystal ist

[1]) Chrystal H. T. S., § 52, S. 643 und Some furthers Resultats . . ., S. 646, zit. S. 457.

$$T = \frac{\pi l}{\sqrt{g h}};$$

für $l = 68{,}44 \times 10^5\ m^2$ und für $h = 18{,}75 \times 25 \times 10^4\ m^2$ gesetzt, $T = 1002{,}1$ sec $= 16{,}7$ Min. (gefunden wurde 16,8), also ein merkwürdig gut stimmender Wert. **Chrystal** selbst weist darauf hin, daß diese Seiche da vorkommen kann, wo ein See durch einen engen Kanal mit einem anderen kommuniziert, wie es beim Wagingersee der Fall ist. Wenn wir daraus auch nicht schließen dürfen, daß wir die Normalkurve als Quartickurve ansehen dürfen, so müssen wir doch der Kommunikation eine verlängernde Wirkung zuschreiben.

Nach P. **Du Boys's** Formel würde man 22,0 Min. Dauer für die uninodale Seiche des Wagingersees erhalten, einen Wert, der wieder wie bei allen konkaven Seen zu groß ist. Die Lage des Knotens ergibt sich nach P. **Du Boys** etwa 100 m nördlich der tiefsten Stelle des Sees, stimmt also gut mit der Beobachtung überein und spricht für die Brauchbarkeit der Formel für diesen speziellen Zweck der Knotenauffindung, wie auch **Chrystal** hervorhebt (H. T. S. S. 611).

Diese 17 Minuten-Seiche tritt, wie eben erwähnt, auch im nördlichen Becken, dem Tachingersee auf und zwar wurde beobachtet:

Tettenhausen	+ 50
Au	0
Moosmühle	— 10
Seefischer	— 40,

wobei die Phasen nur für den Tachingersee gelten, die Amplituden dagegen mit denjenigen im Wagingersee verglichen sind. Das nördliche Becken schwingt also in dem Tempo der 17 Min.-Seiche mit, so daß nördlich Au wieder ein Knoten entsteht. Ein Phasenvergleich liegt nur einmal vor.[1]) Das Limnimeter wurde nämlich von Tettenhausen

[1]) Die zwei Aufnahmen mit dem Zeigerlimnimeter (S. 454 und 455) lieferten für Tettenhausen zu komplizierte Kurven: die 17 Min.-Seiche ist wohl vorhanden, aber hat geringe Amplitude gegen Fisching, nämlich die Hälfte. Die Phasen sind nicht genau zu vergleichen.

nach Horn gebracht (s. Seite 453), wo es nach 1 Stunde 4 Min. bereits wieder in Tätigkeit war. In Tettenhausen war eine deutliche 17 Min.-Seiche verzeichnet und in Horn ebenfalls. Da ruhiges Wetter war, darf angenommen werden, daß keine merkliche Phasenverschiebung in dieser kurzen Zeit von 1 Stunde eingetreten ist und daß daher die Phasen dieser Kurvenzüge verglichen werden dürfen. Es ergibt sich hieraus eine Phasenverschiebung von $5^1/_2$ Min. Wenn der See also in Fisching zu steigen beginnt, fällt derselbe nach etwa 3 Min. in Tettenhausen. Ich stelle mir den Vorgang so vor, daß vom Fischingerwinkel Wasser gegen Tettenhausen abfließt und dort infolge des Überdruckes gegen Seefischer zu fallen beginnt, während es in Seefischer selbst steigt. Die im Tachingersee aufgefundenen Kurvenzüge sind außerdem stets unregelmäßig. Jedenfalls zeigt das ganze Auftreten, daß die 17 Min.-Seiche keine freie Schwingung des Tachingersees ist, sondern durch den Wasserarm an der Seebrücke hindurch dem nördlichen Becken aufgezwungen wird.

3. Die $12^1/_2$ Min.-Seiche.

Die gleiche Zusammenstellung ergibt:

Seefischer	+ 100
Knoten	
Moosmühle	— 10
Au	— 75
Tettenhausen	— 30

Die Seiche von 12,56 Min. mittlerer Dauer ist sonach die uninodale Längsseiche des Tachingersees mit der Knotenlinie etwa 400 m nördlich Moosmühle. Da die Amplitude in Tettenhausen bedeutend geringer ist als in Au, so ist die Achse sehr wahrscheinlich gegen Au gerichtet. Bei Tettenhausen findet jedenfalls ein verstärktes Abfließen des Wassers gegen den Wagingersee statt, wodurch die Amplituden dort verringert werden. Daher rührt wohl auch das Auftreten dieser Seiche am Abfluß des Sees bei Petting, wohin

die Gleichgewichtsstörung vom Fischingerwinkel aus sich fortsetzt. Es dürfte daher auch diese Seiche von 12½ Min nur eine vom Tachingersee her erzwungene Schwingung sein.

Die Normalkurve des Tachingersees ist in derjenigen des ganzen Sees enthalten. Da aber das Ende der Schwingungsrichtung in Au und nicht in Tettenhausen gefunden ist, so verzweigt sich die X-Achse und die Normalkurve erhält gegen Au die Gestalt der punktierten Linie (Punkt 15' und 16'). Die Anwendung der exakten Theorie würde wieder die Behandlung des gleichen Seentypus wie beim Wagingersee erfordern (Chrystal H. T. S. § 40). Eine Annäherung etwa as 6 Stücke von Parabeln wird aber hier ungenau, weil die Ordinaten infolge der geringen Breite des Sees nur klein sind. Es dürfte daher hier die genaue Berechnung der Seichenkonstanten keine besonders gute Übereinstimmung ergeben und eine Vorausberechnung der Perioden, wie sie bei regelmäßigen Seen möglich ist und wie sie Chrystal und M. Wedderburn für den Loch Earn und Treig als Muster für derartige Berechnungen durchgeführt haben,[1]) würde eventuell nutzlos sein.

Eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung liefert hier die Du Boys'sche Formel, nämlich 12,4 Min. Periodendauer und dies Ergebnis steht ganz im Einklang mit der Chrystalschen Theorie, da unser Tachingersee, obwohl vollständig konkav, eine z. T. konvexe Normalkurve hat, und in konvex-konkaven Seen, wie es der Genfersee und Loch Ness sind, wozu auch der Tachingersee wegen seiner Normalkurve gehört, gibt die Du Boyssche Formel gute Resultate für die Periodendauer der uninodalen Seiche, wie Chrystal ausdrücklich erwähnt.[2])

Statt einer binodalen Seiche haben wir also am Waginger-Tachingersee 2 uninodale Teilschwingungen. Es mag hier besonders nochmal darauf hingewiesen sein, daß die Summe

[1]) Zit. S. 467.
[2]) Proc. R. S. 1905 S. 645, zit. S. 457.

der Perioden der beiden Teilschwingungen nur 16,8 Min. + 12,56 Min. = 29,36 Min. ergibt, also unter der halben Dauer der uninodalen Seiche des ganzen Sees zurücksteht (= 31 Min.), ein Ergebnis, das ganz im Einklang mit der Chrystalschen Theorie steht, der P. Du Boysschen Theorie aber vollständig widerspricht.

4. Die 12 Min.-Seiche.

Die Beobachtungen für diese Seiche, welche nur im Wagingersee auftrat, seien wieder zusammengestellt:

Petting	+ 100	
Buchwinkel	0	
Seeleiten	— 10	
Gaden	— 40	— 50 Wolkersdorf
Horn	0	
Fisching SW.	+ 30	
Fisching NW.	+ 40	

Die Schwingung von 11,78 Min. mittlerer Dauer ist also die binodale Seiche des eigentlichen Wagingersees mit den Schwingungsbäuchen in Petting, Wolkersdorf und Fisching Nordwest und der einen Knotenlinie etwas südlich Buchwinkel und der zweiten an der Einschnürung bei Horn.

Die 11,78 Min.-Seiche ist sonach die nächste Oberschwingung zu der 16,8 Min.-Seiche. Das Verhältnis von $T_2 : T_1$ ist 0,70. Dasselbe sollte nach P. Du Boys 0,5 sein. Das erste derartig stark abweichende Verhältnis hatte H. Ebert am Starnbergersee gefunden, nämlich 0,63,[1]) dann Halbfaß am Madüsee 0,57,[2]) also Werte größer 0,5, während am Genfersee 0,48[3]) und am Hakonesee in Japan 0,44,[4]) also Werte

[1]) H. Ebert, Period. Seespiegelschwankungen, zit. S. 457.

[2]) W. Halbfaß, Period. Seespiegelschwankungen, zit. S. 457; Seiches oder stehende Seespiegelschwankungen. Naturwissenschaftl. Wochenschr. Gustav Fischer in Jena, 23. Okt. 1904, S. 887.

[3]) F. A. Forel, Le Léman II. Lausanne 1895.

[4]) H. Ebert, Über neuere japanische Seenforschungen. J. Springer, Berlin. XXIII. 1908.

kleiner 0,5 gefunden worden waren. Der Chiemsee[1]) nun hatte mit seinem Verhältnis $T_2 : T_1 = 0{,}67$ alle anderen übertroffen und ihn übertrifft jetzt noch der Wagingersee. Forel glaubte auf Grund der ungefähr gleichen Werte an mehreren Seen darin eine neue Art Schwingungen erblicken zu dürfen und hat dieselben „Seiches à la quinte", Quintenschwingungen[2]) genannt.

Es ist wiederum Chrystals großes Verdienst, diese Frage vollständig geklärt zu haben, indem er in den mehrerwähnten Schriften[3]) nachweist, daß in Seen mit konkaver Normalkurve $T_2 : T_1 > 0{,}5$ und in konvexen Seen $< 0{,}5$ sein muß. Auch das große Verhältnis $T_1 : T_2 = 1 : 0{,}70$ ist nach seiner Theorie möglich und zwar in Seen, deren Normalkurve ein Teil einer Quartickurve ist. Chrystal gibt zugleich auf S. 603 und 604 seiner H. T. S. einen Weg an, wie aus dem Verhältnis der beiden Hauptschwingungen $T_2 : T_1$ in Seen mit quarticähnlichen Normalkurven die Periodendauer der übrigen mehrknotigen Seiches gefunden werden können; er nennt diese seine Methode „Quartic Approximation". In folgender Tabelle füge ich in der 1. Zeile die hiernach berechnete Dauer, in der 2. die angenähert beobachtete und in der 3. die nach Du Boys bestimmte Dauer an.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Nach Chrystal berechnet	—	—	7,56	5,88	4,71	3,36	3,02
Beobachtet	16,8	11,78	7,5	6,0	4,7	3,5	3,00
Nach P. Du Boys berechnet	22,0	11,0	7,3	5,4	4,5	3,67	3,14

Nach Chrystal sollte sich die Dauer jeder Oberschwingung eines Sees mit vollständiger Quartickurve als Normalkurve dem Grenzwerte $T = \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$ nähern.[4]) Bei dem Wagingersee

[1]) A. Endrös, Seeschwankungen etc., zit. S. 447.

[2]) F. A. Forel, Soc. vaud., Sc. Nat. XI, S. 149, 3. fevrier 1904.

[3]) Zit. S. 457.

[4]) Chrystal, some further results S. 646 u. H. T. S. Seite 643, zit. S. 457.

aber trifft die Bedingung, daß sich die Kurve an die V-Achse anschmiegt, nur am Nordende zu. Außerdem ist sehr wahrscheinlich, daß die Schwingungsachse der 11,78 Min.-Seiche gegen Fisching Nordwest gerichtet ist, also mit derjenigen der 17 Min.-Seiche nicht zusammenfällt. Die gute Übereinstimmung der durch die Quartic-Approximation gefundenen Werte mit den beobachteten erlaubt daher bei unregelmäßigen Seen noch nicht den Schluß, daß die Normalkurve wirklich einer Quartickurve nahe kommt. Es ist am Wagingersee im Gegenteil sehr wahrscheinlich, daß die große Dauer der binodalen Seiche durch die Einengung bei Horn verursacht wird, welche, wie die Beobachtung ergab, mit dem Knoten zusammenfällt. An dem Beispiel einer schwingenden Saite wiederum können wir ersehen, daß solche Unregelmäßigkeiten auf die Hauptschwingung weniger einwirken als gerade auf diejenigen Oberschwingungen, welche dort ihren Knoten haben. Solche Unregelmäßigkeiten können daher bei der angenäherten Berechnung der uninodalen Seiche außer acht gelassen werden, sind aber bei der Bestimmung der betreffenden Oberschwingungen wesentlich.

Es läge nahe, die Periodendauer der binodalen Seiche des Wagingersees ebenfalls direkt aus der Normalkurve zu berechnen, ähnlich wie die uninodale (auf S. 462). Nur die Mitte des Schwingungsbauches muß genau bekannt sein; sie fällt nämlich bei asymmetrischen Seen gewöhnlich nicht mit dem Knoten der uninodalen Seiche zusammen, wie dies die neue Theorie uns lehrt.[1]) Hiefür habe ich schon am Chiemsee ein deutliches Beispiel gefunden, wo der Knoten der 43 Min.-Seiche und der mittlere Bauch der 28 Min.-Seiche $3^1/_2$ km von einander entfernt liegen.[2]) Auch am Wagingersee hat die Beobachtung ergeben, daß der mittlere Schwingungsbauch in der Richtung Gaden—Wolkersdorf liegt, also ungefähr bei Punkt 9 der Normalkurve. Doch ist die Kurve nicht durch einen Zweig

[1]) Chrystal H. T. S. S. 606, § 11.
[2]) Seeschwankungen S. 51, zit. Seite 447.

einer einfachen Kurve zu ersetzen, so daß die Berechnung in diesem Falle sich nicht verlohnt, in anderen Fällen aber eine gute Gelegenheit sein kann, die Theorie ohne viel Mühe zu prüfen.

5. Die übrigen Seiches des Wagingersees.

Die $8^1/_2$ Min.-Seiche. Diese Schwingung von ungefähr 8,6 Min. mittlerer Dauer war nur aus dem Limnogramme in Petting gefunden worden und da nur in wenigen Schwingungen von kleiner Amplitude. Doch trat sie immerhin deutlich als eigene Schwingung auf. Um zu untersuchen, ob diese und andere der folgenden Seiches nicht Partialschwingungen des Weitsees in der Richtung Petting—Wolkersdorf sind, habe ich die Normalkurve des Weitsees in genannter Richtung gezeichnet. Sie ist fast genau eine gegen Wolkersdorf geneigte Gerade und hat daher die typische Form, wie sie Chrystal in § 51 der H. T. S. behandelt. Hiernach ist

$$T_1 = \frac{4\pi l}{3{,}832\sqrt{gh}} \ldots;$$

für $l = 59{,}37 \cdot 10^5\ m^2$ und $h = 37{,}5 \times 25 \times 10^5\ m^3$ ergibt sich $T_1 = 10{,}7$ Min., ein Wert, der von 8,6 Min. stark abweicht, so daß auch die Berechnung keinen Aufschluß gibt.

Die 7,5 Min.-Seiche wurde in Petting häufig beobachtet, ferner in Buchwinkel, aber dort selten. Nach der Quartic-Approximation (s. Tabelle S. 28) stimmt sie auffallend genau mit der trinodalen Seiche des Wagingersees überein. Doch ist dieses Ergebnis durch die Beobachtung nicht erwiesen, da die $7^1/_2$ Min.-Seiche im Fischingerwinkel nie beobachtet wurde und auch für die anderen Punkte keine Phasenvergleichungen vorliegen. Doch muß der nördliche Knoten in den Fischingerwinkel hineinfallen, da der binodale Knoten bereits bei Horn liegt. Das Limnimeter in Fisching Südwest stand somit nahe am Knoten und von Fisching Nordwest liegen nur Aufzeichnungen während weniger Stunden vor. So wäre es möglich, daß sie in dem genannten Winkel doch auftritt. Die Ampli-

tuden dieser Seiche sind in Petting zeitweise sehr groß, doch ist die Dämpfung eine rasche. Jedenfalls wirkt die Einschnürung bei Horn störend.

Die Seiche von 6,0 Min. wurde ebenfalls nur in Petting beobachtet. Sie kann die 4-knotige Seiche des Wagingersees sein, wie wir aus der Tabelle S. 468 ersehen, welche vielleicht infolge der Einschnürung selten auftritt. Die Seiche kann aber ebenso Partialschwingung des Weitsees sein und zwar binodale Schwingung Petting—Wolkersdorf. Aus dem oben berechneten Werte von 10,7 Min. für die uninodale Seiche gibt nämlich die Chrystalsche Quartic-Approximation für die binodale 5,8 Min. Wir sehen hieraus, daß die Theorie in Seen mit Teilbecken mit Vorsicht angewendet werden muß.

Die Seiche von 4,67 Min. wurde in Petting und Tettenhausen beobachtet; sie kann mehrknotige Schwingung eines der beiden Teilbecken oder beider sein. Nach der Tabelle S. 468 stimmt die Dauer auffallend mit der 5-knotigen Seiche des Wagingersees überein.

Die 3,87 Min.-Seiche konnte in Fisching, Wolkersdorf und Petting mit gleicher Dauer gemessen werden. Sie ist also jedenfalls eine mehrknotige Seiche des Wagingersees. Über die Knotenzahl gibt auch die Quartic-Approximation keinen Aufschluß.

Eine Seiche von 3,0 Min. wurde nur in Buchwinkel gefunden und kann ebenso mehrknotige Schwingung des Wagingersees oder des Weitsees oder Querseiche sein.

6. Die übrigen Seiches des Tachingersees.

Die 6,25 Min.-Seiches wurde nur im Tachingersee beobachtet. Die Zusammenstellung ergibt:

Seefischer	+ 100
1. Knoten	
Moosmühle	— 100
2. Knoten	
Au	+ 20
Tettenhausen	+ 80

In dieser Seiche ist also die binodale Schwingung des Tachingersees gefunden. Der 1. Knoten liegt zwischen Seefischer und Moosmühle, der 2. etwas nördlich Au. Diese Schwingung setzt sich, wie die Amplituden deutlich ersehen lassen, bis Tettenhausen fort und die Schwingung wird weniger beeinflußt durch die Kommunikation mit dem Wagingersee. Auf das Verhältnis der uninodalen zur binodalen Seiche, nämlich 12,56 : 6,2[illegible] = 1 : 0,49 sei noch besonders aufmerksam gemacht. Obwohl die Achse der binodalen Seiche länger ist als die der uninodalen, bleibt das Verhältnis doch noch unter 0,5. Der Grund hiefür ist nur in der konvexen Form der Normalkurve des Sees zu suchen. Wir haben somit an unserem See auch eine Bestätigung der Chrystalschen Theorie für konvexe Seen gefunden.

Die Seiche von 3,5 Min. Dauer trat häufig in Seefischer, Moosmühle und Au auf, nicht aber in Tettenhausen. Wenn ich sie für eine 4-knotige Seiche des Tachingersees halte, so ist das nur eine Vermutung. Sie setzt sich auch in den Wagingersee hinein fort, wie die Beobachtung in Fisching und Horn ergab.

Die Seiche von 1,56 Min. bei Moosmühle kann ebenso mehrknotige Seiche des Tachingersees als Querseiche sein. Der Umstand, daß sie nur in Moosmühle so häufig und mit so großer Amplitude auftritt, spricht für eine Querseiche. Darüber könnte natürlich nur eine gleichzeitige Beobachtung an diametral gegenüberliegenden Punkten Sicheres ergeben.

Die durch Chrystals Quartic-Approximation berechneten Werte können hier gar nicht mit den beobachteten verglichen werden, da die uninodale und binodale Seiche nicht Schwingungen ein und desselben Beckens sind; denn die beiden Normalkurven weichen stark von einander ab; vgl. oben S. 46[illegible].

Wir sehen überhaupt an unserem See, daß die Anwendung der exakten Berechnungsmethode für die Perioden und Knoten der Seiches eines unregelmäßigen Sees neben den Schwierigkeiten dazu noch zu ganz irrigen Ergebnissen führen kann.

wenn nicht eine genaue Beobachtung vorausgegangen ist. Einmal kann sich die Achse verzweigen, wie wir es an unserem See einmal vor Wolkersdorf, dann im Fischinger Winkel und gegen Au gefunden haben, so daß besonders mehrknotige Schwingungen nach einer der Zweigrichtungen oder auch nach beiden Richtungen schwingen können, wie wir uns es an dem Beispiel einer schwingenden Seite mit einer Verzweigung klar machen können. Besonders deutliche Beispiele habe ich schon am Chiemsee gefunden, worauf ich bei der Veröffentlichung der weiteren Untersuchungen dieses Sees zurückkommen werde. Dann kommt speziell am Waginger-Tachingersee die Kommunikation der beiden Teilbecken noch dazu. Da nämlich durch den engen Kanal an der Seebrücke hindurch die Hauptschwingung des Sees möglich ist, wie wir oben S. 456 gesehen haben, können auch alle anderen Schwingungen sich in das andere Becken fortsetzen. Bei den Schwingungen von geringer Periodendauer ist die direkte Beobachtung, ob dieselben wirklich im Nachbarbecken auftreten, sehr erschwert, da die Dauer der verschiedenen mehrknotigen Schwingungen sich sehr nahe kommen und diese Oberschwingungen auch stärker gedämpft sind.

In der Strömung an der Seebrücke müssen sich dagegen alle Schwingungen nachweisen lassen. Wie schon einleitend erwähnt, herrscht dort eine ständige Strömung gegen den Wagingersee, weil der Kanal zugleich Abfluß des Tachingersees ist. Die Strömung ändert nun stets ihre Stärke, wie ich persönlich beobachten konnte. In 15 Minuten nahm die Strömung bei ruhigem See rasch von 4—18 m pro Minute zu und ging bis 6 m wieder zurück. Den Einfluß der Kommunikation auf die Seiches könnte man wohl nicht besser feststellen als durch vorübergehende Absperrung an der Seebrücke, worauf auch Herr Professor Chrystal mich aufmerksam machte. Es wäre sicher von großem Interesse, diesen gewaltsamen Eingriff in die mächtigen Wasserbewegungen zu verfolgen, einen Eingriff, wie er schon seinerzeit durch die Tieferlegung des Seespiegels und noch mehr durch die künstliche Zusammen-

schnürung des Armes durch Aufführen eines 80 m langen Dammes vorgenommen wurde.

Zum Schlusse seien die Ergebnisse der Untersuchungen hier kurz zusammengefaßt:

1. Am Waginger-Tachingersee waren 13 Schwingungen verschiedener Dauer zu messen. Trotz der vielen Schwingungen war ein Aufdecken des Schwingungsbildes in der kurzen Beobachtungszeit von 5 Wochen möglich, weil der See bei seinen drei Teilbecken doch eine ausgesprochene Längsrichtung besitzt. Die Amplituden der Schwankungen waren in der Beobachtungszeit im Verhältnis zu anderen Seen klein. Wenn auch die größte Schwankung von 75 mm die einiger bis jetzt untersuchter Seen übertrifft, so blieb doch sonst die doppelte Amplitude immer unter 18 mm.

2. Der See besitzt ungeachtet der starken Einschnürung an der Seebrücke eine uninodale Längsschwingung von 62 Minuten mittlerer Dauer, deren Knoten zwischen den beiden Seeeinschnürungen gefunden wurde. Die unverhältnismäßig lange Periodendauer steht ganz im Widerspruch mit dem nach der P. Du Boysschen Formel berechneten Werte von 36,2 Min., ist aber nach Prof. Chrystals neuer hydrodynamischer Theorie der Seiches sehr wohl verständlich, da die Normalkurve des Sees am Knoten konvex ist und eine geringe Ordinate aufweist. Eine binodale Seiche konnte nicht beobachtet werden.

3. Jeder der Teilseen hat dafür seine eigene uninodale Seiche, der Wagingersee eine solche von 16,80 Minuten mittlerer Dauer, deren Knoten bei Seeleiten liegt, der Tachingersee von 12,56 Minuten mittlerer Dauer mit dem Knoten ungefähr 400 m nördlich Moosmühle. Die beiden Teilschwingungen geben also zusammen nur 29,36 Minuten Dauer gegenüber der Hauptschwingung von 62 Minuten Dauer.

4. Beide Hauptseiches der einzelnen Teilbecken setzen sich durch die starke Einschnürung an der Seebrücke in das andere Becken hinein fort, wobei die 17 Min.-Seiche eine Phasenverschiebung von 5¹/₄ Min. erleidet und einen weiteren

Knoten nördlich Au aufweist. Die Seiches sind hiebei keine „freien" Schwingungen des Nachbarbeckens, sondern sogenannte „erzwungene" Seiches.

5. Beide Seen haben auch ihre eigenen binodalen Seiches und zwar der Wagingersee eine solche von 11,78 Min. Dauer mit der einen Knotenlinie etwas südlich Buchwinkel und der zweiten an der Einschnürung bei Horn. Die binodale Seiche des Tachingersees hat 6,25 Minuten mittlere Dauer.

6. Das Verhältnis der Periodendauer von erster Oberschwingung zur Grundschwingung ist im Wagingersee 0,70 und im Tachingersee 0,49, das einemal ist also $T_2 : T_1 > 0{,}5$, in Übereinstimmung mit der Chrystalschen Theorie für konkave Seen, das anderemal $< 0{,}5$; auch dieses letztere Verhältnis steht mit der neuen Theorie in Übereinstimmung. Freilich ist das Becken des Tachingersees selbst konkav, aber die Normalkurve des Sees ist in der Nähe des Knotens der uninodalen Seiche konvex.

7. Außerdem wurden mehrknotige Schwingungen gefunden. Eine häufige Seiche von 7,5 Min., eine zweite, seltenere von 6,0 Min. und eine dritte von 4,67 Min. Dauer sind wahrscheinlich die 3- resp. 4- und 5-knotigen Seiches des Wagingersees; auch die 3,8 Min.-Seiche ist mehrknotige Seiche des südlichen Sees und eine seltene Seiche von 8,6 Min. scheint Partialschwingung des Weitsees zu sein. Eine häufig auftretende Seiche des Tachingersees hat 3,5 Min. Dauer und ist wahrscheinlich 4-knotige Seiche. Eine Schwingung von 3,0 Min. in der Mitte der Achse des Wagingersees und eine solche von 1,56 Min. in der Mitte des Tachingersees können ebenso gut mehrknotige Seiches als „Querseiches" sein.

8. Der See erweist sich wegen der komplizierten Form seiner Normalkurve nicht gerade geeignet zur Prüfung der exakten Chrystalschen Theorie. Immerhin ergaben sich eine größere Reihe bedeutsamer Bestätigungen dieser Theorie im einzelnen. Die Anwendung der Theorie zur Bestimmung der mehrknotigen Seiches ist ohne vorausgegangene eingehende Beobachtung mit Vorsicht anzuwenden. Denn die Beob-

achtungen an unserem See haben ergeben, daß die Schwingungsachsen der mehrknotigen Seiches unter Umständen nicht die gleichen sind, wie die der uninodalen, weil die Achse sich verzweigen kann, was hier an drei Stellen der Fall war; besonders versagt dann die sog. Quartic-Approximation. Als weiterer erschwerender Umstand kommt hier die Kommunikation beider Teilseen durch den Kanal an der Seebrücke dazu, dessen Einwirkung auf die mehrknotigen Seiches an der Hand der Theorie nicht zu verfolgen ist. Doch stehen die Ergebnisse im allgemeinen nicht nur vollständig im Einklange mit der neuen Chrystalschen Theorie, sondern werden durch dieselbe überhaupt erst verständlich.

Traunstein, Dezember 1905.

Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren.

Von **Siegmund Günther.**

(Eingelaufen 14. Dezember.)

Die scheinbar so einfache Frage, wie gewisse bizarre Gebilde in lockerem Materiale, zumal in Glazialrückständen, sich im Laufe der Zeiten bilden, ist in neuerer Zeit wiederholt der Erörterung unterzogen worden.[1] Darüber, daß die alte Theorie, wie sie Zallinger zum Thurn und Lyell aufgestellt haben, nicht mehr als ausreichend betrachtet werden kann, besteht nahezu allgemeine Übereinstimmung.[2] Jene Auffassung des Bildungsvorganges, welche von dem Verfasser vertreten wird,

[1] Vgl. dazu die beiden Abhandlungen des Verfassers: Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., Math.-Phys. Kl., 1902, S. 459 ff.: Erdpyramiden und Büßerschnee als gleichartige Erosionsgebilde, ebenda, 1904, S. 394 ff.

[2] Jene ältere Auffassung lernt man am besten durch eine ganz moderne Reproduktion derselben kennen. M. Eckert hat in einer Studie, die sonst manch wertvollen Gesichtspunkt für die Morphologie des Hochgebirges darbietet, sich über die Erosion des Regens geäußert und zum Beweise, daß dieselbe gestaltbildend sich betätigen könne, einige Bemerkungen hinzugefügt (Die Verwitterungsformen in den Alpen, insbesondere in den Kalkalpen, Zeitschr. d. D. und Öst. Alpenver., 36. Band, S. 20). „Am Finsterbach bei Bozen, auch bei Meran, bemerkt man kegelförmige Erdsäulen, die mit einem Steinhut bedeckt sind. Der Regen hat die hier befindliche, sehr weiche Schuttmasse angegriffen; nur da wurde sie von dem fallenden Regen verschont, wo ein aufliegender oder eingebetteter Stein die unter ihm liegende Erdschicht schützte. Auf diese Weise werden Erdpyramiden gebildet."

hat neuerdings mehrfach die Zustimmung von Kennern der Gebirgswelt gefunden.[1]) Immerhin ist es auch jetzt noch keineswegs überflüssig, die Analyse der merkwürdigen Erscheinung zu vervollkommnen und immer wieder durch neue Belege die Behauptung zu stützen, daß sich die Entstehung der sogenannten Erdpyramiden nicht in so schablonenhafter Weise abspielt, wie das früher angenommen wurde. Ohne leugnen zu wollen, daß gelegentlich auch noch andere Faktoren als mitwirkend sich geltend machen können, kann man doch als typische, immer wiederkehrende Gesetzmäßigkeiten die folgenden drei herausfinden:

I. Das Material, aus welchem die fortschreitende Denudation die charakteristischen Zacken herausmodelliert, darf weder allzu nachgiebig gegen zerstörende Einflüsse, noch auch allzu kompakt sein.

II. Die krönenden Blöcke mancher Säulen, die man früher für eine unerläßliche Vorbedingung hielt, sind eine ganz zufällige Beigabe und dienen höchstens dazu, das einzelne so begünstigte Exemplar etwas länger vor der Zerstörung, der es schließlich doch anheimfallen muß, zu schützen.

III. Größere Ansammlungen — Kolonien — von Erdpyramiden verraten durch ihre lineare Scharung stets, daß sich eine Mauer, ein Erosionssporn, in eine Anzahl von Protuberanzen aufgelöst hat.

Diese drei Thesen sollen nunmehr der Prüfung unterstellt werden, um einzelne Punkte, die teilweise zwar früher schon

[1]) Hier ist u. a. zu verweisen auf den Bericht, der über den zweitgenannten der obigen beiden Aufsätze von A. Rühl erstattet wurde (Naturwissensch. Wochenschrift, 1905, Nr. 28). Mit Lebhaftigkeit hat sich gegen die „Steinhuttheorie" unlängst R. Lüdi ausgesprochen (Die Entstehung der Erdpyramiden, Frankfurter Zeitung vom 30. August 1905). Derselbe erkennt unumwunden die Berechtigung der beiden oben aufgestellten Leitsätze II und III an und verweist zu ihrer Bekräftigung auf ein seltener besuchtes alpines Gebiet, mit dem wir uns nachher noch werden beschäftigen müssen.

gestreift, aber nicht weiter ausgeführt wurden, vollständig zu klären.

Es leuchtet von selbst ein, daß Stoffe, die bei der geringsten Einwirkung von außen in sich zerfallen, überhaupt nicht wohl differentiiert werden können. Es bildet sich, wenn solche Einflüsse hervortreten, ein ungeordnetes Haufwerk, aber selbst wenn es zur Herausbildung einzelner Erdsäulen käme, so würden diese kein längeres Leben haben, sondern sehr bald wieder in sich zerfallen. Ein gewisses Maß von Kohärenz der Materie ist somit unerläßlich. Wäre der chinesische Löß, dem als Endprodukte äolischer Aufschüttung ein ziemlich hoher Grad von Widerstandsfähigkeit eignet, blos eine lockere Masse, so würden die großen Ströme in ihn nicht die tiefen und steilwandigen Täler haben einschneiden können, die für den Westen Chinas das Landschaftsbild bestimmen.[1]) Andererseits würde eine völlig verfestigte und dadurch so gut wie homogen gemachte Schuttlage den denudierenden Agentien nicht jene Ansatzpunkte gewähren, welche diesen gegeben sein müssen, wenn sie ihre Auflösungsarbeit beginnen sollen. Ohne das Vorhandensein einiger Ungleichförmigkeit in der Struktur der Masse ist die Herauspräparierung einzelner Auszackungen nicht denkbar. Die hier hervorgehobenen Umstände sind wohl sehr häufig dafür verantwortlich zu machen, daß man Erdpyramiden an Stellen, deren Natur solche Bildungen eigentlich mit Sicherheit erwarten ließe, trotzdem nicht vorfindet.[2]) Eine

---

[1]) So wie dies insbesondere F. v. Richthofen in mustergültiger Weise dargelegt hat (China, Ergebnisse eigener Reisen und darauf gegründeter Studien, 2. Band, Berlin 1882, S. 348 ff.).

[2]) Hierher möchte der Verfasser in erster Linie die Umgebung der oberbayerischen Stadt Wasserburg gerechnet wissen. Die Halbinsel, auf der jene liegt, wird auf der rechten Innseite eingefaßt von einem steil zum Flusse abstürzenden Plateau aus Hochterrassenschotter (W. Götz, Geographisch-historisches Handbuch von Bayern, 1. Band, München 1895, S. 433), dessen Fläche bewaldet ist, während auf der schroffen Böschung nur spärlich Gebüsche haften. Der Abhang ist durch Wasserrinnen, die ihn meist von oben bis unten durchfurcht haben, in eine große Menge von einzelnen, teilweise ganz schmalen Rücken zerfällt worden, so daß

vorzüglich günstige Disposition scheinen Moränenreste dann zu besitzen, wenn sich an der Verästelungsstelle zwei aus verschiedenen Tälern herabgekommene Moränen vereinigt haben. Auf diese Tatsache scheint allerdings nur im Einzelfalle, zuerst Fröbel[1]) aufmerksam gemacht zu haben. Allein sie läßt sich bei genauerem Zusehen gar nicht selten erkennen, wie denn die schönen Pyramiden von Stalden, in dessen Nähe die Täler von Zermatt und Saas zusammenkommen, in ebendiese Kategorie gehören. In folgender Fassung dürfte mithin das, was die wallisischen Vorkommnisse lehren, einwandfrei wiedergegeben sein:

---

also der Herausbildung von Erdpyramiden kein Hindernis im Wege stehen sollte. Und doch sind solche von Wasserburg nicht bekannt. Wenn man auch als sehr wahrscheinlich annehmen kann, daß in früherer Zeit auch die Uferhänge von Vegetation bedeckt waren, bis die unaufhörlichen Einstürze, zu denen die laterale Korrasion der Innfluten Anlaß gab, die gegenwärtige Entblößung herbeiführten, so besteht doch dieser Zustand nun hinlänglich lange, um gestaltlichen Veränderungen Vorschub zu leisten. Denn ein altes Gemälde, welches die Beschießung des damals sehr wehrhaften Platzes durch Schweden und Franzosen im Jahre 1648 veranschaulichen soll, stellt das rechte Ufer ganz ebenso dar, wie es heute unseren Blicken erscheint. Übrigens hat eine erneute und schärfere Beaugenscheinigung des Terrains zu der Wahrnehmung geführt, daß in der Tat die Loslösung kleiner Erdpyramiden, ganz wie sie die Theorie erfordert, begonnen hat, und daß die Krenelierung des einen und anderen Erosionsspornes im Fortschreiten begriffen ist. Weshalb dieser Prozeß allerdings so langsam verläuft, ist eine noch nicht ganz geklärte Frage für sich. Ein gutes Bild der merkwürdigen Erdstelle gibt auch Penck (Das Deutsche Reich, Wien-Prag-Leipzig 1886, S. 174). Wenn man zumal auf einer Ballonphotographie, wie eine solche unlängst von Dr. R. Emden aufgenommen ward, das Bild von Wasserburg und Umgebung betrachtet, so kann man die in der Herausbildung begriffenen Erosionskulissen sehr gut wahrnehmen.

[1]) J. Fröbel, Reise in die weniger bekannten Täler auf der Nordseite der Penninischen Alpen, Berlin 1840, S. 23. Nach kurzer Erwähnung anderer Vorkommen von Erdpyramiden sagt der bekannte Publizist: „Hier bei Usegne, ist es das Zusammenstoßen der beiden Täler, welches bewirkt hat, daß von der ursprünglichen Masse des aufgeschütteten Bodens nichts als die freistehende Wand mit ihren Obelisken und Säulen übrig geblieben ist, während man an den fortlaufenden Bergseiten rechts und links auf

Moränen oder fluvioglaziale Geschiebe am Konvergenzpunkte zweier Täler eignen sich, ohne daß damit eine notwendige Voraussetzung gegeben wäre, sehr gut für die Bildung von Erdpyramiden.

Mutmaßlich ist dieser Umstand gerade darauf zurückzuführen, daß die Druckwirkungen, welche aus der Begegnung der beiden sich unter spitzem Winkel treffenden Ströme loser Materie resultieren, jenen Grad von Festigkeit zuwege bringen, der die in Frage kommende Modalität erosiver Zerstörung begünstigt. Es wird gut sein, überall da, wo in alten Gletscherterritorien unsere Gebilde zu finden sind, die Örtlichkeit auf das soeben besprochene Kennzeichen zu prüfen. Denn sehr wahrscheinlich ist diese Vorbedingung in vielen Fällen nicht erfüllt, in denen man Erdpyramiden erwarten sollte, sie aber trotzdem nicht vorfindet. Gerade bezüglich dieses Umstandes mag sich wohl die mineralogische Eigenart des Stoffes einigermaßen geltend machen, insofern nämlich die Zusammensetzung desselben auf seine passive Resistenz gegen zerstörende Kräfte doch unzweifelhaft einen gewissen Einfluß ausüben muß. Und auch die chemische Beschaffenheit des meteorischen Wassers wird nicht ganz gleichgiltig sein; im einen Falle wird eine raschere, im anderen eine langsamere Zersetzung platzgreifen. Es ist dies ein Moment, welchem vielleicht eine noch weiter gehende Klärung zu teil werden muß, wenigstens im Bereiche der ersten unserer drei Thesen.

Wir wenden uns nunmehr dem Teilprobleme zu, welches durch die für den landschaftlichen Eindruck ganz gewiß nichts weniger als gleichgiltigen Deckblöcke gekennzeichnet ist. Weil eben diese sonderbare Krönung imponiert, übersieht der Beschauer nur zu leicht, daß in der Regel weit mehr Säulen dieses Schmuckes entbehren als teilhaftig sind; kommt ihm dies jedoch zum Bewußtsein, so hilft er sich mit der Hypothese, die Schutzsteine seien herabgefallen. So macht es Fröbel

---

die zusammenhängenden, nur von Furchen durchschnittenen Lager desselben erblickt."

(a. a. O.), der die Blöcke geradezu als „Regenschirme“ für die sie tragenden Obelisken anspricht.[1]) Wie weit die Voreingenommenheit gehen kann, das zeigt am deutlichsten das Beispiel des trefflichen Gletscherforschers Charpentier, der selbst auf Fröbel verweist, dann aber die bei letzterem nicht annähernd in solcher Bestimmtheit ausgesprochene Behauptung aufstellt, jede Säule trage ihre Steinmütze.[2]) Wie wenig wahr das ist, wurde von uns bereits früher dargetan, indem z. B. die herrlichen Wittower Klinten, deren Baustoff überhaupt keine größeren Steinbrocken in sich schließt, niemals in ihrer ganzen Vergangenheit den vermeintlichen Schutzstein getragen haben. Man kann jedoch angesichts des bestehenden Vorurteiles gar nicht nachdrücklich genug betonen, daß auch unsere alpinen Musterbeispiele die herkömmliche Vorstellung oft nur recht wenig stützen.

Gerade nach dieser Seite hin gewähren uns die nachher noch besonders zu beleuchtenden Erdpyramiden von Useigne[3]) einen sehr bemerkenswerten Anhaltspunkt. Man wird auf den beiden ihnen gewidmeten Abbildungen konstatieren, daß es

---

[1]) A. a. O. Fröbel scheint sogar bewußt zwischen „Türmen“ und „mit Steinblöcken bedeckten“, d. h. also mit Regenschirmen versehenen „Säulen“ unterschieden zu haben. Zu unserer Kenntnis von der geographischen Verbreitung der Erdpyramiden liefert er einen Beitrag durch die Bemerkung, daß der baltische Naturforscher G. v. Helmersen (Der Telezkische See und die Teleuten im östlichen Altai, St. Petersburg 18[illegible], S. 53, S. 91) des Vorhandenseins ähnlicher Bodenformen Erwähnung getan habe.

[2]) J. De Charpentier, Essai sur les glaciers et sur le terrain erratique du bassin du Rhône, Lausanne 1841, S. 137. Abgesehen von dieser Übertreibung bekundet die Schilderung den aufmerksamen Beobachter; er stellt fest, daß Erdpyramiden sich mit Vorliebe an den Rändern der glazialen Ablagerungen zeigen, und daß sie nur höchst selten einzeln, fast immer dagegen in Gruppen beisammen stehen.

[3]) Der Name dieses Dorfes im Unterwallis wird verschieden geschrieben. Fröbel hat die Lesart Usegne, und auf den Karten liest man gelegentlich Eusegne. Die offizielle Schreibweise, deren auch wir uns bedienen, ist aber Useigne; sie kommt schon bei Charpentier vor und wurde dem Anscheine nach auch von allen schweizerischen Kartographen adoptiert.

Block von stattlicher Größe innerhalb der Kulisse, in welcher er sich befand, von seinem ursprünglichen Platze herabgerutscht und an der tiefsten Stelle, welche er erreichen konnte, einfach liegen geblieben ist. Hätte er da seine Pflicht getan, so wie es ihm die schematische Doktrin vorschreibt, so wäre unter ihm ein Pfeiler von ganz stattlicher Breite vorschriftsmäßig ausgewaschen worden; das ist jedoch nicht geschehen, der Steinklotz hat seinen Beruf verfehlt. Und gar kein triftiger Grund spricht dafür, daß die spitzen Auszackungen, die unmittelbar neben Blocksäulen aufragen, jemals eine schirmende Kappe getragen hätten. Vielmehr ist es ganz und gar vom Zufalle abhängig, ob eine Erdpyramide gerade an einer Stelle, die in nächster Nähe eines Blockeinschlusses sich befindet, oder in einiger Entfernung von einem solchen zustande kommt. Die konservierende Wirkung desselben soll hingegen nicht in Abrede gestellt werden.

Die größte Wichtigkeit unter unseren drei Leitsätzen hat ohne Zweifel der dritte, auf dessen Beweis demgemäß auch der größte Nachdruck zu legen ist.[1]) Als auf ein besonders

[1]) Es mag gerade bei dieser Gelegenheit auch noch betont werden, daß die früher (a. a. O.) behauptete Analogie der Bildungsgesetze von Erdpyramiden und Nieve Penitentes vollständig aufrechterhalten wird. In gewissem Sinne hat sich gegen eine solche ausgesprochen W. Deecke (Läßt sich der „Büßerschnee" als vereiste Schneewehen auffassen? Globus, 1905, I, Nr. 15). Mit Rücksicht auf die Wahrnehmungen, welche der Greifswalder Geologe bei einem sehr heftigen Schneesturme am 31. Dezember 1904 gemacht hatte, untersucht er die Möglichkeit, daß lediglich durch derartige Orkane, wenn ihrer mehrere aus der gleichen Weltgegend über eine der Schneeanhäufung günstige Örtlichkeit hinbrausen, eine Rippung eingeleitet werden kann, die schließlich, allerdings nicht in Europa, so tief zu greifen vermöchte, daß sich die uns bekannten Kerzenfelder herausbilden. „Ein neuer Schneesturm erzeugt, weil die Bedingungen gleich sind, ähnliche, vor allem gleich und ähnlich gerichtete Wehen. So nimmt der in Hocheis sich umwandelnde Schnee einerseits eine bestimmte innere Struktur, andererseits Schichtung an. Wenn nun ein Tauen des Schneefeldes eintritt, so werden die festeren vereisten Kämme aus den lockeren zwischenliegenden Streifen herausgeschmolzen." Auch durch diese Auffassung scheint doch nur, was allerdings von Belang ist,

merkwürdiges Beispiel für die Herausbildung von Erosions-kulissen und Erdpyramiden weist Lüdi (a. a. O.) auf das alte Bergsturzgebiet von Flims in Graubünden hin, von dem uns Hartung[1]) und Heim[2]) ausführliche Beschreibungen geliefert haben. Die Schuttmasse hat sich im Laufe der langen Zeiträume — es handelt sich aller Wahrscheinlichkeit nach um ein prähistorisches Ereignis — stark verfestigt und so jene Eigenschaften erhalten, welche unserer ersten These zufolge notwendig sind, damit sich die nicht rastende Zerstörung in der für uns hier in Betracht kommenden Art zu gestalten imstande ist. „Diese Entstehung des jetzigen Erosionsgebietes", so lesen wir bei Lüdi (a. a. O.), „deutet schon an, daß es für die Pyramidenbildung wie geschaffen ist. Und in der Tat hat das Wasser diese Arbeit bereits mächtig gefördert. Zunächst schuf der Rhein die tiefe Hauptschlucht mit steilen Wänden. Dann kamen die hunderte von Regenrinnseln und gruben ihre Furchen senkrecht zum Haupttobel. Die Kulissenbildung hatte damit begonnen, und heute ist sie in schönster Blüte. Eigentliche, isoliert stehende Pyramiden trifft man erst wenige an, so

---

die Entstehung der Firnmauern erklärt zu werden, während die Zerlegung derselben in einzelne Säulen einen erst später einsetzenden Prozeß darstellt. Es wird mithin nicht gesagt werden können, daß die Ansicht Deeckes, die jedenfalls wohl beachtet zu werden verdient, der unseren in der Hauptsache zuwiderlaufe, denn gerade die Art und Weise der ersten Kammbildung, welche am bezeichneten Orte mit heftigen Regengüssen in ursächlichen Zusammenhang zu bringen versucht ward, ist von uns als eine Frage für sich behandelt worden. Ob man die Schneemassen als von vornherein gegeben oder als durch konsekutive Windwehen aufgebaut annimmt, ist zwar prinzipiell nichts weniger als gleichgültig, aber die Herausschälung der einzelnen, linear gescharten Eis- und Schneefiguren aus parallel angeordneten Kulissen wird durch die Alternative, deren Wesen soeben auseinandergesetzt wurde, nicht mehr berührt. Wir werden später sehen, daß das in beiden Fällen maßgebende morphologische Gesetz vielleicht sogar einen noch umfassenderen Geltungsbereich beanspruchen kann.

[1]) Hartung, Das alte Bergsturzgebiet von Flims, Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde zu Berlin, 19. Band, S. 161 ff.

[2]) A. Heim, Der alte Bergsturz von Flims, Jahrbuch d. Schweizer Alpenklubs, 18. Band, S. 296 ff.

l noch im Entstehen; dagegen ein ganzes Labyrinth von
lissen mit den bizarrsten Formen". Unsere Fig. 1, 2 und 3
d von der Eigentümlichkeit der hier in lebhaften Farben
childerten Gegend eine ausreichende Vorstellung geben.[1])
schärferem Zusehen bemerkt man, wie sich mancher
sionssporn bereits in eine ganze Anzahl feiner Spitzzacken
asert hat, die vielleicht schon in einem Dezennium ganz
ektable Größen angenommen haben werden.[2]) Vergleicht

Fig. 1.

[1]) Der Verfasser dankt diese Bilder, da charakteristische Photogramme
andel anscheinend noch nicht verbreitet sind, seinem Sohne Dr. Ludwig
ther, der an Ort und Stelle einige besonders typische Aufnahmen
cht hat.

[2]) Eben durch seinen Sohn, von dem auch Fig. 4 und Fig. 5 her-
n, wurde der Verfasser aufmerksam gemacht auf einen interessanten
Enle in der Münchener Moränenlandschaft, der über das rasche
chreiten der Erosionsvorgänge unter gewissen vorteilhaften Umständen
chluß gibt. Etwa eine Viertelstunde östlich von dem bekannten

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.

man die Lokalbeschreibung **Hartungs**, die in ihrer äußerst minutiösen Treue natürlich auch der Schotterpyramiden gedenkt,[1]) mit dem heutigen Befunde, so kann man sich des Gefühles nicht erwehren, daß, im Einklange mit **Lüdis** Andeutungen, nicht leicht eine Örtlichkeit gefunden werden kann, welche das **Werden der Erdpyramiden** gleich klar zu überblicken gestattet und eine gleich gute Illustration der Bildungstheorie liefert, auf welche es uns ankommt.

Kloster Andechs, dessen Kirche auf beiden Photographien zu sehen ist, befindet sich eine mit glazialen Residuen erfüllte Kiesgrube, die bis vor einigen Jahren zu Bauzwecken ausgebeutet wurde. Von Herrn P. Engl, dem Prior des Klosters, wurde auf eine Anfrage hin in höchst entgegenkommender Weise Mitteilung über die näheren Umstände gemacht, welche die Auflassung der Schottergrube bedingten. Die teilweise noch vorhandene Wand nämlich, aus sehr fest zementiertem Deckenschotter bestehend, ließ man nach einigen Versuchen der Abarbeitung einfach stehen, weil diese allzu viele Mühe verursachte. Seit Jahren hat menschliche Hand in die Naturprozesse nicht mehr eingegriffen, und so sind folglich auf deren Rechnung die beiden unförmlichen Klötze zu setzen, die man zur Zeit hier wahrnimmt. Der eine derselben weist eine Öffnung auf, durch welche hindurch man gerade den Andechser Kirchturm erblicken kann, wenn man das Auge in eine geeignete Lage bringt, und diese Ritze ist durch die erosiven Agentien wo nicht geschaffen, so doch jedenfalls ansehnlich erweitert worden. Es wird dabei nicht bloß an meteorisches Wasser und Spaltenfrost zu denken sein, sondern wahrscheinlich auch an die Erosion des Windes. Unmittelbar im Rücken der Wand steigt nämlich die Böschung einer Anhöhe auf, welch letztere die regelmäßigen Winde aufhält und die bewegte Luft in kleinen Wirbeln um das Hindernis zu kreisen nötigt, wodurch der **Deflation** nur Vorschub geleistet wird. Daß die Nagelfluh am Ostufer des Ammersees eine Neigung bekundet, „pittoreske Felsen" zu bilden, wird von L. v. **Ammon** (Die Gegend von München geologisch geschildert, München 1894, S. 30) ausdrücklich bestätigt.

[1]) Man findet in der Abhandlung **Hartungs** zu wiederholtem Male der Zerklüftungserscheinungen Erwähnung getan. So ist (a. a. O., S. 161) davon die Rede, daß die jähen Wände „von eckigen, scharfkantigen Zäckchen rauh" erscheinen. Mit etwas anderen Worten (S. 171) kennzeichnet der Genannte, in vollkommenem Einklange mit der von uns befürworteten Anschauung, die hell leuchtende Masse, welche „von Schründen und Wasserrissen durchfurcht und auf den zugeschärften Zwischenwänden hie und da mit turmartigen Zinnen und Zacken gekrönt ist". Eine abenteuerlich geformte Zinne dieser Art ist rechts oben in Fig. 2 zu sehen.

bereits oben in etwas anderem Zusammenhange namhaft
achte Pyramidenmauer von Useigne. Wer dieselbe
achtet, so wie sie uns in Fig. 6 und 7 entgegentritt, der
n überhaupt nicht mehr zweifelhaft sein über die Wahr-
der Tatsache, daß aus den in Auflösung begriffenen
otterwänden die Erosionsfiguren hervorgehen.[1]) Unwillkür-
denkt, wer aus einiger Entfernung diese phantastisch in
ganz anders geartete Landschaft hineingestellte Riesen-

Fig. 6.

wand betrachtet, an eine Festungsmauer, welcher der Za
der Zeit und die Geschoße des Feindes gewaltig zugese
haben. Es ist lehrreich, zu den beiden modernen Abbildung
die entsprechende Tafel in Fröbels Schrift in Parallele
stellen, welche die Dinge uns so vorführt, wie sie vor einig

Fig. 7.

sechzig Jahren aussahen. Niemand wird in Zweifel sein, d
es sich um ein und dasselbe Objekt handelt, aber es fe
doch auch keineswegs an Verschiedenheiten, die uns ein
Maßstab für die säkularen Veränderungen im Aussehen sol

Gebilde an die Hand geben können. So ist, obwohl auch jetzt noch eine allerdings weit niedrigere, aber ebenfalls mannigfach zerrissene Fortsetzung der Hauptmauer sich bis an das linke Ufer der Borgne hinabzieht, die Teilkolonie rechts unten fast verschwunden, jedenfalls erheblich reduziert. Freilich mag nicht unwesentlich zu den gestaltlichen Veränderungen der Umstand beigetragen haben, daß man, als die Straße von Sion nach Evolena gebaut ward, ein Tor durch die Wand brach, welches die Illusion, als habe man es nicht mit einem Naturspiele, sondern mit einem Menschenwerke zu tun, wohl zu verstärken geeignet ist. Auch die Frage, ob jedwede Art von Moränenmaterial dazu angetan ist, unter passenden Umständen in ein Aggregat von Erdpyramiden zerlegt zu werden, ist bei diesem vielleicht großartigsten aller in Europa bekannten Fälle beteiligt; anderwärts sind hauptsächlich fluvioglaziale Schotter die Träger des Phänomenes, und die „Kholonne"[1]) von Useigne setzen sich nach Brückner[2]) aus Grundmoräne zusammen.

Wer sich eingehend mit dem Detailstudium von Erdpyramiden befaßt hat, könnte wohl zu dem Einwurfe sich veranlaßt sehen, daß hie und da der Parallelismus der in der nämlichen Kolonie vereinigten Pyramidenreihen eine Durchbrechung zu erleiden scheine. Gewiß ist eine solche Beobachtung begründet, aber trotzdem fügt sich die Tatsache ungezwungen dem in Rede stehenden Bildungsgesetze ein. Angenähert senkrecht zu den großen Mauern, in welche die amorphe Schottermasse zerfallen ist, springt nämlich gar nicht selten ein selbständiger Erosionssporn vor, und dieser unterliegt dann natürlich einer ganz analog fortschreitenden Zerstörung. Als ein Beispiel, das in dieser Beziehung sehr deutliche Aufschlüsse

---

[1]) Dies ist nach Fröbel (a. a. O.) die Dialektbezeichnung der Bewohner des Eringes Tales; wer schriftgemäß Französisch reden konnte, bediente sich aber damals schon des Wortes „Pyramiden", welche jetzt das einzig gebräuchliche geworden zu sein scheint.

[2]) A. Penck-E. Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter, 6. Lieferung, Leipzig 1904, S. 628.

ergibt, dürfen die Erdpyramiden von Stalden betrachtet werden, von denen oben bereits in einem anderen Zusammenhange zu sprechen gewesen ist.[1] —

Eine gründliche Theorie der Erosionsgebilde verlangt, wie wir gesehen haben, die Berücksichtigung einer großen Anzahl von einzelnen Momenten, und es kann nicht behauptet werden, daß durch die vorliegende Darlegung ein endgültiger Abschluß erzielt sei. Vor allem ist noch keineswegs festgestellt, daß die mehr und mehr als normativ erkannte lineare Anordnung der Protuberanzen lediglich dann in die Erscheinung tritt, wenn lose Stoffe der Auflösung unterliegen. Aus zahlreichen Bildern in den Schriften der Polarfahrer geht hervor, daß Eismassen in ihrem Zerfalle, der durch Abschmelzung und Schwerewirkung eingeleitet wird, eine ähnliche Scharung der Erosionsfiguren erkennen lassen, wie sie der „Büßerschnee" in einem besonderen Falle beobachten ließ. In Fig. 8 ist ein ganz drastischer Beleg für diese Tatsache nach dem Berichte von Koldewey und Hegemann über die erste deutsche Nordpolfahrt wiedergegeben.[2] Auch festes Gestein unterliegt vielleicht, wie sich durch konsequente Überwachung der Zerstörungserscheinungen ermitteln ließe, einer ähnlichen, wenn auch möglicherweise im Hinblicke auf die petrographische Zusammensetzung verwickelteren Regel. Die berühmten „Sägezähne" des Berges Monserrat bei Barcelona z. B. fügen sich nach Bildern derselben Gesetzmäßigkeit.[3] Mit gutem Grunde

---

[1] Einen sehr schönen Beleg für dieses Vorkommen zweier ungefähr normal zu einander gerichteter Krenelierungssysteme bietet eine Zeichnung, welche der französische Geologe Kilian zu dem Werke von Penck und Brückner (7. Lieferung, Leipzig 1905, S. 696) beisteuerte. Die ursprüngliche Herausbildung der Erosionssporne zeigt sich da ganz besonders schön, und zudem führt es den unwiderleglichen Beweis, wie sehr gleichgültig die — keineswegs ganz fehlenden — Blockeinschlüsse für den Endeffekt sind.

[2] Die zweite Deutsche Nordpolfahrt in den Jahren 1869 und 1870 1. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1874, S. 97.

[3] Der obere, zerklüftete Teil des sagenhaften Berges, der eigentlich ein kleines Gebirge für sich darstellt, besteht aus festem, breccienartigem

darf sonach das Studium der Erosionsfiguren als ein nicht bloß im engeren Sinne wichtiges, sondern als ein solches bezeichnet

Fig. 8.

Gesteine, welches dem oberen Eozän angehört (Th. Fischer, Die Iberische Halbinsel in Kirchhoffs Sammelwerk „Unser Wissen von der Erde", 3. Band, Wien-Prag-Leipzig 1893, S. 542). Das landschaftliche Aussehen wird mit lebensvollen Worten von M. Willkomm geschildert (Wanderungen durch die nordöstlichen und zentralen Provinzen Spaniens, 1. Band, Leipzig 1852, S. 284 ff.; Die Halbinsel der Pyrenäen, eine geographisch-statistische Monographie, Leipzig 1855, S. 50 ff.). „Hier erheben sich", so ist am letzterwähnten Orte zu lesen, „runde, turmartige Massen und glatte, senkrechte Wände von 1—2000 Fuß Höhe, die oben in phantastische Zacken auslaufen, schlanke Hörner, Nadeln und Kegel von Schauder erregender Steilheit. . . Von der See aus erscheint der Monserrat als ein hoher, mit sieben steilen Pyramiden besetzter Wall; von den Gipfeln des Hügellandes bei Barcelona dagegen präsentiert er sich als ein ungeheurer, tafelförmiger Felskoloß, dessen Kamm mit zahllosen spitzen Zacken besetzt ist und daher wie eine Säge aussieht". Die Angaben Willkomms dienen der aus Abbildungen deutlich erhellenden Tatsache, daß die Zähne in einer fortlaufenden Reihe dem Plateau auf-

werden, welches nach verschiedenen Seiten hin für die terrestrische Morphologie und für die physische Erdkunde überhaupt fruchtbringend wirken kann.[1])

---

gesetzt sind, zur vollkommenen Bewahrheitung. Dieselben sind nichts anderes als die „Denundationsreste" (Th. Fischer, S. 619), welche vom dem obersten Teile des gewaltigen Gebirgsmassives, das ursprünglich eine plumpe, nur wenig gegliederte Gestalt gehabt haben muß, noch übrig geblieben sind und dem Berge einen so ganz ungewöhnlich pittoresken Reiz verleihen.

[1]) Es ist zum Schlusse der Tatsache zu gedenken, daß sämtliche graphische Beilagen der vorliegenden Abhandlung von der unlängst ins Leben getretenen Spitzertypie-Gesellschaft in München ausgeführt wurden, deren Leistungen einen sehr erheblichen Fortschritt über das ältere, vom Raster Gebrauch machende Reproduktionsverfahren kennzeichnen.

Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche.

Von Oskar Perron.

(Eingelaufen 2. Dezember.)

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen komplexen Gliedern sind zuerst von Stolz aufgestellt worden.[1] Seine Darstellung hat jedoch insofern etwas unbefriedigendes, als dabei gewiße Formeln ohne eigentlichen Beweis überraschend auftreten und nur durch längere (nicht durchgeführte) Nebenrechnung zu verifizieren sind. Einen andern durchsichtigeren Weg zur Eruierung der Konvergenzbedingungen hat Herr Pringsheim[2] eingeschlagen. Im folgenden bestätige ich die gewonnenen Resultate nach einer neuen Methode, wobei namentlich die Stolzschen Grundformeln auf rationelle Weise hergeleitet werden. Wie ich an andrer Stelle zeigen werde, hat mein Verfahren außerdem den Vorzug, daß sich durch eine naturgemäße Ausdehnung desselben auch über die Konvergenz der allgemeinen Jacobischen Kettenbruchalgorithmen mit beliebigen komplexen Gliedern im Fall der Periodizität entscheiden läßt.

§ 1.

In dem Kettenbruch

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

---

[1]) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, II, pag. 299 ff.

[2]) Diese Berichte 1900.

sollen die a_ν, b_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, die nur der selbstverständlichen Forderung genügen: $a_\nu \neq 0$. Bedeuten A_ν, B_ν Zähler und Nenner des ν^{ten} Näherungsbruches, so bestehen bekanntlich die Formeln:

$$(1)\quad \begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_{\nu+2} = a_{\nu+2} A_\nu + b_{\nu+2} A_{\nu+1}, \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = b_1, \quad B_{\nu+2} = a_{\nu+2} B_\nu + b_{\nu+2} B_{\nu+1}; \end{aligned}$$

$$(2)\quad A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \cdots a_\nu \neq 0.$$

Vermehrt man in A_ν, B_ν die Indices sämtlicher a, b um eine Zahl $\varkappa$, so sollen die entstehenden Ausdrücke mit $A_{\nu,\varkappa}$ bezw. $B_{\nu,\varkappa}$ bezeichnet werden, so daß $\frac{A_{\nu,\varkappa}}{B_{\nu,\varkappa}}$ der ν^{te} Näherungsbruch des Kettenbruchs

$$\cfrac{a_{\varkappa+1}}{b_{\varkappa+1} + \cfrac{a_{\varkappa+2}}{b_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

ist. Man findet dann leicht, etwa durch vollständige Induktion in Bezug auf $\varkappa$, die Relationen

$$(3)\quad \begin{aligned} A_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1} A_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1} A_{\nu+1}, \\ B_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1} B_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1} B_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Bei Konvergenzuntersuchung periodischer Kettenbrüche genügt es, sich auf rein periodische zu beschränken. Ist dabei m die Gliederzahl der Periode, so wird dementsprechend

$$\begin{aligned} a_{m+\lambda} &= a_\lambda, \quad b_{m+\lambda} = b_\lambda, \\ A_{\nu,m} &= A_\nu, \quad B_{\nu,m} = B_\nu. \end{aligned}$$

Aus (3) folgt daher für $\nu = m - 1$, $\varkappa = (k-1)m + \lambda + 1$:

$$(4)\quad \begin{aligned} A_{km+\lambda} &= A_{(k-1)m+\lambda} A_{m-1} + B_{(k-1)m+\lambda} A_m, \\ B_{km+\lambda} &= A_{(k-1)m+\lambda} B_{m-1} + B_{(k-1)m+\lambda} B_m. \end{aligned}$$

Wenn nun der Kettenbruch konvergiert, so genügt sein Wert x jedenfalls der Gleichung

$$x = \frac{A_{m-1}\, x + A_m}{B_{m-1}\, x + B_m},$$

welche mit dem System der beiden folgenden äquivalent ist:

(5) $$\varrho x = A_{m-1} x + A_m, \quad \varrho = B_{m-1} x + B_m.$$

Durch Elimination von x folgt hieraus

(6) $$f(\varrho) = \begin{vmatrix} A_{m-1} - \varrho & A_m \\ B_{m-1} & B_m - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

während für x selbst die Beziehung

(7) $$B_{m-1} x^2 + (B_m - A_{m-1}) x - A_m = 0$$

hervorgeht. Die Gleichung für ϱ ist stets quadratisch und hat wegen (2) auch niemals die Wurzel $\varrho = 0$, dagegen kann die für x sehr wohl auch vom ersten oder nullten Grad sein. Doch ist leicht zu sehen, daß in diesem Fall der Kettenbruch stets divergiert; ist nämlich $B_{m-1} = 0$, so folgt aus der zweiten der Relationen (4) für $\lambda = m - 1$; $k = 1, 2, 3, \ldots$ sukzessive $B_{2m-1} = 0$, $B_{3m-1} = 0$, etc. Es gibt also unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche (d. h. mit dem Nenner Null), und von Konvergenz kann somit keine Rede sein. Im folgenden setzen wir daher die zur Konvergenz notwendige Bedingung

(8) $$B_{m-1} \neq 0$$

als erfüllt voraus, so daß Gleichung (7) wirklich eine quadratische ist.

§ 2.

Eliminiert man aus der ersten der Gleichungen (4) und aus denjenigen zwei Gleichungen, die aus (4) hervorgehen, wenn darin k durch $k-1$ ersetzt wird, die Größen $B_{(k-1)m+\lambda}$, $B_{(k-2)m+\lambda}$, so erhält man:

(9) $$A_{km+\lambda} = (A_{m-1} + B_m) A_{(k-1)m+\lambda} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m) A_{(k-2)m+\lambda};$$

und durch eine analoge Überlegung, indem man die beiden Gleichungen (4) ihre Rolle vertauschen läßt, ebenso:

(10) $$B_{km+\lambda} = (A_{m-1} + B_m) B_{(k-1)m+\lambda} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m) B_{(k-2)m+\lambda}.$$

Betrachtet man die Fl. (9) für abnehmende Werte vo
so erhält man $A_{km+\lambda}$ zuerst linear ausgedrückt durch $A_{(k-1)}$
und $A_{(k-2)m+\lambda}$, sodann durch $A_{(k-2)m+\lambda}$ und $A_{(k-3)m+\lambda}$ u. s.
endlich durch $A_{m+\lambda}$ und A_λ:

(11) $$A_{km+\lambda} = P A_{m+\lambda} + Q A_\lambda .$$

Nun kann, wenn wieder $f(\varrho)$ die in (6) eingeführte Fu
tion einer Variabeln ϱ bedeutet,

$$\varrho^k = (A_{m-1} + B_m)\varrho^{k-1} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m)\varrho^{k-2} + \varrho^{k-2}$$

gesetzt werden, und hieraus folgt offenbar ebenso, wie
aus (9):

(12) $$\varrho^k = P\varrho + Q + \varphi(\varrho) f(\varrho),$$

wo $\varphi(\varrho)$ ein gewisses Polynom vom $(k-2)$ten Grad, und
dieselben Größen wie in (11) bedeuten.

Wir betrachten jetzt erstens den Fall, daß $f(\varrho)$ zwei
schiedene Wurzeln hat: ϱ_0 und ϱ_1. Dann ergibt sich du
Elimination von P, Q aus (11) und den beiden für $\varrho =$
und $\varrho = \varrho_1$ aus (12) hervorgehenden Gleichungen, sogle

$$\begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} & A_\lambda \\ \varrho_0^k & \varrho_0 & 1 \\ \varrho_1^k & \varrho_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

(13) $$(\varrho_0 - \varrho_1) A_{km+\lambda} = \varrho_0^k (A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda) - \varrho_1^k (A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda$$

ebenso auch

(14) $$(\varrho_0 - \varrho_1) B_{km+\lambda} = \varrho_0^k (B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda) - \varrho_1^k (B_{m+\lambda} - \varrho_0 B$$

Durch Auflösung nach ϱ_0^k, ϱ_1^k folgt hieraus weiter:

(15) $$\begin{vmatrix} A_\lambda & A_{m+\lambda} \\ B_\lambda & B_{m+\lambda} \end{vmatrix} \varrho^k = \begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda \\ B_{km+\lambda} & B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho$$

Durch die fundamentalen Formeln (13) und (14) werd
Zähler und Nenner der Näherungsbrüche in independent
Form dargestellt. Um nun zunächst eine **notwendige Konverge**

dingung zu finden, nehmen wir an, der Kettenbruch kon-rgiere (gegen den Wert x). Da alsdann $\lim\limits_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = x$, so muß $B_{km+\lambda}$ für hinreichend große k gewiß von 0 ver-ieden sein; man darf also (15) durch $B_{km+\lambda}$ dividieren, d erhält dann durch Übergang zur Grenze $k = \infty$:

$$\lim_{k=\infty} \begin{vmatrix} A_\lambda & A_{m+\lambda} \\ B_\lambda & B_{m+\lambda} \end{vmatrix} \frac{\varrho^k}{B_{km+\lambda}} = (B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda)x - (A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda),$$

$$(\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho_1).$$

Die links stehende Determinante kann nicht für zwei auf-ander folgende Werte von λ verschwinden. Denn in diesem all folgt. da dann die rechte Seite für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = \varrho_1$, so identisch in ϱ verschwindet:

$$B_\lambda x = A_\lambda, \quad B_{m+\lambda} x = A_{m+\lambda},$$

ınd indem man λ durch die nächstfolgende Zahl ersetzt, auch:

$$B_{\lambda+1} x = A_{\lambda+1}, \quad B_{m+\lambda+1} x = A_{m+\lambda+1},$$

woraus $B_\lambda A_{\lambda+1} - A_\lambda B_{\lambda+1} = 0$ hervorginge; aber dies steht mit (2) im Widerspruch. Man kann somit λ derart wählen, daß die fragliche Determinante nicht verschwindet; dann ist aber aus der letzten Gleichung offenbar die Existenz der Grenzwerte

$$(16) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{\varrho_0^k}{B_{km+\lambda}} = R_0, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\varrho_1^k}{B_{km+\lambda}} = R_1$$

zu schließen. Würden diese beide verschwinden, so folgte wieder wie oben: $B_\lambda x = A_\lambda$, $B_{m+\lambda} x = A_{m+\lambda}$, und demnach müßte die Determinante verschwinden, was unsrer ausdrücklichen Annahme widerspricht. Sei also $R_0 \neq 0$: dann darf die zweite Gleichung (16) durch die erste dividiert werden, und es ergibt sich:

$$\lim_{k=\infty} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^k = \frac{R_1}{R_0}.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $\varrho_0 > \varrho_1$, $R_1 = 0$ ist.

Die Bedingung $|\varrho_0| > |\varrho_1|$ ist also für die Konvergenz notwendig. Ist sie aber erfüllt, so folgt aus (13), (1

$$\text{(17 a)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda},$$

sowie nur der Nenner von 0 verschieden ist. Wenn aber Gegenteil $B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = 0$, so ist dies nach (4) glei bedeutend mit:

$$A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda (B_m - \varrho_1) = 0;$$

da außerdem nach (6)

$$A_m B_{m-1} - (A_{m-1} - \varrho_1)(B_m - \varrho_1) = 0,$$

so verschwindet auch die Determinante dieser zwei Gleichung also $A_\lambda (A_{m-1} - \varrho_1) + B_\lambda A_m = 0$, d. h. $A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda =$

Es verschwindet also auch der Zähler von (17 a), und m hat daher in diesem Fall nach (13), (14):

$$\text{(17 b)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda}.^{1)}$$

Nun ist aber identisch

$$\begin{vmatrix} A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda & A_{m-1} - \varrho \\ B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda & B_{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{m-1} - \varrho & A_m \\ B_{m-1} & B_m - \varrho \end{vmatrix} = ($$

$$\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho_1.$$

Da außerdem $\varrho_0 + \varrho_1$ gleich dem negativen Koeffiziente von ϱ in der Gleichung $f(\varrho) = 0$ ist, also $\varrho_0 + \varrho_1 = A_{m-1} + B_m$, so lassen sich die beiden letzten Resultate auch i folgender Form schreiben:

$$\text{(18)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \begin{cases} \dfrac{A_{m-1} - \varrho_1}{B_{m-1}} = \dfrac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}} & \text{für } B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda \neq 0 \\[2ex] \dfrac{A_{m-1} - \varrho_0}{B_{m-1}} = \dfrac{\varrho_1 - B_m}{B_{m-1}} & \text{für } B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = 0 \end{cases}$$

1) Es ist nämlich ausgeschlossen, daß der Nenner wieder ve schwindet; denn nach der letzten Deduktion müßte auch der Zäh wieder verschwinden; da also $A_{m+\lambda} = \varrho A_\lambda$, $B_{m+\lambda} = \varrho B_\lambda$ für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = \varrho_1$, so würde $A_\lambda = 0$, $B_\lambda = 0$ folgen, was nicht möglich is

Die beiden Ausdrücke rechts sind von λ unabhängig, aber von einander verschieden, und da es offenbar genügt, die Werte $\lambda = 0, 1, \ldots m-1$ in Betracht zu ziehen, so erkennt man, daß Konvergenz allemal dann stattfindet, wenn die Ausdrücke $B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda$ ($\lambda = 0, 1, \ldots m-1$) entweder alle m verschwinden, oder gar keiner von ihnen. Die erstere Möglichkeit ist übrigens illusorisch, da für $\lambda = m-1$ notwendig

$$B_{2m-1} - \varrho_1 B_{m-1} = A_{m-1} B_{m-1} + B_{m-1} B_m - \varrho_1 B_{m-1}$$
$$= B_{m-1} \varrho_0 \neq 0$$

ist. Die zur Konvergenz notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind also im Fall $\varrho_0 \neq \varrho_1$:

$B_{m-1} \neq 0$, $|\varrho_0| > |\varrho_1|$, $B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda \neq 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots m-2$,

und der Wert des Kettenbruchs ist

$$x = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}.$$

§ 3.

Wir behandeln jetzt den Fall $\varrho_0 = \varrho_1$. Eliminiert man P, Q aus (11), (12) für $\varrho = \varrho_0$ und der Derivierten von (12) für $\varrho = \varrho_0$, so erhält man jetzt:

$$\begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} & A_\lambda \\ \varrho_0^k & \varrho_0 & 1 \\ k\varrho_0^{k-1} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$A_{km+\lambda} = \varrho_0^k A_\lambda + k\varrho_0^{k-1} (A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda), \tag{19}$$

und analog auch

$$B_{km+\lambda} = \varrho_0^k B_\lambda + k\varrho_0^{k-1} (B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda). \tag{20}$$

Falls $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda \neq 0$, was wieder für $\varrho = m-1$ sicher der Fall ist, folgt hieraus:

$$\lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda}, \tag{21}$$

ein Wert, der wieder wie oben von λ unabhängig, nämlich gle

$$\frac{A_{m-1}-\varrho_0}{B_{m-1}} = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}$$

ist. Wenn dagegen für gewisse Werte von λ der Nenner (21) verschwindet, so folgt wie vorhin auch wieder das Glei vom Zähler, und daher ist nach (19), (20)

(22) $$A_{km+\lambda} = \varrho_0^k A_\lambda, \quad B_{km+\lambda} = \varrho_0^k B_\lambda.$$

Nun kann B_λ nicht verschwinden; denn wegen $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda =$ wäre dann auch $B_{m+\lambda} = 0$, d. h. $A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda B_m = 0$, a $A_\lambda = 0$, was aber mit $B_\lambda = 0$ im Widerspruch steht. somit $B_\lambda \neq 0$, so folgt aus (22)

$$\frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_\lambda}{B_\lambda} = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}.$$ [1]

Dies ist aber derselbe Wert wie oben, also konvergie der Kettenbruch im Fall $\varrho_0 = \varrho_1$ immer.

Man kann die gewonnenen Resultate noch etwas ande formulieren, indem man statt ϱ_0, ϱ_1 die Wurzeln x_0, x_1 de Gleichung (7) einführt. Nach (5) ist dann zu setzen:

$$\varrho_i = B_{m-1} x_i + B_m, \text{ also } \frac{\varrho_i - B_m}{B_{m-1}} = x_i \qquad (i = 0, 1).$$

Außerdem folgt

$$B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda (B_m - \varrho_1) = B_{m-1}(A_\lambda - x_1 B$$

so daß man folgenden Satz erhält:

Der Kettenbruch konvergiert dann und nur dan und zwar gegen den Wert x_0, wenn erstens $B_{m-1} \neq$ und zweitens die Wurzeln x_0, x_1 der Gleichung

$$B_{m-1} x^2 + (B_m - A_{m-1}) x - A_m = 0$$

entweder einander gleich sind, oder die Bedingun erfüllen:

[1]) Die letzte Gleichheit besagt nichts anderes als die vorausge Identität: $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda = 0$.

$$|B_{m-1}x_0 + B_m| > |B_{m-1}x_1 + B_m|, \quad A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0$$
$$\text{für } \lambda = 0, 1, \ldots m-2.$$

Endlich sei folgendes Resultat hervorgehoben, das un-ittelbar aus (18) folgt:

Wenn von den Konvergenzbedingungen nur die eiden:

$$B_{m-1} \neq 0, \; | B_{m-1} x_0 + B_m | > | B_{m-1} x_1 + B_m |$$

rfüllt sind, so oszilliert der Kettenbruch in der Veise, daß

$$\lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \begin{cases} x_0 \text{ für } A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0 \\ x_1 \text{ für } A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0. \end{cases}$$

Auf das Vorkommen dieser Eigentümlichkeit hat Thiele aufmerksam gemacht (Tidskrift for Math. III. 1879).

Berichtigung

zu meiner Abhandlung über die Torsion von runden Stäben.
(S. 249—262 dieses Bandes.)

Bei der Ableitung von Gl. (22) S. 259 auf Grund des Satzes von Stockes ist ein Rechenfehler vorgekommen, auf den mich Herr Prof. Prandtl in Göttingen freundlichst aufmerksam gemacht hat. Nach Berichtigung des Fehlers muß diese Gleichung, falls man jetzt dn nach außen hin positiv zählt lauten:

$$w = \frac{ds}{dn} - \frac{s}{r} \qquad (22$$

Auch die unmittelbar folgenden Gleichungen sind dementsprechend zu ändern und die Schlußgleichung (27), S. 260 geht über in

$$\tau = A\varrho \cdot e^{\int \frac{dn}{r}} \qquad (27$$

wenn die Integration nach n längs einer Trajektorie von der Achse aus bis zur betreffenden Stelle $x\varrho$ erstreckt wird.

Alles, was der Gl. (22) vorausging, wird von dieser Berichtigung nicht betroffen und auch die weiteren Schlüsse, die sich an Gl. (27) anknüpften, werden davon nur wenig berührt.

München, im Dezember 1905.

A. Föppl.

Namen-Register.

Taf. II.

ramm.

sol. Druck.

" "

" "

" "

310 320 330 340 350 360

STANFORD LI

Lith Anst. v Hubert Köhler München

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar mit Juni 1905.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. XXVI. 1904.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Taschenbuch für das Jahr 1904.

University of Aberdeen:

Studies. No. 10. 11. 1904. gr. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions and Proceedings. Vol. 28. 1904.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations of the years 1900—1901. 1904. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Bd. 157—159. 1904.
Zbornik. Bd. IX, 2. 1904.
Grada. Bd. 4. 1904.
Rječnik. Lief. 24. 1904. 4⁰.
Codex diplomaticus. Vol. II. 1904 gr. 8.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VII, Heft 1. 2. 1905. 4⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena“ in Athen:

Athena. Tom. 16, fasc. 3. 4. 1904. 17, fasc. 1. 2. 1905.

École française in Athen:

Bulletin de correspondance hellénique. Année XXIX, Nr. 1—8. 1905.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 31. Jahrg. 1904.

Johns Hopkins University in Baltimore:

The Journal of experimental Medicine. Vol. III 3. 6; IV 3—6; V 6; VI 1—3. 1898—1902.
Memoirs from the Biological Laboratory. Vol. 5. 1903. 4°.
Circulars. 1904, No. 1—8; 1905, No. 1. 2.
American Journal of Mathematics. Vol. 26, No. 1—4; Vol. 27, No. 1. 1904—05. 4°.
The American Journal of Philology. No. 96—100. 1903—04.
American Chemical Journal. Vol. 31, No. 4—6; Vol. 32, No. 1—6; Vol. 33, No. 1—3. 1904—05.
Johns Hopkins University Studies. Series XXII, No. 1—12; Series XXIII, No. 1. 2. 1904—05.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XVI, No. 167—171. 1905. 4°.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. XII. 1904. 4°.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Miocene. Text and Atlas. 1904.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XVII. 1904.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. IV, 2. 1905.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 47, afl. 6; Deel 48, afl. 1. 1904/05.
Notulen. Deel 42, afl. 3 4. 1903/04.
Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia anno 1655—57. s'Gravenhage 1904. 4°.
Rapporten van de Commissie voor oudheitkundig Onderzoeg 1901. 1902. 1903. 1904/05. 4°.

K. Observatory in Batavia:

Regenwaarnemingen. 25. Jaarg. 1903. 1904. 4°.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Bd. XXII, 3. 1905.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Spomenik. XLI. 4°.
Godischniak. XVIII, 1904. 1905.
Sbornik. Abteilung I, Kniga 3, Abteilung II, Kniga 1. 1905.
Zentenarfeier des serbischen Aufstands. 1904.

Naturhistorisches Museum in Belgrad:

Index coleopterorum auctore Nedeljko Košanin. 1904.

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarsberetning 1904. 1905.
Aarbog für 1904, Heft III und 1905, Heft 1.
Hydrographical and Biological Investigations in Norwegian Fiords. By O. Nordgaard 1905. 4°.
G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 5, parts 5—8. 1904/05. 4°.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1904—05 in 4° und 8°.

K. Preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. XIII, 2, fasc. 1. 1905. fol.
Abhandlungen aus dem Jahre 1904. 4°.
Sitzungsberichte. 1904, No. XLI—XL. 1905 No. I—XXII.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXX. 1904.
Acta Borussica: a) Die Behördenorganisation. Bd. VII.
b) Die Briefe König Friedrich Wilhelms I. 1905.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F., No. 11. 1905. 4°.

Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 37. Jahrg., 1904, No. 11. 12. 19; 38. Jahrg., 1905, No. 1—10.

Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 56, Heft 3. 1904.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 35. 1905.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Jahrg. 6, No. 10—24; Jahrg. 7, Nr. 1. 2. Braunschweig 1904.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt f. Physiologie. Bd. 18, No. 21—26; Bd. 19, No. 1—7. 1905.

K. Technische Hochschule in Berlin:

Miethe, Die geschichtliche Entwicklung der farbigen Photographie. 1905. 4°.

Kaiserlich Deutsches Archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XIX, 4, XX, 1. 1905. 4°.

K. Preuss. Geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. N. F., No. 18. 19. Potsdam 1905. 4°.

K. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch f. 1903, Heft II. 1904. fol.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen i. J. 1901. 1905. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 33, Jahrg. 1902, Heft 3. 1905.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den Preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 54. Jahrg., 1905, Heft 2—13.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 25. Jahrg., 1905, No. 1—6. 4°.

Internationaler Zoologen-Kongress 1904 in Bern:

Compte rendu des séances du VI[e] Congrès international de Zoologie. Genève 1905.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Memorie. Serie V, Tom. 9. 1900—02. 4°.
Renticonto. N. Ser. Vol. 5. 1901.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, Vol. XXII, 4—6. 1904.

Osservatorio della R. Università di Bologna:

Osservazioni meteorologiche fatte durante l'anno 1903. 1904. 4°.
Michele Rajna, Nuovo calcolo dell' effemeride del sole. 1904. 4°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1904. 1. Hälfte.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 111. 112 (nebst einem Atlas in fol.). 1904.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 61. Jahrg., 1904, 1. Hälfte

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1905, No. 1—12.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 40, No. 8—22. 1904-05.
Memoirs. Vol. XIII, 2. Cambridge 1904. 4°.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 31, No. 2—10; Vol. 32, No. 1. 2.
Memoirs. Vol. V, Nr. 10. 11; Vol. VI, Nr. 1. 1903—05. 4°.
Occasional Papers. VII, 1—3. 1904.
Price List of Publications. 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVIII, 1. 1905.

Klub für Naturkunde in Brünn:

6. Bericht und Abhandlungen für d. J. 1903/04. 1905.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Časopis. Bd. V, 1. 2. 1905. gr. 8°.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. Jahrg. IX, Heft 1. 2. 1905. gr. 8°.

Naturforschender Verein in Brünn:

Beitrag z. Kenntnis der Niederschlagsverhältnisse Mährens u. Schlesiens v. H. Schindler. 1904. 4°.
Verhandlungen. Bd. 42. 1904.
Bericht der meteorol. Kommission. Jahrg. 1902. 1904.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série, Tom. 18, No. 10. 11; Tom. 19, No. 1—5. 1904—05.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires. Collection in 8°:
a) Classe des Sciences, Tom. 1, fasc. 1—3.
b) Classe des Lettres, Tom. 1 und Tom. 2, fasc. 1—5. 1904—05.
Mémoires. Collection in 4°:
a) Classe des Sciences, Tom. 1, fasc. 1. 2.
b) Classe des Lettres, Tom. 1, fasc. 1. 1904—05.
Biographie nationale Tome XVIII, fasc. 1.
Annuaire. 71e année 1905.
Bulletin. a) Classe des lettres 1904, No. 12; 1905, No. 1—5.
b) Classe des sciences 1904, No. 12; 1905, No. 1—5.
Table chronologique des chartes et diplômes imprimés concernant l'histoire de Belgique, par A. Wauters. Tom. X. 1904. 4°.

Observatoire Royale in Brüssel:

Annales. Nouv. Sér. Annales astronomique. Tom. VIII. IX fasc. 1.
Nouv. Sér. Physique du globe. Tom. I. II. 1904.
Annuaire astronomique pour 1906. 1905.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. 24, fasc. 1. 2. 1905.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 48. 1904.

Société Belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome 18, fasc. 4; Tome 19, fasc. 1. 2. 1905.

Société Royale zoologique et malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 38, Année 1903; Tome 39, Année 1904.

Société scientifique in Brüssel:

Revue des questions scientifiques. Table analyptiques des 50 premiers volumes 1877—1901. 1904.
Annales. Table analytique des 25 premiers volumes 1875—1901. 1904.

K. Ungar. Geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen aus dem Jahrbuche. Bd. XV, 1. 1904.
Földtani Közlöny. Bd. XXXIV, 11. 12; XXXV, 1—3. 1904/05. gr. 8°.
Jahresbericht für 1902. 1904.
Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte: Umgebungen von Kismarton (mit 1 Karte). 1905.
Übersichtskarte der auf dem Gebiete der Länder der ungar. Krone vorkommenden Dekorations- und Baugesteine. 1902.

Dirección general de estadistica de la Provincia de Buenos Aires:

Demografia anno 1901. La Plata 1904. 4°.

Departement de l'Agriculture in Buitenzorg:

Plantae Bogorienses exsiccatae. 1904. 4°.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Verslag 1903. Batavia 1904. 4°.
Mededeelingen No. LXXIII. LXXIV. Batavia 1904. 4°.
Bulletin. No. XX. 1904. 4°.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. XXI, 1. 1902—04. 4⁰.
Bulletin. V. Série, Vol. 7, Année 1903. 1904.

Institut Égyptien in Cairo:

Bulletin. IV. Série, No. 4, fasc 5. 6; No. 5, fasc. 1. 2. 1904.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1904, July-Dezember and Summary 190[illegible] 1905. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol XVI, 2. 1905. fol.
Rainfall in India. XII[th] year 1902. 1903. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 31, part 3. 4; Vol. 32, part 1. 1903—04. 4⁰.
Memoirs. Vol. 32, part 4. 1904. 4⁰.

Royal Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 1099—1111. 1904—05

Board of scientific Advice for India in Calcutta:

Annual Report for the year 1903—04. 1905. fol.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 42, No. 6; Vol. 45, No. 4; Vol. 46, No. 3. 4. 5; Vol 4[illegible] 1904—05.
Memoirs. Vol. 31, Text and Plates 1904; Vol. 25, No 2. 1905. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 56, No. 2; Vol. 58, part I. 1904. 4⁰.
Circulars No. 86—92. 1904. 4⁰.
59[th] annual Report. 1904.

Harvard University in Cambridge, Mass.:

The Harvard Oriental Series. Vol. 5. 6. 1904.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XIII, 1. 2. 1905.

Geological Survey in Capetown:

Index to the Annual Reports of the Geological Commission for 1896—1903. 1904. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Anno 80 Serie IV, Vol. 16. 1903—04. 4⁰. Anno 81. Serie IV, Vol. 17.
Bollettino mensile. Nuova Ser., No. 83—85. 1905.

Società di storia patria per la Sicilia Orientale in Catania:

Archivio storico. Anno I, fasc. 1—3. 1904. Anno II, fasc. 1. 1905.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. IV, Heft 2. Berlin 1905. 4⁰.
Die Tätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1904. Berlin 1905. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 93. 94. 1904.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Publications. Vol. 2. 1904. 4⁰.

University of Chicago:

The Decennial Publications. 10 Vols. 1904. 4⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XIX, 1, XX, 1—5, XXI, 1—5. 1904—05. gr. 8.

Videnskabsselskabet in Christiania:

Forhandlinger. Aar 1904.
Skrifter. 1904 in 2 Bden. 1905. 4⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Aarsberetning. 1904.

Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science in Christiana:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Scientific Results. Vol. VI. 1905. 4⁰.

Lloyd Library in Cincinnati:

Bulletin. No. 7. 8. 1903—05.

University in Cincinnati:

University Studies. Ser. II, Vol. I, No. 1. 2. 1905.
Record. Ser. I, Vol. I, No. 3. 5. 8. 9 and Cataloque 1904—05. 1905.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mitteilungen. Bd. VII, Jahrg. 1903 u. 1904.

University of Missouri in Columbus.

Bulletin. Vol. 5, No. 11. 12. 1904. Vol. 6, No. 1. 1905.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. XI, 1. 2. 1904.
Katalog der Gesellschaftsbibliothek. Heft 1. 1904.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. II, 4. Heidelberg 1905.

Academy of sciences in Davenport:

Proceedings. Vol. IX. 1904.

Historischer Verein in Dillingen:

Jahrbuch. 17. Jahrg. 1904.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 27. 2ᵉ trimestre. 1904.

Verein für Erdkunde in Dresden:

Mitteilungen. Heft 1. 1905.
Büchereiverzeichnis. 1905.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Vol. XXV, Section A, No. 3; Section B, No. 1—5; Section C, No. 5—10. 1904/05.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 5. 1904.
The scientific Proceedings. Vol. X, part 2. 1904.
Transactions. Vol. 8, part 6—16 and Index, Vol. 9, part 1. 1904—05. 4°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 27, No. 6. June 1905.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. IX. 1905.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXV, No. 5—8. 1905.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 16, Nr. 1—3. 1904—05.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

88. Jahresbericht. 1902—03. 1904.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. V. Serie. Vol. I, disp. 4., Vol. II, disp. 1. 1904—05.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 17, parte 2. 1904.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a/M.:

Archiv für Frankfurts Geschichte. III. Folge, Bd. VIII. 1905. gr. 8°.

Physikalische Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1903—04. 1905.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. Bd. 32. 1904.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Nouv. Série. Fasc. 6. 7. 1905. gr. 8°.

Institut national in Genf:

Le 50me anniversaire de la fondation de l'Institut Genevois. 1904.
Bulletin. Tome 36. 1905.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1903 pour Genève. 1904.
Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1903.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Mémoires et Documents. Tom. VIII, 2. 1904.
Bulletin. Tom. 2, livr. 9. 1904.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. 34, fasc 3, Vol. 35, fasc. 1. 1905. 4°.

R. Biblioteca Universitaria in Genua:

Atti. Vol. XVIII. 1904. 4°.

Società Ligure di storia patria in Genua:

Giornale storico. Anno 5. 1904 fasc. 1—4. Anno 6 1905 fasc. 1—2.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1905, No. 1—6. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VIII, Heft 4. 5.
b) Mathem.-physikal. Klasse. Bd. III, Heft 3; Bd. IV, Heft 1. 2. Berlin. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1904, Heft 4. 5; 1905, Heft 1. 2.
b) Mathem.-phys. Klasse. 1904, Heft 6; 1905, Heft 1. 2.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1904, Heft 2. gr. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XII, 9—11 and Index zu vol. 1—10. 1904.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Steirische Zeitschrift für Geschichte. Jahrg. II, Heft 1—4. 1904.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1904, Heft 41. 1905.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VII. Reeks. Deel IV afl. 1. 2. 1905.

Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen in Haarlem:

Natuurkundige Verhandelingen. III. Verzameling. Deel VII, 1. 1905. 4⁰.

Musée Teyler in Haarlem:

Archives. Ser. II, Vol. 9, partie I. 1904. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. 10. 1905. 4⁰.
Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. 10, livr. 1. 2. 1905.

Station franco-scandinave de sondages aériens in Hald:

Travaux de la Section à Hald 1902—03. Viborg 1904. 4⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 40, No. 12; Heft 41, No. 1—5. 1904—05.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 58, Heft 4; Bd. 59, Heft 1. 2. Leipzig 1904—05.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. IV, 5. Leipzig 1905.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

27. Jahresbericht. 1905. gr. 8⁰.
VI. Nachtrag zum Katalog 1904. 1905.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen 1904. III. Folge 12. 1905.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1904, Heft 3. 4; 1905, Heft 1.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:
50. bis 54. Jahresbericht. 1905.

Reichslimeskommission in Heidelberg:
Der obergermanisch-raetische Limes. Lief. XXIV. 1905. 4°.

Grossherzogl. Sternwarte in Heidelberg:
Veröffentlichungen. Bd. III. Karlsruhe 1904. 4°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XIII, 2. 1905.

Naturhistorisch-medicinischer Verein in Heidelberg:
Verhandlungen. N. F. Bd. VIII, 1. 1904.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:
Öfversigt XLVI. 1903—04.

Institut Météorologique central in Helsingfors:
Observations météorologiques 1891—94. 1904. fol.
Observations. Vol. XVIII. 1899. 1904. fol.
Observations météorologiques. État des glaces et des neiges pendant l'hiver 1893—1895. 1904. fol.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:
Acta. Vol. 26. 1904.
Meddelanden. Heft 30. 1904.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Archiv. N. F., Bd. 32, Heft 3. 1905.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:
Verhandlungen. 53. Bd. Jahrg. 1903. 1905.

*Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in **Hildburghausen**:*
Schriften. 50. u. 51. Heft. 1904—05. gr. 8°.

*Vogtländischer Altertumsforschender Verein in **Hohenleuben**:*
74 u. 75. Jahresbericht. 1905.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:
Jahrbuch. 32. Jahrg. 1905.

Historischer Verein in Ingolstadt:
Sammelblatt. 28. Heft. 1904.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:
The Journal. Vol. IX, No. 1—5. 1905. gr. 8°.

American Chemical Society in Ithaka:
The Journal. Vol. 27, No. 1—5 u. Supplem. — Number 1905.

*Medizinisch-naturwissenschaftliche **Gesellschaft in Jena**:*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 39, Heft 2—4. 1904—05.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:
Oberrheinische Stadtrechte. II. Abteilung. 1. Heft. Heidelberg 1905.
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. XX, Heft 1. 2. Heidelberg 1905.

Zentralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1904. 1905 4⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, Tome 14, No. 2—4. 1904.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 71, Heft 12; Bd. 72, Heft 1—5. 1904—05
Godischny. Akt 1904.

Société de médecine in Kharkow:

Traveaux. 1900-1901 et 1902—1903. 1904.

Société des sciences physico-chimique à l'Université de Kharkow:

Travaux. Tom. XXXI. Ottschet (Bericht) über d. J. 1903. Supplements fasc. XVX—VII. 1904.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1904. kniga 1. 1905. gr. 8⁰.
Uebersicht über die kinetische Theorie der chemischen Lösungen von G. E. Timofeev. 1905.

Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. VII. Abteilung Helgoland Heft 1. Bd. VIII. Abteilg. Kiel. 1905. gr. 4⁰

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:

Schriften. Register zu Band I—XII. 1904.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 44, No. 11—12. Bd. 45 No. 1—4. 1904—05. gr. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1903. 1904.
Carinthia I. 94. Jahrg. No. 1—6. 1904.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 95. Jahrg. 1905, No. 1. 2.

Medic.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:

Értesitö. 4 Hefte. 1904.

Stadtarchiv in Köln:

Mitteilungen. Heft 32. 1904.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 45 Jahrg. 1904. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Julius Thomsen, Termokemiske Undersögelser. 1905.
Oversigt. 1904 No. 6; 1905 No. 1—3.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarböger, 1904. II. Raekke 19. Bd.
Mémoires. Nouv. Sér. 1903

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Bulletin. Année 1904—05, No. 1. 2. 4⁰.
Publications de circonstance, No. 21.—23. 1905.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Bulletin. Classe de philologie 1905 No. 1. 2.
Classe des sciences mathématiques 1905. No 1—4.
Atlas geologiczny Galicyi. Zesyt. Lief. 11. 15. 16 mit erklärendem Text 1903.
Katalog literatury naukowej polskiej Tom. III, 4, Tom. IV, 1—3. 1904—05

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 40, No. 151. 1904.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XXII, 3. 4. 1903—04.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1903—04. 1904.
Levensberichten 1903—1904. 1904.
Cartularium der Abdij Marienweerd. 's Gravenh. 1890. 4⁰.
D. C. Hesseling. Het Negerhollands. 1905.

Sternwarte in Leiden:

Verslag 1902—1904. 1905.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXVII. 1905.
Jahresbericht. 1905.

Cuerpo de Ingenieros de Minas del Peru in Lima:

Boletín No. 5. 10. 15—23. 1903—05.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 1904 No. 11. 12; 1905, No. 1—4.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. No. 57. 1904.

Université Catholique in Loewen:

Programme des cours. Année 1904—05. 1904.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1904.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 17 part 2. 1905

National physical Laboratory in London:

Report fo the year 1904. 1905. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XX, No. 77. 78. 1905.

Royal Society in London:

Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Part II. 1904. 4⁰.
Reports to the Evolution Committee Report II. 1905.
Proceedings. Vol. 74. No. 503—506. Ser. A. Vol. 76. No. 507—509; Ser. B. Vol. 76. No. 507—509. 4⁰. 1905.

Philosophical Transactions. Series A. Vol. 202. 1904. 4⁰.
List of Members. Obituary Notices. Part IV. 1905.
Year-Book 1905.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 65, No. 2–7. 1904–05.

Chemical Society in London:

Journal. No. 507–512. 1905.
Proceedings. Vol. 21, No. 288–298. 1905.

Linnean Society in London:

The Journal. Zoology. Vol. 29 No. 191. 1905.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1905. Part I—III.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1904. Vol. I, 2; Vol. II, 1. 2.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1835–1861. 4⁰.

Secretary of State for India in Council zu London:

Census of India. 1901. Vol. I India Part I Report. Part II Tables. Nebst: Ethnographic Appendices. Calcutta 1903 fol.

Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:

Museumsblätter. Heft 2. 1905.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 32 livr. 1. 1904—05.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Bd. 39. 1903 in 2 Abteilungen. 1904. 4⁰.
Sveriges offentliga bibliothek Accessionskatalog 17. 1902. Stockholm 1904.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. XIV, 2. 1903. 1904.

Kodaikánal and Madras Observatories in Madras:

Annual Report for 1904. 1904 fol.
Bulletin. No. 1. 1905. 4⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Revista. Tomo I, No. 6–8. Tomo II, No. 1—4. 1904–05.
Anuario. 1905.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 46, cuad. 1—6. 1905.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II, Vol. 37, fasc. 17—20; Vol. 38, fasc. 1—3. 1904–05.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. XX. fasc. 3. 4. 1904—05 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 43, fasc. 4. Vol. 44, fasc. 1. 1905.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie IV, Anno 31 fasc. 4. Anno 32 fasc. 5. 1904–05.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 49, part 1. 2. 1905.

Philippine Weather Bureau in Manila:

Bulletin. 1904 July—November. 4°.
Annual Report for the year 1903. Part I. 1905. 4°.

Ethnological Survey for the Philippine Islands in Manila:

Negritos of Zambales. Vol. II part 1. 1904 4°.

Altertumsverein in Mannheim:

Mannheimer Geschichtsblätter 1905, No. 2—7. 4°.

Abbaye de Maredsous:

Revue Bénédictine. Année XX No. 3. 4. 1903. Année XXII No. 1—2. 1905
Anecdota Maredsolana Vol. I. II. III pars 1—3. 1893—1903. 4°.
D. Ursmer Berlière, Inventaire analytique des libri obligationum et solutionum des Archives Vaticanes. Rom 1904.
D. Ursmer Berlière, Les Evêques auxiliaires de Cambrai et de Tournai. Bruges 1905.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. XIV. Paris. 1904. 4°.

Hennebergischer altertumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums. Liefg. 19. 1904 gr. 8°

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XVII, 2. 1905.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 1902-03. 1905.

Gesellschaft für Lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 16. Jahrg. 1904. gr. 8°.

Instituto geológico in Mexico:

Parergones. Vol. I No. 6—8. 1904—05.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletín mensual. Agosto 1902. 1902. fol.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate“ in Mexico:

Memorias y revista. Tom. 19, No. 11—12; Tom. 20, No. 11—12. 1903—04.

Musée océanographique in Monaco:

Bulletin No. 21, 23—41. 1905.
Résults fasc. XXIX. 1905 fol.

Museo nacional in Montevideo:

Geografia física y esferica del Paraguay por Rodolfo R. Schuller. 1904.
Annales. Flora Uruguaya. Tomo II (continuacion). 1905. 4°.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des sciences 2e Sér. Tome 3 No. 4 1904.

Oeffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg 1904. 1905.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Nouveaux Mémoirs. Tom. XXI, 3. 4. 1901—04. fol.
Bulletin. Année 1904, No. 1—3. 1905.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXIV, 4. 1904. 4⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 65—76. 1905. 4⁰.

Ornithologische Gesellschaft in München:

Verhandlungen. Bd. IV 1903. 1904.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. 6. Jahrg. 1904 Heft 4; 1905 Heft 1. 4⁰
Adolf Specht, Grösste Regenfälle in Bayern. Nebst Anhang. 1905. 4⁰.
Flächenverzeichnis Heft VIII. 1905 fol.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der erscheinenden Zeitungen. Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen zu 1904 und 1905. fol.

K. Flurbereinigungskommission in München:

Geschäftsbericht für die Jahre 1897—1905. 1905. 4⁰.

Verlag der „Hochschul-Nachrichten" in München:

Hochschul-Nachrichten 1905 No. 172—177. 4⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1905.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1905. No. 1—16.

Redaktion des „Thesaurus Linguae Latinae" in München:

Thesaurus L. L. Vol. I, fasc. VIII. Leipzig 1905. 4⁰.

Kaufmännischer Verein in München:

31. Jahresbericht. 1904—05. 1905.

Historischer Verein in München:

Oberbayerisches Archiv. Bd. 51 Heft 3. 1904
Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. 4, Heft 6; Jahrg. 5, Heft 1—3. 1904 bis 1905. 4⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 62 und Register zu Bd. 1—50, Liefg. 4—6. 1905.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série III, Tom. V, fasc. 2. Paris 1904.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 35. 1905.
Rendiconto Anno 42 1903; Anno 43; 1904. 1905.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3, Vol. 10, fasc. 8—12; Vol. 11, fasc. 1—3 und Indice generale 1737—1903. 1904—05.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. XVI, 4. Berlin 1904.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:

32. Bericht. 1902—1904.

Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-T

Transactions. Vol. 56, part 7; Vol. 55, part 2. 3. 1905.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. 4th Series. Vol. XIX, No. 109—115. 1905.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Transactions. Vol I. Preface and Parts VII. VIII. 1904. 4°.

Academy of Sciences in New-York:

Memoirs. Vol. II, part 4. 1905. 4°.
Annals. Vol. XIV. XV. XV, 3; Vol. XVI, 1. 1901—04.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. Nr. 12. 1904.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XX. 1904.
Journal. Vol. V, No. 1. 2. 1905.
Album of Philippine Types. 1904. 4°.
Memoirs. Vol. III. 1904. 4°.
Decorative Art of the Sioux Indians. By Clark Wissler. 1904.
Funeral Urns from Oaxaca. By Marshall H. Saville. 1904.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 36, No. 12; Vol. 37, No. 1—5 u. 7. 1905.

Nederlandsche botanische Vereenigung in Nijmegen:

Recueil de travaux botanique. No. 2—4. 1904.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. VIII, No. 4 und Supplement t
Vol. VIII; Vol. IX, No. 1. 2. 1904—05.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Bd. XV, 2. 1904.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1904, Heft 1—4. 1904.

Neurussische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. 26. 27. 1904—05

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 29. Bd., 1904. 1905.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. III. 1904. 4°.

Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana in Padua:

Atti. Ser. II, Anno 1, fasc. 2. 1905. gr. 8°.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. 20, 1903—04. 1904.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

Rivista. N. S., Anno IX, fasc. 2—4. 1905.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario. 1905.
Rendiconti. Tom. 19, fasc. 1—6. 1905. gr. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti 1904. 1905. gr. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapport annuel de la commission de l'hygiène pour les années 1902 et 1903. 1903—04.
Rapport sur les vaccinations pour les années 1901 et 1902. 1903-04.
Bulletin. 1904, No. 43; 1905, No. 1—27.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 140, No. 1—26; Tom. 141, No. 1. 1905. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 758—763 (février—juillet 1905). 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Revue de l'histoire des réligions. XXVᵉ année. Tom. 49, No. 3; Tom. 50, No. 1. 2. 1904.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. IVᵉ Série. Tom. VI, 1. 2. 1904. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletin. V. Série. Tom. 5, fasc. 2. 3. 1903.

Société des études historiques in Paris:

Revue. 71ᵉ année. 1905, Janvier-Juin.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1904, No. 2—5. 4⁰.

Société géologique de France in Paris:

Paléontologie. Tom. XII, 1. 1904. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 32, fasc. 4; Tom. 33, fasc. 1—2. 1904—05.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Tom. 23, No. 1—6. 1904.
Mémoires. Nouv. Série. Livr. 14 15. 17. 1904. 4⁰.

Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibèrie in St. Petersburg:

Jénisséi. Livre 5.
Amour. Livre 4. 1904.
Léna. Feuille II. 6 avec texte explicativ.
Jénisséi. Feuille K. 7. 8, L. 6. 8. 9 avec texte explicativ.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Vol. XV, 3; XXIII, 3; XXIV, 1. 1904. 4⁰.

Permanente Seismische Zentralkommission in St. Petersburg:

Iswestija. Bd. II, Lief. 1. 1905. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Bd. 42, Lief. 1. 1904.

Physikal.-chem. Gesellschaft an der Kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 36, Heft 9; Tom. 37, Heft 1—4. 1904—05.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. 1904, No. 60. 1905.
Schriften aus d. J. 1904—05.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. 2d Series Vol. XIII, 1. 1905. fol.
Proceedings. Vol. 56, part II. III. 1904—05.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 28, No. 8; Vol. 29, No. 113 und 114. 1904—05.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 43, No. 177. 178. 1904.
Transactions. Vol. XXI, New Series, Part 1. 1905. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XVIII. 1905.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. 14, No. 6—8. 1905. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, 1904, Dicembre; 1905 Gennaio-Aprile. 1904—05.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. XIX. Jahrg., 1. u. 2. Halbband. 1904.
Historische Monatsblätter. 1904. Januar—Dezember.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der 14. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung. Berlin 1905. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Díl 21, Heft 3. 4. 1904. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo V. 1904. gr. 8⁰.
Věstník. Bd. XIII. 1904. gr. 8⁰.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques IXe année. 1904, Heft 1. gr. 8⁰.
Almanach. Ročník XV. 1905.
Archiv pro Lexikographie. Číslo V. 1904. gr. 8⁰.
Bibliografie České Historie. Tom. 3, svazek 1. 1904. gr. 8⁰.

Landesarchiv des Königreichs Böhmen in Prag:

Monumenta Vaticana. Tom. I. V. 1903. 4⁰.
Codex diplomaticus regni Bohemiae. Tom. I, 1. 1904. 4⁰.
Archiv český. Díl XXVII. 1904. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Prag:

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. V, 2. 1904.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1904. 1905.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 33, No. 4. 5; Bd. 34, No. 1—3. 1904—05.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

56. Bericht 1904. 1905.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1904. 1905.
Časopis. Bd. 78, Heft 5. 6; Bd. 79, Heft 1. 2. 1905.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1904, Bd. 52. 1904.

Transval Meteorological Department in Pretoria:

Observations 1903—04. First Report. 1905. fol.

Biblioteca Nacional in Rio de Janeiro:

Annaes. Vol. XXIII. XXIV. XXV, 1901—03. 1904.
Reorganisação naval. 1904.
Annuario commercial do Estado de S. Paulo. 1904. 4°.
J. J. de Fonseca, Synopse de Neologismos. 1901.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletim mensal 1904 Janeiro-Sept. 1904—05. 4°.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 15. 1904.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1905.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, vol. 13, fasc. 9—12. 1904.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 13, semestre 2, fasc. 12; Vol. 14, semestre 1, fasc. 1—11. 1904—05. 4°.
Atti. Serie V. Notizie degli scavi. Vol. I, fasc 4—12. 1904—05. 4°.
Memorie. Classe di scienze fisiche. Serie V, Vol. 5, fasc. 1. 2. 1904. 4°.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studie Documenti di storia e diritto. Anno XXV, 1—4. 1904. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1904, No. 4; 1905, No 1.

Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XIX, 3. 4. 1905. gr. 8°.

R. Ministero della Instruzione pubblica in Rom:

Opere di Galileo Galilei. Vol. 15. Firenze 1904. 4°.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Serie II, Vol. XIV, 2. 1892; XXI, 1. 1889; Vol. XX, 1. 1898; Vol. XXII, 1. 1900. 1904. fol.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol 27, fasc. 3. 4. 1904.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, Deel VI, stuk 1. 1905 4°.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 10, fasc. 3. 4; Vol. XI, fasc. 1. 1904—05.

Museo Civico in Rovereto:

Regesto dell' Archivio comunale della città di Rovereto. fasc. 1. 19[illegible]

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tom. IV, No. 4. Hanoi 1904. 4°.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Jahrbuch 1903. 1904.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Memoirs. Vol. IV. 1904. 4°.
Proceedings. Zoology, Vol. 3, No. 7—13; Botany, Vol. 2, No. 11; Geol. Vol. 1, No. 10. 1904.

Università in Sassari:

Studj Sassaresi. Anno III, Sez. I, fasc. 2; Sez. II, fasc. 2. 1903—04.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Anno 1904, No. 7—10. 1904—05.

K. K. Archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXVII, 1904, No. 9—12. 1904.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mitteilungen. XXVII. 1904.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Arkiv för matematik. Bd. I, No. 3. 4. 1904.
Arkiv för kemi. Bd. I, No. 3. 4. 1904.
Arkiv för botanik. Bd. III, No. 4. 1904.
Arkiv för zoologi. Bd. II, No. 1. 2. 1904.
Handlingar. N. F., Bd. 37, No. 3. 1903. 4°.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:

Le prix Nobel 1902. 1905.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 26, Heft 7; Bd. 27, Heft 1—4. 1904—05.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska undersökning. Serie Aa No. 119. 121. 124. 12[illegible] Serie Ac 5. 8; Serie Aa No. 1. 2; Serie C No. 195. 196. 1904 [illegible] Karten.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 38, Heft 10. 11; Bd. 39, Heft 1—4. 1904—05.

K. Landesbibliothek in Stuttgart.

Hermann Fischer, Schwäbisches Wörterbuch. Liefg. 2—10. Tübingen 1901—04. 4°.

Württemberg. Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württemberg. Geschichtsquellen. Bd. VIII. 1904

K. Württemb. Statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württemberg. Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1904, Hft. I. II. 1905. 4°.

West Hendon House Observatory in Sunderland:

Publications. No 3. 1905. 4°.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1904. 1905. fol.
Palaeontology No. 13. 1904. 4°.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. VII, 4; Vol. VIII, 1. 1904—05. 4°.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. XXIX, part 3. 4. 1904.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Observationes meteorológicas año 1896. 1905. 4°.
Anuario. Año de 1905. Mexico 1904.

Earthquake Investigation Committee in Tokio:

Publications. No. 19. 20. 1904—05. 4°.

Deutsche Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mitteilungen. Bd. X, 1. 1905.

Kaiserl. Universität in Tokio:

The Journal of the College of Science. Vol. XIV; Vol. XX, 3. 4. 1904. 4°.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd V, 3. 1904. 4°.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. VI, 4. 1905. 4°.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. XVe année. 1904. No. 63. 64.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série, Tome VI, Année 1904. Paris 1904. 4°.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XIX, 2. 1904.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1904. 1905.
Atti. Vol. 40, disp. 1—5. 1905.

Accademia d'agricultura in Turin:

Annali. Vol. 47. 1904.

Verein für Kunst und Altertum in Ulm:

Mitteilungen. Heft 11. 12. 1904—05. 4°.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 36, Année 1904. 1904—05. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht.

Willelmi Procuratoris Egmondensis Chronicon. Amsterdam 1904.
Bijdragen en Mededeelingen. Deel XXV. Amsterdam. 1904.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht.

Crania ethnica Philippinica. Haarlem 1901—04. 4⁰.
Aanteekeningen 1904. 1904.
Verslag 1904. 1904.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

No. 90 Études des phénomènes de marée. II. 1905.
Annuaire, 55e année 1903. No. 97 A) Météorologie. No. 98 B) Magnetisme terrestre. 1904. 4⁰.
Observations des nuages en 1896—97. 1904. 4⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. 5de Reeks. Deel 5, aflev. 2. 1905.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Annate 1903—04. Vol. 34. 1904.

Commissioner of Education in Washington:

Report for the year 1903. Vol. I. 1905.

Bureau of American Ethnology in Washington:

17. annual Report. XXI; XXII, 1. 2. 1903—04. 4⁰.

Department of Commerce and Labor in Washington:

Bulletin. Vol. I, No. 1. 2. 1904—05.

Carnegie Institution of Washington:

Contributions. No. 1. 2. 1905.

Smithsonian Institution in Washington:

A Select Bibliography of Chemistry by J. C. Bolton, IId Supplement. 1904
Jos. Leidy, Researches in Helminthology and Parasitology. 1904.
Annual Report for the year ending, June 30, 1903. 1904.
Miscellaneous Collections. Vol. 46, No. 1543. 1544; Vol. 47, No. 1478. 154[illegible] 1904—05.
Henry Draper, On the Construction of a silvered Glass Telescope. Part of Vol. 34 of the Smithsonian Contributions to Knowledge. 1904. 4⁰

U. S. National-Museum in Washington:

Bulletin. No. 50. 1904.
Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. IX. 1905.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report 1903—04 und Appendix No. 3—9. 1904. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 37. Jahrg., Heft 2. 1904.

Western Australian Government Offices in Westminster:

Western Australian Geological Survey. Bulletin No. 2. 3. 5—12. 15 Part[illegible] 1898—1904.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1904—05.
Abt. I Bd. 113, Heft 5—10; Bd. 114, Heft 1. 2.
IIa Bd. 113, Heft 8—10; Bd. 114, Heft 1—4.
IIb Bd. 113, Heft 7—9; Bd. 114, Heft 1—3.
III Bd. 113, Heft 8—10.
Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. Bd. 77. 1905. 4⁰.

K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:

Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., XXV. XXVI. 1904.
Jahrbuch. Jahrg. 1904, Bd. 54, Heft 2—4 und Generalregister zu Bd. 41—50 1904—05. 4⁰.
Verhandlungen. 1904, No. 13—18; 1905, No. 1—5. 4⁰.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1903, (N. F., Bd. 40 nebst Anhang. 1905. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. Bd. XIII. 1903. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1905. No. 1—27. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 55, Heft 1—4. 1905.
Abhandlungen. Bd. III, Heft 1. 1905. 4⁰.

K. K. Militär-geographisches Institut in Wien:

Ergebnisse der Triangulierungen. Bd. I—III. 1901—05. 4⁰.

K. K. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XIX, 2. 3. 1901. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 44. Jahrg. 1903/04. 1904.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 34. Bd. 1904. 1905.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 37, No. 3—7. 1904—05.
Sitzungsberichte. 1904, No. 4—9.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:

Jahrbuch. 30. Bd. 1905.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. XXVI, 3. 1905. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1905. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 49. 1904, Heft 3. 4. 1905.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. VI, No. 2—4. 1905. 4⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Fürst Albert I. von Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. No. XXVIII. 1904. fol.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1904, No. 24; 1905, No. 1–1
Journal für prakt. Chemie. N. F., Bd. 70, Heft 12; Bd. 71, Heft 1–
1904–05.

Renward Brandstetter in Luzern:

Rätoromanische Forschungen I. 1905.

Bruno in Porto:

Théorie exacte et notation finale de la musique. 1902. 4°.

Antonio Cabreiro in Lissabon:

Sur les Mathematiques en Portugal. 1905.

Arthur J. Evans in Oxford:

The Palace of Knossos. Athen 1903—04. 4°.

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1905, No. 3—28. 4°.

H. Fritsche in Riga:

Die jährliche und tägliche Periode der Erdmagnetischen Elemente. 19

W. Gallenkamp in München:

Über den Verlauf des Regens. Aus der Meteorolog. Zeitschrift. 1905.

Mme Vve J. B. André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 29. Janvier-Juin. 1905. Paris

Ferdinand Güterbock in Berlin:

Gesammelte Schriften von Paul Scheffer-Boichorst. 2 Bände. 1904–0

G. N. Hatzidakis in Athen:

Ἀπάντησις εἰς τὸν K. Krumbacher. 1905.

F. R. Helmert in Potsdam:

Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreih
Berlin 1905. gr. 8°.

O. Holder-Egger in Potsdam:

Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae histori
1905. gr. 8°.

Konrad Keller in Zürich-Oberglatt:

Das elektro-pneumatische Motorsystem der Atmosphäre. Zürich 1904.

Franz Kerntler in Budapest:

Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes. 19

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XIV, Heft 1 u. 2. Leipzig 1905. 8°.

Ernst Kuhn in München:

Nachrichten über die Familie Kuhn. 2 Hefte. 1890—1903.

Ernst Leyst in Moskau:

Ein Faszikel meteorologischer Schriften v. 1901—04.

Wilhelm Ludowici in München:

Stempelnamen römischer Töpfer. Rheinzabern 1901—04 in 4⁰.

C. Mehlis in Neustadt a/H.:

Das neolithische Dorf „Wallböhl" bei Neustadt a/H. Braunschweig 1905. 4⁰.

Wilhelm Meyer in Berlin:

Gesammelte Abhandlungen zur mittellateinischen Rythmik. 2 Bände. 1905.

Basilio Modestov in Rom:

In che stadio si trovi oggi la questione etrusca. 1905.

Ernesto Monaci in Rom:

Archivio palaegrafico Italiano. fasc. XX. 1905. fol.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. 30ᵉ année, tom. 87, No. I. II, Janvier-Avril; tom. 88, No. I. II, Mai-Aoutc. 1905. Paris.

Graf Robert de Montessus in Lille:

Sur les fractions continues algébriques. Palermo 1905.

Oechsner de Coninck in Montpellier:

Contribution à l'étude des acides organiques. fasc. 1. 1905.

Edouard Piette in Rumigny:

Études d'ethnographie préhistorique Nr. VI. VII und sechs andere Schriftchen ethnogr. Inhalts. Paris 1902—04.

Carlos Prince in Lima:

Idiomas y dialectos indigenas del Continente Hispano-Sud-Americans. 1905. 4⁰.

H. Rosenbusch in Heidelberg:

Mikroskopische Physiographie der Mineralien. Bd. I, 2. Hälfte. Stuttgart 1905.

Heinrich Rudolph in Coblenz:

Luftelektrizität und Sonnenstrahlung. Leipzig 1903.

Paul Sabatier in Toulouse:

Nouvelles méthodes d'hydrogénation. Paris 1905.

Frederico Sacco in Turin:

I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria. 1904. 4⁰.

Arnold Samuelson in Hamburg:

Luftwiderstand und Flugfrage. 1904.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. Jahrg. 1905. No. 1—12. 4⁰.

*

Siemens-Schuckertwerke in Berlin:

Nachrichten. Heft 4. 1904. fol.

Lucian Scherman in München:

Orientalische Bibliographie. 17. Jahrg. (1903). Berlin 1904.

Max Schlosser in München:

Die fossilen Cavicornia von Samos. Wien 1904. 4⁰.

Hugo Schuchardt in Graz:

Hugo Schuchardt an Adolf Mussafia. 1905. fol.

Vincenzo Strazzulla in Messina:

Dopo lo Strabone Vaticano del Cozza-Luzi. 1901.
Sulle fonti epigrafiche della prima guerra punica. Teramo 1902.
I Persiani di Eschilo volgarizzati in prosa. 1904.

Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. 3. Reihe, 8. Bd., 4. Heft; 9. Bd. 1. u. 2. Heft. 1905.

N. Wecklein in München:

Studien zu Ilias. Halle 1905.

Gustav Wepfer in Stuttgart:

Welche Kräfte haben die Kettengebirge gefaltet und aufgerichtet? Zürich 1905.

Georg Wilke in Hellmitzheim:

Georg Karg (Parsimonius). Scheinfeld 1904.

Ed. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XIV, 1. 2. Leipzig 1905.

Bruno Wolff-Beckh in Steglitz:

Kaiser Titus und der jüdische Krieg. Berlin 1905.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli mit Dezember 1905.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. Jahrg. 1904.
Rad. Bd. 160. 1905.
Zbornik. Bd. X, 1. 1905.
Starine. Bd. 31. 1905.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VII, 1—4. 1905. gr. 8⁰.

Faculté de droit et des lettres in Aix:

Annales Tom 1, No. 1—3. Paris 1905.

New-York State Library in Albany:

Annual Report 1903.
State Museum Report No. 56 (4 vols). 1902.
State Museum Bulletin No. 63; 69—72; 74—76; 78—82. 1904—05.
College Department. Sixth annual Report 1903.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F. Bd. XI. 1905.

Société de Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1904, No. 2—4.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde II. Sectie. Deel XI u. XII, 2. 1905. 4⁰.
Niuve Recks. Deel VI, 1, IX, 1.
Fanum Apollinis, carmen. 1905.
Jaarboek voor 1904.
Verslag. Wis-en natuurkundige Afdeeling 1904—05. Deel XIII, 1. 2.

Historischer Verein in Ansbach:

52. Jahresbericht. 1905. 4⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena" in Athen:

Athena. Bd. 17, Heft 3. 4. 1905.

École française in Athen:

Bulletin de correspondance hellénique. 29ᵉ année 1905, No. 9–12 Sep bis Dez. Paris 1905.

Johns Hopkins University in Baltimore:

J. H. Hollander, The financial History of Baltimore. 1899.
Circulars. 1905, No. 3–7.
American Journal of Mathematics. Vol. 27, No. 2. 3. 1905. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 26, No. 1. 2. 1905.
American Chemical Journal. Vol. 33, No. 4–6; Vol. 34 No. 1. 2. 1905.
Johns Hopkins University Studies. Ser. XXIII, No. 3–10. 1905.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. 16, No. 172–175. 177. 1905.

Peapody Institute in Baltimore:

38. annual Report, June 1., 1905.

Historischer Verein in Bamberg:

63. Bericht für das Jahr 1904.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XVIII, 1. 1905.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. V, Heft 1. 1905. 4⁰.

Universität in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

Société des sciences in Bastia:

Bulletin Année 23 trimestre 3. 4. (1903) = fasc. 271–276.

R. Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 26. 1903. 1905. fol.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 64 (= Xᵉ Serie Deel 8) Weltevreden 190

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 69. 1905
Srpske etnografike Sbornik. Bd. III. 1905.

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarbog für 1904, Heft 2. 3. 1905, Heft 1.
G. O. Sars, An Account of the Crustacea. Vol. 5, parts 9 u. 10. 1905. 4

University of California in Berkeley:

The Department of Anthropology of the University of California 19 gr. 8⁰.

K. Preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1905. No. 23—38. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt in Berlin:

Jahrbuch für 1902. Bd. XXIII. 1905. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F. Heft 43. 44. 1904—05. 4⁰.

Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 38. Jahrg., No. 11—17. 1905.

Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 56, Heft 4, 1904; Bd. 57, Heft 1 u. 2. 1905.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1904. Abteilg. I. II. III. Braunschweig 1905.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. Bd. 18 Registerheft; Bd. 19 No. 8—20. 1905.
Verhandlungen. Jahrg. 1904—05, No. 5—15.
Bibliographia physiologica. 3. Serie, Vol. I, No. 1. u. 2. 1905.

Kaiserlich Deutsches Archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XX. 1905. Heft 2 u. 3. 4⁰.
Die Enneakrunos von Friedrich Gräber. Athen 1905.
Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Abteilung im Jahre 1904. Frankfurt 1905. 4⁰.

K. Preuss. Geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F., No. 20—24. 1905/06. 4⁰.

K. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen. Teil I. II. 1904/05. 4⁰.
Ergebnisse der Arbeiten am Äronautischen Observatorium 1903—04. 1905. 4⁰.
Bericht über das Jahr 1904.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1904, Heft 1. 1905. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 34, Heft 1 u. 2. 1905.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. 18 erste und zweite Hälfte. Leipzig 1905.

Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft in Berlin:

Geschäftsjahr 1. Juli 1904 bis 30. Juni 1905. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 25. Jahrg., 1905, Heft 7—12. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Quellen zur Schweizer Geschichte. 24. Band. Basel 1905.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen. 87. Jahresversammlung 1904 in Winterthur.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Bd. 18, Heft 1. 1905.
Festgabe zur 60. Jahresversammlung. Bern 4./5. Sept. 1905.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. Série VII, Tom. 8. 1905.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Memorie. Serie 5, Tom. 10; Serie 6, Tome 1 e Indice 1890-93. 1902-04 f.
Renticonto. N. Ser. Vol. 7. 8. 1903—04.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, Vol. 23, fasc. 1—3. 1905. gr. 8°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1904, 2. Hälfte; 1905, 1. Hälfte.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4° und 8°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 61. Jahrg. 1904, 2. Hälfte; 62. Jahrg. 1905, 1. Hälfte.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances Année 1903—04. Paris 1904.
Mémoires. VIe Série, tom 2, cahier 2. Paris 1904.
Observations pluviométriques 1903—04.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 59 (= VII. Série, tom 9). 1904.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1905, No. 14—24.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 40, No. 23 24; Vol. 41, No. 1—13. 1905.
The Rumford Fund of the American Academy of Arts and Sciences. 1905

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 35. 1904.

Magistrat der Stadt Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. III, Abtlg. 1—3. Berlin 1901—05. 4°.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Meteorologisches Jahrbuch der Hansestadt Bremen. XV. Jahrg. 1904 1905 fol.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

82. Jahresbericht 1904 und Ergänzungsheft zum 81. Jahresbericht.

Mährisches Landesarchiv in Brünn:

Aug. Prokop, Die Markgrafschaft Mähren in kunstgeschichtlicher Beziehung. 4 Bände. Wien 1904. fol.
Libri citationum et sententiarum ed. V. Brandl. Vol. 1—6 1872—18..

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. V, Heft 2 u. 4. 1905.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. IX. Jahrg., Heft 3. 1905. gr. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série, tom 19, No. 6—8. 1905.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. a) Classe des lettres 1905, No. 6—8.
b) Classe des sciences 1905, No. 6—8.

Jardin botanique de l'état in Brüssel:

Bulletin. Vol. I, fasc. 5. 6. 1904—05. 4⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

De codicibus hagiographicis Johannis Gielemans. 1895.
Hippolyte Delehaye, Les Légendes hagiographiques. 1905.
Analecta Bollandiana. Tome XXIV, fasc. 3 u 4. 1905.

Société géologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Vol. 31, livre 4; vol. 32, livre 2. Liège 1905.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Die im Jahre 1904—05 erschienenen Schriften der Akademie.

K. Ungar. Geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen. Bd. XIV, 2. 3. 1905.
Földtani Közlöny. Bd. 35, Heft 4—7. 1905.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Statistisches Jahrbuch. VI. Jahrg. 1903. 1905. 4⁰.

K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Ornithologische Fragmente aus den Handschriften von Johann Salamon von Petényi. 1905.
Ráth Arnold, Könyveinek Czímjegyzéke. 1901.
Kurt Lampert, Az édesvizek élete. 1904.

Academia nacional de ciencias in Buenos Aires:

Boletin. Tom. XVII, No. 4. 1904.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Serie III, tomo 4. 1905. 4⁰.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. 1. Band, Heft 8. 1904.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Mededeelingen van het Departement von Landbouw I. Batavia 1904. 4⁰.
Mededeelingen. No. LXXV. 1904. 4⁰.
Observations météorologiques 1901. 1902. 1904—05. fol.
Verslag Jaar 1904. 1905. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. January—April 1905. fol.
Report on the Administration 1904/05. 1905. fol.

Royal Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 1113—1127. 1905.
Journal. No. 421—430. 1904.
Proceedings. No. 6—10, No. 11 extra No. 1904.
Journal and Proceedings. Vol. I, No. 1—4. 1905.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 32, part 2 u. 3 1905. 4⁰.
Paläontologica Indica. N. Series, Vol. II, Memoir No. 2. 1905. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 46, No. 6—10; Vol. 48, No. 1; Vol. 49, No. 1. 2. 1905.
Annual Report for 1904—05. 1905.
Memoirs. Vol. 26, No. 5; Vol. 30, No 2; Vol. 32. 1905.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Circular. No. 76—78, 93—104. 1905. 4⁰.
Annual Report for 1904—05. 4⁰.
Annals. Vol. 53, No. 5—9; Vol. 56, No. 3 und Appendix zu No. 3. 1905. 4⁰.
Harvard Oriental. Series Vol. 9. 1905.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XIII, 3. 1905.
Transactions. Vol. XX, No. 1—6. 1905. 4⁰.

Geological Kommission, Colony of the Cape of Good Hope in Cape Town:

9th Annual Report for 1904. 1905. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino mensile. Nuova Ser., fasc. 86. 1905.

Società di Storia patria in Catania:

Archivio storico per la Sicilia orientale. Anno II, fasc. 2. 1905. gr. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Cherburg:

Mémoires. Tom. 34. Paris 1904.

Academy of sciences in Chicago:

Special Publication No. I. 1902.
Bulletin. No III, 2. IV, V. 1902.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 96—101. 103. 1905.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Report for the period July 1, 1899 to June 30, 1904. 1904. 4⁰

Zeitschrift „Astrophysical Journal“ in Chicago:

Journal. July 1905.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

34. Jahresbericht. Jahrg. 1904.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 47. 1905.

Observatory in Cincinnati:

Publications. No. 15. 1905. 4⁰.

University in Cincinnati:

Studies. Series II, Vol. 1, No. 3. 1905.
Record. Ser. I, Vol. 1, No. 7. 10. 11; Vol. 2, No. 1. 1905.
Record. Annual Reports 1904.

Archaeological Institute of America in Cleveland, Ohio:

Supplementary Papers to the American School of classical studies in Rome. Vol. I. 1905. New-York. 4⁰.
American Journal of Archaeology. Vol. IX, No. 4 and Supplement zu Vol. IX. Norwood 1905.

University of Missouri in Columbus.

Studies. Social Science Series. Vol. 1. 1905.
Laws Observatory. Bulletin No. 2—5. 1905. 4⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordaba (Republik Argentinien):

Boletin. Tom. 18, entr. 1. Buenos Aires 1905.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. XI, Heft 3. 1905.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Mitteilungen. Jahrg. 4, No. 1—4. 1905.
Geschichte der Stadt Deutsch Eglau. Von J. Kaufmann. 1905.
Zeitschrift Heft 48. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. II Heft 5 u. 6. Heidelberg 1905.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. Neue Folge. Bd. 2, Heft 3. 1905.
Quartalblätter N. Folge. Bd. 3, No. 13—16. 1904.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. VII, S. 341—346 und Index zu Vol. VII u. VIII, S. 1—30 und 39—54 u. LXXV—XC. 1904—05.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. X, 2. 1905.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Serie. Tome 9, 1903—04. 1905.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 29. trimestre 3. 4. 1904.

K. Sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1904—05 1905.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 26. 1905.

Verein für Erdkunde in Dresden:

Carl Ribbe, Muschelgeld-Studien. 1905. 4°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Vol. XXV, Section B, No. 6; Section C, Part 2 u. No. 12. 19

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 6. 1906.
The scientific Proceedings. Vol. X, part 3; Vol. XI, No. 1—5. 1905.

Pollichia in Dürkheim:

Mitteilungen. Heft 20. 21. 1904—05. 4°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 27, No. 7—12. (July—Dec.) 1905.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXV, No. 9—12. 1905.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 19. Jahrg. 1905.

Gesellschaft für bildende Kunst u. vaterländische Altertümer in Em

Jahrbuch. Bd. 15, Heft 2. 1905.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 31. 1905.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus d. J. 1904/05 in 4° und 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Serie V, vol. 2, disp. 2. 1905.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XXVII, 4. 1905. 4°.
Bericht. 1905.

Naturwisssenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. Bd. XXII. 1905.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land". 31. Jahrlauf. 1904. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diöcesan-Archiv. N. F. Bd. VI. 1905.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus d. J. 1904/05 in 4° u. 8°.

Universität in Genf:

Schriften aus d. J. 1904/05 in 4° u. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie 3a, Vol. 1 (41). 1904.

Società Ligure di storia patria in Genua:

Giornale storico. Anno VI, fasc. 4—12. 1905.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:
34 Bericht. 1905.

Universität in Giessen:
Schriften aus d. J. 1904/05 in 4° u. 8°.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:
Mitteilungen. N. F. Bd. 13. 1905.

Stadsbibliothek in Göteborg:
Göteborgs Högskolas Arsskrift. Bd. 10. 1904.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Göttingische gelehrte Anzeigen. 1905, No. 7—11. Berlin. gr. 8°.
Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VIII, No. 3 u. 6.
b) Mathem.-physikal. Klasse. Bd. III, No. 4; Bd. IV, No. 3. u. 4. Berlin 1905. 4°.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1905, Heft 3.
b) Mathem.-phys. Klasse. 1905, Heft 3.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1905, Heft 1. gr. 8°.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:
Pommersche Jahrbücher. Bd. VI. 1905.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mitteilungen. 36. Jahrg. 1904. Berlin 1905.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. VII. Reeks. Deel IV afl. 3. 4. 1905.

Teylers Genootschap in Haarlem:
Archives. Ser. II, Vol. IX, partie 2—4. 1904—05. 4°.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:
Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. 10, livr. 3, 4 et 5. La Haye 1905.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 41, No. 6—11. 1905. 4°.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:
Zeitschrift. Bd. 59, Heft 3. Leipzig 1905.

Universität Halle:
Schriften aus 1904/05 in 4° u. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 77, Heft 3—6. Stuttgart 1905.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:
Neue Mitteilungen. Bd. XXII, 2. 1905.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der wissenschaftl. Anstalten Hamburgs i. J. 1904/05 in 4° u 8°.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 1904. 24. Jahrg. 1905.
Zeitschrift. Bd. XII, 2. 1905.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen v. Carl Schuchardt Heft VIII. 1905. fol.
Zeitschrift. Jahrg. 1905, Heft 1—3. 1905.

Grossherzogl. Sternwarte in Heidelberg:

Mitteilungen. No. 5. 6. Karlsruhe 1905.

Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der obergermanisch-raetische Limes des Römerreiches. Lief. XXV. 1905. 4°

Commission géologique de Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 15. 1905.

Institut Météorologique central in Helsingfors:

Observations météorologiques faites en 1900. fol.

Universität in Helsingfors:

Schriften aus d. J. 1904/05 in 4° u. 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. 31, Heft 3. 1905.
Jahresbericht für das Jahr 1904.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. 34. Heft. 1899. gr. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge, Heft 49. 1905.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. IX, No. 6—9. 1905.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. III, fasc. 2 u. 3. 1905.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Liefg. 24 u. 25. 1905. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 40, Heft 1—4. 1905.

Botanisches Institut in Jena.

Bericht über die Schleiden-Gedächtnisfeier an der Universität Jena am 18. Juni 1904. 4°.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. Neue Folge. Bd. 15, Heft 2; Bd. 16, Heft 1. 1905.

South African Association for the Advancement of sciences in Johannesburg

Report. Second Meeting 1904.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Verhandlungen. Bd. 21, Heft 2. 1904
Sitzungsberichte. 1904.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Archiv für Naturkunde. Serie II, Bd. XII, 3. 1905.
Sitzungsberichte. Bd. 13, Heft 3. 1905.
Schriften. No. XIV. XV. 1904. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. 18. Bd., 1904—05. 1905.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. XX, Heft 3 und 4. 1905.
Bericht über die 24. Plenarsitzung. Heidelberg 1905.
Topographisches Wörterbuch des Grossherzogtums Baden. Bd. II, 2. Halbband. Heidelberg 1905.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 72, Heft 7 u. 9—12. 1905.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Lud. Armbrust, Geschichte der Stadt Melsungen. 1905.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLIX für 1903—05. 1905.

Gesellschaft für Schleswig-Holsteinsche Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 35. 1905.

Sternwarte in Kiel:

Astronomische Beobachtungen. Bd. 1. Leipzig 1905. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Kiel:

Schriften. Bd. XIII, Heft 1. gr. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 45, No. 5—10. 1905.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Jahrbuch. Heft 27. 1905.
Carinthia II. 95. Jahrg. 1905, No. 3 u. 4.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1905, No. 4. 5.
Mémoires. Section des sciences. Serie VII, Tom. 1, No. 4; Tom. 2, No. 4; Tom. 6, No. 3. 1905. 4⁰.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Bulletin. Année 1904—05, No. 3. 4°.
Rapports et Procès verbaux. Vol. III. 1905. 4°.
Publications de circonstance, No. 13 B, 24—27. 1905.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Rozprawy. Filolog. tom. 25. hist. tom. 22. 1905.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 50—53. 1905.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. tom. 38. 1905.
Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. 4, Heft 4. 1905.
Anzeiger a) Philol. Klasse. 1905, No. 3—7.
b) Math. Klasse. 1905, No. 5—7. 1905

College of Science and Engineering in Kyōto:

Memoirs. Vol. I, No. 2. 1905.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Bd. 41. 1905.

Direction de statistique de la Province de Buenos Aires in La Pla

Demografía. Anno 1900. 1902. 1905. 4°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 5e Série, tom. 41, No. 152. 153. 1905.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Handelingen. 1904—05. 1905.
Levensberichten. 1904—1905. 1905.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. XXIII, 1. 2. 1905. 4°.
Abhandlungen der mathem.-physikal. Klasse. Bd. XXIX, 3. 4. 1905.
Berichte der philol.-hist. Klasse. Bd. 56, No. 4. 5; Bd. 57, No. 1—4. 1!
Berichte der math.-physik. Klasse. Bd. 56, No. 5; Bd. 57, No. 1—4. 1!

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. 39. 1905. 4°.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen. 1904.

Cuerpo de Ingenieros de Minas del Peru in Lima:

Boletín. No. 24 u. 25. 1905.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

63. Jahresbericht. 1905.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 1905. No. 5—10.

Zeitschrift „La Cellule“ in Loewen:

La Cellule. Tom XXII, fasc. 1. 1905. 4°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XX, No. 79 u. 80. 1905.

Royal Society in London:

Reports of the sleeping sickness commission. No. 5. 6. 1905.
Proceedings. Series A. Vol. 76, No. 510—513. Vol. 77, No. 514.
" B. Vol. 76, No. 510—513. Vol. 77, No. 514. 515. 1905. gr. 8°.
Philosophical Transactions. Series A, Vol. 204. 1905. 4°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 65, No. 8 u. 9; Vol. 66, No. 1. 1905.
Memoirs. Vol. 57, part 1. 2. 1904—05. 4°.

Chemical Society in London:

Journal. No. 603. 604. 515—518. (July—Dec.). 1905.
Proceedings. Vol. 21, No. 299 u. 230. 1905.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 55. 56. 60, part 1—4; Vol. 61, part 1—3. 1899—1905.

Linnean Society in London:

Proceedings. Oktober. 1905
The Journal. a) Botany. Vol. 36, No. 255—256; Vol. 37, No. 258. 259; b) Zoology. Vol. 29, No. 102. 1905.
The Transactions. a) Zoology Vol. IX, part 6—9, Vol. X, part 1—3; b) Botany Vol. VI, part 10. 11; Vol. VII, part 1. 2; 1904—05. 4°.
List of the Linnean Society 1905—06. 1905.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1905, part 4—6.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1905. Vol. I, part 1 u. 2.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom 32, livr. 3. 1905.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 60. Stans. 1905.

Académie des sciences in Lyon:

Mémoires. Sciences et Lettres. IIIe Série, Tom 8. 1905. gr. 8°.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VIII. Sér., Tome 2, 1904. 1905. gr. 8°.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Année 1904, Tom 51. 1905. gr. 8°.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Sér. II. Droit, lettres. fasc. 14. 1905.

Kodaikánal Observatory in Madras:

Bulletin No. 2. 3. 1905. fol.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Revista. Tom 2, No. 5. Tom 3, No. 1. 2. 1905.
Anuario. Tom 22. 1905. 4°.

R. Academia de la

Boletin. Tom. 47, cuad. 1—6. 1905.

Museum für Natur- und H

Abhandlungen und Berichte. Bd. I, H

Fondazione scientifica

Atti. Vol. XIX. 1906.

R. Istituto Lombardo di

Rendiconti. Serie II, Vol. 38, fasc. 5—
Memorie. a) Classe di lettere Vol. 21,
fasc. 5. 6. 1905. 4⁰.

Società Italiana di scienze

Atti. Vol. 44, fasc. 2. 1905.

Società Storica Lombard

Archivio Storico Lombardo. Serie IV, A

Verein zur Erforschung der rheinis

Zeitschrift Band 4, No. 4. 1905.

Literary and philosophical Soc

Memoirs and Proceedings. Vol. 49, part 3

Philippine Weather Bure

Bulletin. Dec. 1904; Jan.—June 1905. 4⁰.
Annual Report for the year 1903. Part 2

Ethnological Society

The Bontoc Igorot, by A. E. Jenks 1905

Altertumsverein in M

Mannheimer Geschichtsblätter. 6. Jahrg 19

Universität in Ma

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u.

Abbaye de Mared

Revue Bénédictine. Année 22, No. 4. 1905

Royal Society of Victoria

Proceedings. Vol. XVIII, part 1. 1905.

Accademia Peloritana in

Atti. Vol. XX, fasc. 1. 1905.

Académie in Me

Mémoires. 1903—04. 3ᵉ Série. Année 83

Instituto geológico in

Boletín. No. 20. 1905. 4⁰.

Observatorio meteorológico

Boletín mensual. Sept. 1902, Mayo 1904.

Sociedad científica „Antonio Al

Memorias y revista. Tom. 13, No. 9. 10; To

Musée océanographique in Monaco:

Résultats. Fasc. XXX. 1905. fol.
Bulletin. No. 42. 43. 45—55. 1905.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tom II. Flora Uruguaya p. 293—375. 1905. 4⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section de médecine. 2e Sér. Tom 2 No. 2. 1905.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Tom XXV, 1. 2. 1904—05. gr. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 77—87. 1905.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener Statistische Jahresübersichten für 1904. 1905. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Flächenverzeichnis Heft V. 1905. 4⁰.
Jahrbuch. 1904 Heft 5; 1905 Heft 2 u. 3. 4⁰.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der erscheinenden Zeitungen. Preisverzeichnis der Zeitungen. I. Abteilung; II. Abteilung 1905. fol.

K. Belgisches Generalkonsulat in München:

Annales du Musée du Congo. gr. 4⁰.
Zoologie. Série I, Tom. 1, fasc. 3—6. 1899—1900.
" II, " 1, " 1. 2. 1898.
" III, " 1. 2. 1903—05.
Botanique. Série I, Tom. 1, fasc. 1—8. 1898—1902.
" II, " 1, " 1. 2, part 1. 2. 1899—1900.
" III, " 1, " 1. 2. 1901.
" IV, " 1—3. 1902—03.
" V, Vol. 1, " 1. 2. 1903—04.
" VI, " 1. 1904.
Ethnographie et Anthropologie.
Série III, Tom 1, fasc. 1. 1902.
" IV, " 1—5. 1903—04.
G. A. Boulenger, Les Poissons du Bassin du Congo. Bruxelles 1901.
Émile de Wildemann, Notices sur les plantes utiles ou intéressantes de la Flore du Congo. Partie I. II. III. Bruxelles 1903—05.

K. Bayer. Technische Hochschule in München:

Personalstand im Wintersemester 1905/06.
Programm im Wintersemester 1905/06.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1905. No. 17—31.

K. Oberbergamt München:

Geognostische Jahreshefte. 16. Jahrg. 1905. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4° u. 8°.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Wintersemester 1905/06.
Verzeichnis der Vorlesungen im Wintersemester 1905/06.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. XIV. 1904.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. 5, 1905, Heft 4—6; Jahrg. 6, 1906, Heft 1 u. 2. 4°.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1905. No. 178—183. 4°.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série III, tom. 5, fasc. 3. 4; tom. 6, fasc. 1. 2. Paris 1904—05. gr. 8°.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Atti. Serie II, Vol. 12. 1905. 4°.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. 17, Heft 3. Berlin 1905. gr. 8°.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 66. u. 67. Jahrg. 1902 u. 03. 1905.

Académie in Neuchatel:

Recueil de Travaux de la faculté des lettres, fasc. 1. 1905.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 29, année 1900—01; tom. 30, année 1901—02.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 52, No. 8; vol. 53, No. 5; vol. 54, No. 8; vol. 55, No. 4. 1905.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser. Vol. 20, No. 116—120. 1905.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXVI, first half 1905.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. 16, part 2. 1905.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. 17, part 3, p. 119—346. 1905.
Annual Report for the year 1904.
Journal. Vol. V, No. 3. 4. 1905.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 37, No. 8—12. 1905.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II. Series, Vol. IX, 3. 1905.

Mines Branch, Department of the Interior in Ottawa:

Mica, its Occurrence, Exploitation and Uses. 1905.
Asbestos, its Occurrence, Exploitation and Uses. 1905.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Series, Vol. 10, part 1. 2. 1905.

Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana in Padua:

Atti. N. Ser., Anno II, fasc. 1. 1905.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

Rivista. N. Ser., Anno X, fasc. 1. 1905.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. 20, fasc. 1 u. 2. 1905. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti 1905. Gennaio—Giugno. 1905. 4⁰.

Società di scienze naturali ed economiche in Palermo:

Giornale. Vol. XXV, Anno 1905. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1905, No. 28—43.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 141, No. 2—26.

École polytechnique in Paris:

Journal. II. Série. Cahier 10. 1905. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux. IIe Série, Tom. 3. Session de 1905.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 764—768 (Août—Dec. 1905.) 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tom. 16. 17. Paris 1904—05.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 50, No. 3; Tom. 51, No. 1. 2. 1904—05.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1904, No. 6—8; 1905, No. 1—5.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 1904, fasc. 4—6; 1905, fasc. 1. 2. gr. 8.

Société des études historiques in Paris:

Revue. Année 71, Juillet—Décembre 1905.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Tom. X, No. 6; tom. XI, No. 1—6; tom. XII, No. 1. 2. 1904—05. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 33, fasc. 3 u. 4. 1905.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXIX. 1904.
Tables du Bulletin et des Mémoires. Année 1876 à 1895. 1905.
Mémoires. Tome XVII. 1904.

Western Australia Geological Survey in Perth:

Bulletin. No. 16—18. 20. 1904.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. XI, No. 1—4. 1904. 4°.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Vol. VI, No. 7; Vol. VII No. 1. 2. b) Classe physico-mathém. Vol. XVI, No. 4—10. 1904. 4°.
Bulletin. Tom. 17, No. 5; 18, No. 1—5; 19, No. 1—5; 20, No. 1—5; 21, No. 1—4. 1902—04. 4°.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XXIV, 2. 1905. 4°.

Kaiserl. Russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. a) Orientalische Abteilung, Tom. XV, 2. 3. b) Russische und slavische Abteilung, Tom. V, 2, VI. c) Klassische Abteilung, Tom. I, II. 1904. 4°.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XXII, Liefg. 2. 1905.
Verhandlungen II. Serie, Bd. 42, Liefg. 2. 1905.

Physikal.-chem. Gesellschaft an der Kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 37, Heft 5—7. 1905.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 57, part 1 u. 2. 1905.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXIX, No. 115 u. 116. July. 1905.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 44, No. 179. 180. 1905.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, Maggio—Settembre. 1905.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litera[tur] in Prag:

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. 5, Heft 3; Bd. 6. 19[05].
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 16. 1905.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Catalogus codicum manuscriptorum latinorum. Pars I. 1905.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Prace matematyczno-fizyczne. Tom. 16. Warschau 1905.

Landesarchiv des Königreichs Böhmen in Prag:

Monumenta Vaticana res gestas bohemicas illustrantia. Vol. V, 2. 1905.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Bd. 79, Heft 3. 4. 1905.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische u. meteorologische Beobachtungen im Jahre 1904. 1905.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Sbornik. Bd. 9. 1904.
Časopis. Bd. 34, Heft 4. 5. 1905.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mitteilungen. 43. Jahrg., No. 1—4. 1904.

Kgl. Botanische Gesellschaft in Regensburg:

Denkschriften. Bd. IX. 1905.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 56. 1904.

Bibliotheca Nacional in Rio de Janeiro:

Calogeras, As Minas do Brasil I. 1904.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. XXI. 1905.
Boletim mensal. Octubro à Dezembro 1904. 1905. 4°.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Notizie degli scavi. Vol. 1. Indice. Vol. 2, fasc. 1—7. 1905. 4°.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 14, 1° semestre, fasc. 12; Vol. 14, 2° semestre, fasc. 1—11. 1905. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, vol. 14, fasc. 1—6. 1905.
Rendiconto dell' adunanze solenne del 4 Giugno 1905. 1905. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1905, No. 2.

Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XX, fasc. 1 u. 2. 1905.

R. Ministero della Instruzione pubblica in Rom:

Opere di Galileo Galilei. Vol. XVI. Firenze 1905. 4°.
Cataloghi dei codici orientali fasc. 7. Firenze. 1904.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie. Ser. III, tom. 13. 1905. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 28, fasc. 1. 2. 1905.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4° u. 8°.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1903—04. 1904.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 11, fasc. 2. 1905.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

L'Art gréco-bouddhique de Gandhâra par A. Foucher. Tom. 1. Paris 1905. gr. 8.
Bulletin. Tom. 5, No. 1. 2. Hanoi 1905. 4°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:
Mitteilungen. 45. Vereinsjahr 1905.

Historischer Verein in St. Gallen:
Neujahrsblatt 1904/05. 4°.
Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Bd. 29, 2. Hälfte. 1905.
Urkundenbuch der Abtei Sankt Gallen. Teil V, Lief. 1. 1904. 4°.
Festschrift. 1904.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:
XVIth annual Report. 1905.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):
Almanaque náutico para el año 1907. 1905. 4°.

Sociedade scientifica di São Paulo in S. Paulo:
Revista. No. 1 u. 2. (Junho u. Sept.) 1905.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:
Jahrbücher u. Jahresberichte. 70. Jahrg. 1905.

China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:
Journal. Vol. 35 u. 36. 1903—05.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:
Atti. Ser. IV. vol. 17, No. 1—4. 1905.

K. K. Archäologisches Museum in Spalato:
Bullettino di Archeologia. Anno 28, No. 1—8. 1905.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:
Arkiv för matematik. Bd. II, 1. 2.
" " zoologi. Bd. II, 3
" " botanik. Bd. IV, 1—4.
" " kemi. Bd II, 1.
Decompositions of water by radium, by W. Ramsay. Upsala 1905.
Handlingar. N. F., Bd. 39, No. 1—5. 1904—05. 4°.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:
Astronomiska iakttagelser. Bd. 8, No. 2. 1905. 4°.

Geologiska Förening in Stockholm:
Förhandlingar. Bd. 27. Heft 5 u. 6. 1905.

Nordiska Museet in Stockholm:
Meddelanden 1903. 1905.

Schwedischer Touristenverein in Stockholm:
Årsskrift 1905.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:
Monatsbericht. 1905, Tom. 39, No. 5—9.

Kais. Universität Strassburg:
Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4° u. 8°.

Württemberg. Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Geschichtsquellen. Bd. VII. 1905.
Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. 14. Jahrg. 1905, Heft 1—4.
Mitteilungen 1905.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Palaeontology No. 14. 1905. 4⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

The Proceedings. Vol. XXX, part 2 and part with a Supplement 1905.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications. No. 21. 1905. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. X, 2. 1905.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XX, article 5—7. 1905. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd VI, 3. 1905. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. No. 16, Vol. VIII, 1. 1905.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. XVIIe année, No. 65—67. 1905. Paris.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série, Tom. VI, fasc. 3. 4; Tom. VII, fasc. 1. 2. Paris 1904—05. 4⁰.
Bibliothèque méridionale. Sér. I, tom. 9. 1904.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XX, fasc. 1. 1905.

Universität Tübingen:

Theodor Haering, Das Verständnis der Bibel. 1905. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 40, disp. 6—15. 1905.
Memorie. Serie II, tom. 55. 1905. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. IV, Vol. I, fasc 1. 1905. 4⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Rapport sur les observations internationales des nages par H. Hildebrand Hildebrandsson. Pars II. 1905.

K. Universität in Upsala:

Schriften aus den Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.
Årsskrift 1904.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1905.
Verslag 1905.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

No. 81 Opweders in Nederland. Deel XXIV. 1903. 1905.
No. 90 Études des phénomènes de marée. III. 1905.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. Bd. VI, 1 u. 2. 1905.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Ser. IV, vol. 5, fasc. 1, coll'append. al Vol. 4. 1904–05.

Commissioner of Education in Washington:

Report for the year 1903. Vol. 2. 1905.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Yearbook 1904. 1905.

Department of Commerce and Labor in Washington:

Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. I, No. 2. 1905.

Smithsonian Institution in Washington:

Miscellaneous Collections. No. 1444. 1571—1574 u. 1584. 1905.

U. S. National-Museum in Washington:

Report for the year 1902—03. 1905.
Bulletin. No. 53, part I. 1905.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1904—05. 1905.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. 14, p. 277—316. 1905.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 234—240; 242—246; 248—250; 252—255; 257—261; 264; 268. 1905.
Monographs. No. XLVII. 1904. 4°.
25th annual Report 1903—04. 1904. 4°.
Mineral Resources of the U. S. 1903.
Professional Paper. No. 29—33. 35. 39. 1904—05. 4°.
Water Supply Paper. No. 99. 100. 103. 105—122. 124. 126. 128. 130. 190[illegible]

K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei in Weihenstephan:

Bericht für das Jahr 1904/05. Freising 1905.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Zuwachs in den Jahren 1902—04. 1905.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 38. Jahrg. 1905, Heft 1. 1905.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse. Bd. 149. Jahrg. 1904.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.
Abt. I 1905, Bd 114, Heft 3—5.
IIa. 1905, Bd. 114, Heft 5—7.
IIb. 1905, Bd. 114, Heft 4—6.
III. 1905. Bd. 114, Heft 3. 4.
Almanach. 54. Jahrg. 1904.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., No. 27, 28 u. 29. 1905.

K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1905, Bd. 55, Heft 1—4. 4⁰.
Verhandlungen. 1905, No. 6—12. 4⁰.
Geologische Karte der im Reichsrate vertretenen Königreiche. Lief. VI. 1905. fol.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1905, No. 28—52. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 55, Heft 5—8. 1905.
Abhandlungen. Bd. 3, Heft 2. 1905. 4⁰.

K. K. Österr. Kommission der internationalen Erdmessung in Wien:

Wilh. Tinter, Die Schlussfehler der Dreiecke. Nebst Fortsetzung. 1904—05.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Bd. XV. XVIII. 1905. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 45. 1905.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 58. 1905.

Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig in Wolfenbüttel:

Jahrbuch. 3. Jahrg. 1904.
Braunschweigisches Magazin. Bd. X, Jahrg. 1904. 4⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 37, No. 8—10; Bd. 38, No. 1.
Sitzungsberichte. 1904, No. 10; 1905, No. 1. 2.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 46. 1904.
Jahresbericht für 1903.

Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:

Annalen 1903. 1905. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 50. Jahrg. 1905, Heft 1. 2.

Schweizerische Geologische Kommission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. N. F., Liefg. XVI mit Atlas. XVII—XIX. Bern 1905. 4⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger f. Schweiz. Altertumskunde. N. F., Bd. VII, No. 1—3. 1905. gr. 8⁰.
13. Jahresbericht 1904.

Eidgenössisches Polytechnikum in Zürich:

Festschrift zur Feier des 50 jähr. Bestehens. 2 Bde. 1905. 4⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen der Sternwarte. No. 96. 1905.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1904/05 in 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Fürst Albert I. von Monaco:

Résults des campagnes scientifiques. Fasc. 31. 1905. fol.

Fernando Alsina in Barcelona:

Nouvelles Orientations scientifiques. Paris 1905.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Journal für prakt. Chemie. N. F., Bd. 71, Heft 9. 10; Bd. 72, Heft 1—10. 190

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1905, No. 14—24.

M. Berthelot in Paris:

Traité pratique de calorimétrie chimique. 1905.

Verlag von Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte. Romanistische u. germanistische Abteilung zu Bd. XXVI. 1905.

Carl de Boor in Berlin:

Excerpta historica. Vol. III. 1905.

Pierre de Coubertin in Paris:

La Cronique de France. 5e année 1904.

Verlag von Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1905, No. 29—52. 4°.

R. von Fischer-Treuenfeld in Braunschweig:

Paraguay. 1905.

Victor Geisler in Friedenau:

Was ist Philosophie? Was ist Geschichte der Philosophie? Berlin 19

Mme Vve J. B. André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. 1905, Juli-Novembre.

Friedrich Goppelsroeder in Basel:

Anregung zum Studium der auf Capillaritäts- u. Absorptionserscheinun beruhenden Capillaranalyse. 1905.

Georgios N. Hatzidakis in Athen:

Die Sprachfrage in Griechenland. 1905.

Henricus van Herwerden in Utrecht:

Vindiciae Aristophaneae. 1906.

Gustavus Hinrichs in St. Louis, Mo.:

Amana Meteorites. 1905.

Friedrich Hirth in New-York:

Scraps from a Collectors Note Book. Leiden 1905.

Ulrico Hoepli in Mailand:

Catalogo completo delle edizioni Hoepli 1871—1905.

Charles Janet in Limoges:

Observations sur les guêpes. Paris 1903.
Observations sur les fourmis. 1904.
Description du matériel d'une petite installation scientifique. Partie I. 1903.

Die Relikten des Ippolito G. Isola in Genua:

Storia delle lingue e litterature romanze. Parte III, disp. 3. 1905.

M. Kiseljak in Fiume:

Grundlage einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Grössen mit 3 Einheiten. Rom 1905.

Georg Friedrich Knapp in Strassburg:

Staatliche Theorie des Geldes. Leipzig 1903.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. 14, Heft 3 u. 4. Leipzig.

A. Manouvriez in Paris:

Mines de houille rendues réfractaires à l'ankylostome 1905.

C. Marti in Nidau, Schweiz:

The weather forces of the planetary atmospheres. 1905.

C. Mehlis in Dürkheim:

Neue neolithische Funde aus mittelrheinischen Niederlassungen. Braunschweig 1905. 4⁰.

E. A. Mitscherlich in Kiel:

Bodenkunde für Land- u. Forstwirte. Berlin 1905.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. 30e année, tom. 89, No. I Sept.-Oct., No. II Nov.-Dez. 1905; 31e année, tom. 90, No. 1. 1906. Paris.

Heinrich Ostermair in Ingolstadt:

Die Ostermair. I. Teil (Fortsetzung). 1905.

Emanuel Pochmann in Linz:

Wärme ist nicht Kälte u. Kälte ist nicht Wärme. 1890.
Über zwei neue und zwar dynamische Eigenschaften der atmosphärischen Luft. 1896.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1905, No. 14—15, 17—24. 4⁰.

Siemens-Schuckert-Werke in Berlin:

Nachrichten. Heft 5 u. 6. 1905. fol.

Frau E. Spengel in München:

Die Komödien des Terentius. Erklärt von A. Spengel. 2. Bändchen. Adelphae. Berlin 1905.

Amrein-Troller in Luzern:

Der Gletschergarten in Luzern. 1905.

A. Voeltzkow in Berlin:

Abhandlungen der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft Heft 2—4. Frankfurt. 1905. 4°.

Heinrich Wehner in Frankfurt a/M.:

Über die Kenntnis der magnetischen Nordweisung im frühen Mit Berlin 1905. 4°.

Ed. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XIV, 3. Leipzig 1905

Firma Carl Zeiss in Jena:

Ernst Abbe, Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. 1906.

— — —

Sitzungsberichte

der

.thematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Übersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXVI
Jahrgang 1906.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 13. Januar 1906.

Sitzung vom 3. Februar 1906.

Sitzung vom 3. März 1906.

Sitzung vom 5. Mai 1906.

Sitzung vom 9. Juni 1906.

Sitzung vom 7. Juli 1906.

Öffentliche Sitzung zur Feier des 147. Stiftungstages am 14. März 1906

Sitzung vom 3. November 1906.

Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 17. November 1906.

Sitzung vom 1. Dezember 1906.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 13. Januar 1906.

1. Herr FERD. LINDEMANN legt zwei (eng miteinander ver-ndene) Arbeiten des Herrn Prof. ARTHUR KORN vor:

a) „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen".

Die Abhandlung enthält die Beweise für eine Reihe von ilfssätzen, welche in der Elastizitätstheorie von Wichtig-it sind.

b) „Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche".

Hier wird die Methode der sukzessiven Näherungen auf e Integration der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie ıgewandt, und zwar zunächst auf das Problem des Gleich-wichts eines beliebigen elastischen Körpers mit stetig ge-ümmter Oberfläche, für den Fall, daß die Verrückungen an r Oberfläche gegeben sind. Die Lösungen werden als unend-che Reihen dargestellt, deren Konvergenz nicht bloß in dlicher Entfernung von der Oberfläche nachgewiesen wird —

dieser Beweis war bereits durch frühere Untersuchungen v
Lauricella und Cosserat möglich — sondern auch bei unen
licher Annäherung an die Oberfläche, und dadurch wird zu
ersten Male die Existenz der Lösungen dieses elastischen Gleich
gewichtsproblems einwandsfrei nachgewiesen.

2. Herr August Rothpletz überreicht eine Abhandlung des
Herrn Prof. Dr. Ernst Weinschenk: „Über Mineralbestand
und Struktur der kristallinischen Schiefer". Dieselbe
ist für die Denkschriften bestimmt.

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen.

Von A. Korn.

(Eingelaufen 18. Januar.)

I. Abschnitt.

Verallgemeinerung einiger Sätze über Potentiale von Doppelbelegungen.

Die folgenden 3 Sätze bilden eine Verallgemeinerung einiger früherer Sätze,[1]) durch welche der allgemeine Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels ermöglicht wurde. Der verallgemeinerte Satz II dieser Abhandlung ist bereits von Liapounoff[2]) bewiesen worden; wenn ich auch diesen hier noch einmal beweise, so geschieht dies, um zu zeigen, daß die Hilfsmittel, mit denen der Beweis des ursprünglichen Satzes von mir gegeben wurde, auch für die Verallgemeinerung ausreichen. Die Beweise der Sätze I und III in ihrer neuen allgemeinen Form werden in dieser Abhandlung zum ersten Male gegeben.

Während für den Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels diese Verallgemeinerungen nicht nötig waren, sondern die ursprünglich von mir gegebenen Sätze[3])

[1]) A. Korn, C. r. 130, p. 1238, 1900; Abhandlungen zur Potentialtheorie 1 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901); Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen (diese Ber. 33, S. 3, 1903).

[2]) Liapounoff, Comm. de la Soc. Math. de Kharkow 1902.

[3]) A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 1, Satz I—III, S. 5—11.

ausreichten, sind diese verallgemeinerten Sätze sehr nü
für den Beweis einer der Neumannschen analogen Meth
der Theorie des elastischen Gleichgewichts; aus diesem G
war ich gezwungen, noch einmal auf diese Sätze zurü
kommen und sie in der Form zurechtzulegen, in der s
diese neue Methode in der Elastizitätstheorie geeignet si

§ 1.

I.[1]) Ist die Funktion $\varkappa$ der Stelle auf einer st
gekrümmten, geschlossenen Fläche ω derart stetig,
ihre absoluten Funktionsdifferenzen in zwei Punkt
und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{\gtrless} A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ \lambda \text{ irgend ein echter Bruch,} \end{array} \right.$$

und setzen wir:

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \tag{1}$$

so sind bereits die ersten Ableitungen (sowohl
tangentialen, als auch die normalen) der Funktio

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\omega} (W_a + W_i) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \tag{2}$$

an der Oberfläche (sowohl an der Innenseite, als
an der Außenseite) derart stetig, daß, wenn σ
beliebige Richtung bedeutet, für zwei Punkte 1 u
der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_1

$$\text{abs.} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right)_2 - \left(\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right)_1 \right] < (c_1 A + c_2 \text{ abs. Max. } \varkappa) r_{12}^{\lambda'}, \quad (\ldots$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorsteller
lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahl
abhängen, λ' einen beliebigen echten Bruch <
strengem Sinne).

[1]) Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ be
läßt, doch genügt die hier gegebene Fassung des Satzes für unsere Z

Wir beweisen zunächst, daß die ersten **tangentialen** Ableitungen der Funktion:

$$3)\qquad W_\omega = \tfrac{1}{2}\,(W_a + W_i)$$

für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} die Eigenschaft haben:

$$4)\ \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_1\right]^{1)} < (a_1 A + a_2\,\text{abs. Max.}\,\varkappa)\, r_{12}^{\lambda''},\ \lambda'' < \lambda,$$

wo a_1 und a_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda''$ abhängen, λ'' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ (in strengem Sinne).

Wir bilden zum Beweise die Ableitung von W_ω nach irgend einer tangentialen Richtung $h_{1(2)}$[1]) in den Punkten 1 und 2:

$$5)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_2 = \displaystyle\int_\omega (\varkappa - \varkappa_2)\, \frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega, \\ \left|\dfrac{\partial W_\omega}{\partial h}\right|_1 = \displaystyle\int_\omega (\varkappa - \varkappa_1)\, \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega \end{cases}$$

(eine strenge Begründung dieser Formeln s. diese Berichte 33, S. 13—18).

Wir denken uns um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius

$$r_{12};$$

die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$.

Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R [der größer ist, als eine bestimmte endliche Länge], deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen 5).

1) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots$, wobei $|\varepsilon_1| \overline{<}$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

$$
6)\quad \begin{cases} |\varkappa - \varkappa_1| \overline{<} A \cdot r^\lambda, \\ |\varkappa - \varkappa_2| \overline{<} A \cdot r^\lambda, \\ |\cos(\nu h_{1(2)})| \overline{<} r f, \\ |\cos(r\nu)| \overline{<} r F \end{cases}
$$

(f und F endlich) setzen kann.

Es folgt dann zunächst für die von ω_1 herrührende Integrale 5):

$$
7)\quad \begin{cases} \int_{\omega_1} (\varkappa - \varkappa_{1(2)}) \frac{\cos(\nu h_{1(2)}) - 3\cos(r h_{1(2)})\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \\ \qquad \overline{<} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} \end{cases}
$$

Andererseits ist:

$$
\text{abs.} \left| \int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2
$$

$$
\overline{<} \int_1^2 \int_{\omega_2} \{ |\varkappa(\xi\eta\varsigma) - \varkappa(xyz)| + A r_{12}^\lambda \} \left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} \right| d\omega\, ds,
$$

wobei das Integral $\int_1^2 (-)\, ds$ über eine zwischen 1 und 2 auf ω_1 beliebig verlaufende Kurve s zu erstrecken ist, deren Abstände von ω_2 kleiner als r_{12} sind. Somit ist:

$$
\text{abs.} \int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \Big|_1^2
$$

$$
< \text{endl. Konst. } A \cdot \int_1^2 \left\{ \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{3-\lambda}} + r_{12}^\lambda \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^3} \right\}^{2)} ds
$$

$$
< \text{endl. Konst. } A \cdot \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^\lambda}{r_{12}} \right\} \int_1^2 ds\,^{1)}
$$

$$
< \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^\lambda.
$$

[1] Mit Berücksichtigung der letzten Formel S. 292 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

[2] Mit Rücksicht darauf, daß r_{12} kleiner als jedes r.

wir erhalten weiter:

$$(x_2 - x_1)\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda}\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{d\omega}{r^3}\right|_2{}^{1)},$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda''},{}^{1)}\quad (\lambda'' < \lambda).$$

Ferner ist:

$$\int\limits_{\omega_2}(x - x_2)\cdot\left[\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3} - \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\right]d\omega\Bigg|_2$$

$$< \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}\left|\int\limits_{\omega_2}\frac{d\omega}{r^{3-\lambda}}\right|_2$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda},{}^{1)}$$

es folgt aus den drei letzten Formeln:

$$\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}\left[\left|\int\limits_{\omega_2}(x - x_2)\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2\right.\\ &\left.-\left|\int\limits_{\omega_2}(x - x_1)\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_1\right]\\ &\qquad\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda''}.\end{aligned}\right.$$

Schließlich ist, da die Entfernungen des Flächenteiles $\omega_1 - \omega_2$ von 1 und 2 größer sind, als eine bestimmte, iche Länge:

$$\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}\left[\left|\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}(x - x_1)\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2\right.\\ &\left.-\left|\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}(x - x_1)\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_1\right]\\ &\qquad< \text{endl. Konst. abs. Max. } x\cdot r_{12},\\ &\left|(x_2 - x_1)\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\omega\right|_2\\ &\qquad\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. } A\cdot r_{12}^{\lambda},\end{aligned}\right.$$

---

[1]) Vgl. Anm. 1 u. 2 auf Seite 6.

und die Addition der Ungleichungen 7), 8), 9) ergibt die behauptete Ungleichung 4).

Um mit Hilfe der Ungleichung 4), die wir jetzt bewiesen haben, die eigentliche Behauptung unseres Satzes zu beweisen, müssen wir uns noch zwei Hilfssätze zurecht legen:

Hilfssatz I.[1]) Das Flächenpotential:

$$10)\qquad V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r},$$

in dem H lediglich als eine endliche[2]) Funktion der Stelle auf der Fläche vorausgesetzt wird, hat die Eigenschaft, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$11)\qquad \text{abs.}\, |V|_1^2 \overline{\overline{<}} \cdot A \cdot \text{abs. Max.}\, H \cdot r_{12}^{\Delta},$$

wo Δ einen beliebigen echten Bruch, und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Δ abhängt.

Hilfssatz 2.[3]) Die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r},$$

in dem H als eine derart stetige Funktion der Stelle auf der Fläche ω vorausgesetzt wird, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$12)\qquad \text{abs.}\, (H_2 - H_1) < A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \begin{array}{|l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ ein echter Bruch,} \end{array}$$

[1]) Allgemeinere Fassung eines bereits früher von mir bewiesenen Satzes (Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 388).

[2]) Endlich im Sinne von „endlich und integrabel".

[3]) Erweiterung eines Satzes von Hölder (Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882). Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ beweisen läßt, doch genügt die hier gegebene weniger allgemeine Fassung für unsere Zwecke.

sind selbst auf der Fläche derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Innen(Außen)seite von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$13)\ \text{abs.}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right|_1\right) \overline{\gtrless} (B\,A + C\ \text{abs. Max.}\ H)\, r_{12}^{\lambda'},\ (\lambda' < \lambda)$$

wenn σ eine ganz beliebige (tangentiale oder normale oder irgend eine andere) Richtung vorstellt, B, C endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda'$ abhängen.

Zum Beweise des Hilfssatzes 1 denken wir uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12}, die ω in der Kurve ς schneidet und in einen 1 und 2 enthaltenden Teil ω_1 und einen Teil $\omega - \omega_1$ zerlegt. Dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz $|\,V_2 - V_1\,|$

$$\text{abs.}\ |\,V_{\omega_1}\,|_1^2 \overline{\gtrless}\, 2\int_{\omega_1} H\frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{\gtrless}\ 2\ \text{abs. Max.}\ H.\int_{\omega_1}\frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{\gtrless}\ 2\ \text{abs. Max.}\ H \cdot r_{12}\,{}^{1)}$$

der von $\omega - \omega_1$ herrührende Teil der Differenz $|\,V_2 - V_1\,|$

$$\text{abs.}\ |\,V_{\omega-\omega_1}\,|_1^2 \overline{\gtrless}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\ H \cdot r_{12} \cdot \text{Max.}\int_{\omega_1}\frac{d\omega}{r^2}$$

auf der Graden 1, 2,

$$\overline{\gtrless}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\ H \cdot r_{12} \cdot \frac{1}{r_{12}^{1-\Lambda}},\,{}^{2)}$$

wo Λ einen beliebigen echten Bruch vorstellt. Durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich aber die Behauptung des Hilfssatzes 1.

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 bedenken wir zunächst, daß, wenn x eine beliebige Richtung vorstellt:

[1] Formel 46) oder 47) S. 38 u. 39 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

[2] Mit Rücksicht auf die letzte Formel S. 392 dieses Lehrbuchs.

[1]) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\omega \frac{d\omega}{r}\right) = -\int_\omega \cos(\nu x)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int_\omega \frac{K\cos(\nu x)}{r}\,d\omega$

K Krümmungsmaß von $d\omega$,

daß somit, da

$$-\int_\omega \cos(\nu x)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \pm 2\pi\cos(\nu x) - \left|\int_\omega \cos(\nu x)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right.$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung 4) sogar stetige erste Ableitungen auf ω hat, und nach dem Hilfssatz 1:

$$\text{abs.}\left|\int_\omega \frac{K\cos(\nu x)}{r}\,d\omega\right|_1^2 \lesseqgtr a r_{12}^{\lambda} \quad \left|\begin{array}{l}\text{bei genügend kleinem } r_{12},\\ \lambda \text{ beliebiger echter Bruch, } a \text{ endlich}\end{array}\right.$$

auch:

$$14)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \frac{d\omega}{r}\right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \quad \left|\begin{array}{c}\lambda \text{ beliebiger echter}\\ \text{Bruch.}\end{array}\right.$$

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 haben wir daher nur die Ungleichung:

$$15)\ \text{abs.}|\Psi|_1^2 \lesseqgtr (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } H)\, r_{12}^{\lambda}, (\lambda < 1)$$

nachzuweisen, wenn wir

$$16)\qquad \Psi_{1(2)} = \int_\omega \{H(\xi\eta\varsigma) - H(xyz)\}\frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\omega\ \Big|_{1(2)}$$

setzen.

Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies schon einmal gehabt haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Grade eine Kugel mit dem Radius r_{12}; die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß

[1]) Mit Rücksicht auf Formel 54) S. 42 dieses Lehrbuchs.

[2]) Anm. 2 S. 9.

ı für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Inte-
len 16):

$$| H - H_{1\,(2)} | \overline{\overline{<}} A \cdot r^{\lambda}$$

ɛen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrührenden Teil
· Differenz $| \Psi |_1^2$.

$$\begin{cases} \text{abs.}\, | \Psi_{\omega_1} |_1^2 \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A \left\{ \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_1 + \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_2 \right\} \\ \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $| \Psi |_1^2$

$$\begin{cases} \text{abs.}\, | \Psi_{\omega_2} |_1^2 \\ \overline{\overline{<}} \text{abs.} \left| \int\limits_{\omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 + \text{abs.}\, (H_2 - H_1) \left| \int\limits_{\omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 \\ \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A \left[r_{12} \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^{\lambda}}{r_{12}} \right\} + r_{12}^{\lambda'} \right], \; (\lambda' < \lambda)\,^{1)} \\ \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A\, r_{12}^{\lambda'}, \end{cases}$$

ließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Teil der
ferenz $| \Psi |_1^2$, da die Entfernungen der Fläche $\omega - \omega_1 - \omega_2$
ı den Punkten der Graden 1, 2 größer als eine bestimmte,
lliche Länge sind:

$$\begin{cases} \text{abs.} \left[\left| \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_2 - \left| \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1 \right] \\ \qquad \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \\ \text{abs.}\, (H_2 - H_1) \int\limits_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

d die Addition der Formeln 17), 18), 19) ergibt die Un-
ichung 15) und damit auch die Behauptung des Hilfs-
zes 2.

---

[1]) Man vergleiche die analoge Untersuchung S. 7.

Wir werden nunmehr leicht zeigen können, daß die Ungleichung 4) die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I nach sich zieht, daß die ersten Ableitungen der Funktion:

$$20)\qquad W_1 = \int\limits_\omega W_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Oberfläche ω derart stetig sind, daß, wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$21)\qquad \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}\right|_1\right] < (c_1 A + c_2 \,\text{abs. Max.}\, \varkappa)\, r_{12}^{\lambda'}$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen und von den Zahlen λ', λ' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ in strengem Sinne.

Es ist in der Tat:

$$22)^{1)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial \sigma} = \displaystyle\int\limits_\omega \frac{\partial W_\omega}{\partial \sigma} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ -\displaystyle\int\limits_\omega \cos(\nu\sigma) \left\{\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2}\right\} d\omega \end{cases}$$

d. h. es setzt sich $\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}$ aus ersten Ableitungen von Flächenpotentialen

$$\int\limits_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

additiv zusammen, in denen die Funktion H die Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt. Der Hilfssatz 2 beweist somit unmittelbar die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I.

[1]) Formel 59 S. 46 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I., wenn wir allgemein durch Überstreichung einer Richtung h die tangentiale Richtung mit den Richtungskosinussen:

$$\cos(\bar{h}x) = \cos(hx) - \cos(h\nu)\cos(\nu x),\quad \cos(\bar{h}y) = \cos(hy) - \cos(h\nu)\cos(\nu y),$$
$$\cos(\bar{h}z) = \cos(hz) - \cos(h\nu)\cos(\nu z),$$

andeuten.

§ 2.

II. Die Werte des über eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω zu erstreckenden Integrales:

$$23)\qquad W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

in dem $\varkappa$ eine (abteilungsweise) stetige Funktion der Stelle auf ω vorstellt, auf der Fläche selbst:

$$24)\qquad W_{\omega} = \tfrac{1}{2}(W_a + W_i)$$

sind selbst auf der Fläche ω derart stetig, daß für 2 Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$25)\qquad \text{abs.} \left| W_{\omega} \right|_1^2 \overline{<}\; a \text{ abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}^{\Lambda},$$

wo Λ einen beliebigen echten Bruch darstellt und a eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Wahl des echten Bruches Λ abhängt.

Der Beweis ist dem Beweise des Hilfssatzes 1 des § 1 einigermaßen analog. Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies bereits getan haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius r_{12}; die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt die Fläche ω in einen Teil ω_1, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen:

$$W_{\omega,1(2)} = \left| \int\limits_{\omega} \varkappa \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \right|_{\omega,1(2)}$$

den Werten von W_{ω} in 1 und 2 auf der Fläche

26) $|\cos(r\nu)| \overline{\gtrless}$ endl. Größe $\cdot r_{12}$

setzen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrühr[...] Teil der Differenz $|W_\omega|_1^2$:

27) $\begin{cases} \text{abs.}\,|W_{\omega_1}|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \left\{ \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r} \right|_1 + \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{d\ldots}{\ldots} \right. \right. \\ \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12} \text{ (Vgl. Anm. [1])} \end{cases}$

für den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $|W_\omega|_1^2$:

28) $\begin{cases} \text{abs.}\,|W_{\omega_2}|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12} \cdot \text{Max.} \int\limits_{\omega_2} \ldots \\ \text{auf der Graden 1,} \\ \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}^{\lambda}, \ (\lambda \text{ beli[...]} \\ \text{echter Bruch, vgl. S. 9):} \end{cases}$

schließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Te[il der] Differenz $|W_\omega|_1^2$, da die Entfernungen des Gebietes $\omega - \omega$[...] von der Graden 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, en[dliche] Länge:

29) $\text{abs.}\,|W_{\omega - \omega_1 - \omega_2}|_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}$,

und die Addition der Formeln 27), 28), 29) ergibt die [Be]hauptung 25). Wir wollen diesem Satze den folgende[n] Zusatz anfügen, obgleich er eigentlich bereits in die Th[eorie] der Raumpotentiale gehört:

Zusatz zu II. Das Raumpotential:

30) $$V = \int\limits_i \frac{d\tau}{r} \text{ über den Innenraum von } \omega$$

hat an der Oberfläche ω zweite Ableitungen, di[e auf] der Innen(Außen)seite von ω derart stetig sind, [daß] für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner [Ent]fernung r_{12}:

31) $$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2}\right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$$

wo $h_1 h_2$ zwei beliebige Richtungen vorstellen, A einen ganz beliebigen echten Bruch und b eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches A abhängig ist.

Wir bedenken, daß infolge einer einfachen Greenschen Umformung:

$$32)[1] \qquad \frac{\partial V}{\partial h_1} = \int\limits_\omega \frac{\cos(\nu h_1)}{r} d\omega,$$

daraus folgt unmittelbar die Behauptung unseres Zusatzes mit Hilfe des Hilfssatzes 2 des § 1.

Man kann den Zusatz auch direkt aus dem Satze II herleiten, aus diesem Grunde füge ich denselben in diesem § hinzu, für uns war aber die Herleitung mit Hilfe des bereits bewiesenen Hilfssatzes 2 des vorigen § einfacher.

§ 3.

III. Ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum einer stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω mit den gegebenen Randwerten $\bar{\theta}$, welche auf der Fläche derart stetig vorausgesetzt werden, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$33) \qquad \text{abs.}\,|\,\bar{\theta}\,|_1^2 < A\, r_{12}^\lambda, \quad \left|\begin{array}{l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ echter Bruch,} \end{array}\right.$$

dann ist allgemein für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$34) \qquad \text{abs.}\,|\,\theta\,|_1^2 \overline{<} (a\, A + b \text{ abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^\lambda$$

wo a, b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Zahl λ abhängen.

---

[1]) Vgl. z. B. Formeln 88, S. 62 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

Wir beweisen zunächst, daß das Potential der Doppelbelegung:

$$35)\qquad W = \int_{\omega} \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

im Innenraume derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$36)\ \text{abs.}\,|W|_1^2 \leqq (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^{\lambda}.$$

Sobald die Entfernung der beiden Punkte 1 und 2 von der Fläche größer ist, als eine bestimmte, endliche Länge, sind ja alle Ableitungen von W stetig, wir haben daher nur zu beweisen, daß man um jeden Punkt der Oberfläche einen Raum abgrenzen kann, in dem die größte Entfernung zweier Punkte kleiner (gleich) ist, als eine bestimmte, endliche Länge, und in dem für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$37)\quad \text{abs.}\,|W|_1^2 \leqq (\alpha A + \beta \text{ abs. Max. } \bar{\theta})\, r_{12}^{\lambda}, \quad |\ \alpha, \beta \text{ endlich.}$$

Die Voraussetzung 33) bestehe für

$$r_{12} < \sigma,$$

wo σ größer sein soll, als eine bestimmte, endliche Länge; wir schlagen um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius $\frac{c\sigma}{2}$, wo c einen echten Bruch vorstellen soll und bezeichnen mit 3 den Punkt der Fläche ω, der von der Verbindungsgraden 1, 2 die kürzeste Entfernung hat. Zerlegen wir den Teil von ω, dessen Entfernungen von 0 kleiner sind als $\frac{\sigma}{2}$ noch in zwei Teile ω_1 und ω_2 so, daß ω_2 alle Punkte enthalte, deren Entfernungen von den Punkten 1 und 2 größer sind, als r_{12} — ω_1 kann sich auch auf null reduzieren —, dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz

$$|W - W_3|_1^2 = \left| \int_{\omega} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_3)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \right|_1^2 :$$

$$38)\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}\,|W-W_3|_{\omega_1}{}_1^2\\&<\text{endl. Konst. } A r_{12}^{\lambda}\left[\left|\int_{\omega_1}\frac{|\cos(r\nu)|}{r^{\lambda}}\,d\omega\right|_1+\left|\int_{\omega_1}\frac{|\cos(r\nu)|}{r^{2}}\,d\omega\right|_2\right],\\&<\text{endl. Konst. } A r_{12}^{\lambda},\end{aligned}\right.$$

der von ω_2 herrührende Teil der Differenz $|W-W_3|_1^2$

$$39)\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}\,|W-W_3|_{\omega_2}{}_1^2\\&\overline{<}\int_1^2\int_{\omega_2}(\bar\theta(\xi\eta\varsigma)-\bar\theta_3)\frac{2}{r^3}\,d\omega\,ds\,^{1)},\\&\overline{<}\int_1^2\int_{\omega_2}\text{endl. Konst. }\frac{r^{\lambda}}{r^3}\,d\omega\,ds\,\overline{<}\,\text{endl. Konst. }\frac{A\,r_{12}}{r_{12}^{1-\lambda}},\,^{2)}\end{aligned}\right.$$

endlich, da alle Punkte der Fläche $\omega-\omega_1-\omega_2$ von den Punkten der Verbindungsgrade 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge, der von $\omega-\omega_1-\omega_2$ herrührende Teil der Differenz $|W-W_3|_1^2$:

$$40)\quad \text{abs.}\,|W-W_3|_{\omega-\omega_1-\omega_2}{}_1^2\,\overline{\overline{<}}\,\text{endl. Konst. abs. Max. }\bar\theta\cdot r_{12},$$

und es folgt die Formel 37) durch Addition der Ungleichungen 38), 39), 40).

Damit ist aber auch die Behauptung 36) für irgend zwei Punkte des Innenraumes von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} bewiesen.

Nach der Methode des arithmetischen Mittels ist nun

$$41)\qquad \theta=+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega}\bar\theta\,\frac{\cos(r\nu)}{r^{2}}\,d\omega+w,$$

wo w das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen nach dem Satze I bereits im ganzen Innenraume stetig sind. Durch die Formel 36) ist daher die Behauptung des Satzes III mitbewiesen.

---

[1]) Das Integral $\int_1^2(-)\,ds$, analog früheren Betrachtungen, über die Verbindungsgrade 1, 2 zu erstrecken.

[2]) Man vgl. S. 6.

Zusatz 1 zu III. Ein jedes Flächenpotentia

42)
$$V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

ist, wenn man über die Funktion H lediglich v
setzt, daß sie endlich[1]) ist, im ganzen Innen
und Außenraume derart stetig, daß für zwei P
1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

43) $$\text{abs.}\left|V\right|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. abs Max.}\, H \cdot r_{12}^{\lambda} \quad \Big| \lambda \text{ beliebige[r]} \text{ Bruc[h]}$$

Der Zusatz folgt unmittelbar nach dem Hilfssat
§ 1 und dem Satze III.

Zusatz 2 zu III. Das Raumpotential[2])

44)
$$V = \int_\tau \frac{d\tau}{r}$$

besitzt zweite Ableitungen, welche im ganzen
(Außen)raume derart stetig sind, daß für zwei P
des Innen(Außen)raumes 1 und 2 in genügend k
Entfernung r_{12}:

45)
$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2}\right|_1^2 < a\, r_{12}^{\lambda}$$

wenn h_1 und h_2 zwei ganz beliebige Richtunge
stellen, λ einen beliebigen echten Bruch und
endliche Konstante, die lediglich von der Gest
Fläche ω und der Wahl des echten Bruches λ ab

Der Zusatz folgt unmittelbar aus dem Zusatz
Satze II und dem Satze III.

Zusatz 3 zu III. Besteht die Voraussetzu
Satzes III:

46)
$$\text{abs.}\left|\theta\right|_1^2 < A\, r_{12}^{\lambda}$$

[1]) Im Sinne von „endlich und integrabel“.

[2]) Eine Verallgemeinerung dieses Satzes findet man im
Abschnitt.

$$r_{12} < \sigma,$$

σ größer ist als eine bestimmte, endliche Länge,
d konstruieren wir um irgend einen Punkt der
erfläche als Zentrum eine Kugel mit dem Radius

$$(1 - \Delta)\frac{\sigma}{2}$$

o Δ eine beliebig kleine Zahl vorstellt, so ist für
wei Punkte 1 und 2 des Raumes T, den diese Kugel
nd der Innenraum von ω gemeinsam haben:

$$8) \quad \text{abs.}\ \theta\,\Big|_1^2 < \left(\text{endl. Konst.}\ \Delta + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\ \text{abs. Max.}\ \theta\right) r_{12}^{\lambda}.$$

Wir haben in dem Beweise von III nur den echten Bruch
$= 1 - \Delta$ zu setzen; die beiden Ungleichungen 38) und 39)
leiben ungeändert, die Ungleichung 40) schreiben wir:

$$\text{abs.}\ W - W'_3\,\Big|_{\omega-\omega_1-\omega_2}{}_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max.}\ \theta \cdot r_{12}\ \text{Max.}\int\limits_{\omega-\omega_1-\omega_2}\frac{d\omega}{r^3}$$

auf der Strecke 1, 2,

und es folgt die Behauptung, wenn wir noch bedenken, daß
las Integral rechts

$$< \frac{\text{endl. Konst.}^{1)}}{\text{kleinste Entfernung der Fläche}\ \omega - \omega_1 - \omega_2\ \text{von 1 und 2}}$$

$$< \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}$$

also

$$49) \quad \text{abs.}\ W - W'_3\,\Big|_{\omega-\omega_1-\omega_2}{}_1^2 < \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma}\ \text{abs. Max.}\ \theta \cdot r_{12},$$

durch Addition von 38), 39) und 49).

Zusatz 4 zu III. Sind außer θ die ersten tan-
gentialen Ableitungen von $\bar{\theta}$ auf der Fläche ω derart
stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in
genügend kleiner Entfernung r_{12}:

---

[1] Vgl. Anmerkung [1]) S. 6.

50) $$\text{abs.}\left|\frac{\partial\bar\theta}{\partial h}\right|_1^2 < A\cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left|\begin{array}{l}\lambda \text{ echter Bruch,}\\ A \text{ endliche Konstante,}\end{array}\right.$$

wo h[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt, so sind die ersten Ableitungen der Potentialfunktion θ im ganzen Raume i derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes i in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

51) $$\text{abs.}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right|_1^2 < (a\,A + b\,\text{abs. Max. }\bar\theta)\,r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wo σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, a, b endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda'$ abhängen.

Es folgt zunächst die behauptete Stetigkeit der ersten Ableitungen von W von der Art 51) genau in derselben Weise, wie die Behauptung des Satzes I aus der Ungleichung 4) S. 5. Schließlich ist nach der Methode des arithmetischen Mittels:

52) $$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial W}{\partial\sigma} + \frac{\partial w_1}{\partial\sigma},$$

wo w_1 das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen bereits im ganzen Raume i nach Satz I von der Art 51) eindeutig und stetig sind. Damit ist auch der Zusatz 4 bewiesen.

---

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots$, wobei $|\varepsilon_1| < \text{endl. Konst. } r_{12}$.

II. Abschnitt.

Einige Sätze über Raumpotentiale.

Ein bekannter Satz von Hölder[1]) sagt aus, daß die zweiten Ableitungen des Raumpotentials:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r} \tag{1}$$

eindeutig und stetig sind, im ganzen Innenraume sowohl, als auch im ganzen Außenraume, falls die absoluten Funktionsdifferenzen von E in zwei Punkten 1 und 2 des Raumes τ

$$\overline{\overline{<}} A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A eine endliche Konstante, λ eine positive, von null verschiedene Zahl vorstellt.

Er sagt ferner aus, daß die Sprünge der zweiten Ableitungen bei dem Durchgange durch die Oberfläche des Gebietes τ dieselben sind, wie bei der Voraussetzung endlicher erster Ableitungen von E, und daß schließlich auch die obige Bedingung für E für die Gültigkeit der Formel:

$$\Delta V = -4\pi E$$

in jedem Punkte des Innenraumes hinreichend ist.

Ich werde in diesem zweiten Abschnitt vier Sätze beweisen, von denen der erste eine Erweiterung des Hölderschen Satzes ist; die drei anderen Sätze beziehen sich auf ein diesem Satze verwandtes Gebiet der Potentialtheorie, und es sei hervorgehoben, daß dieselben in meinen Abhandlungen zur Elastizitätstheorie eine ganz außerordentlich wichtige Rolle spielen werden.

---

[1]) Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Tübingen 1882.

§ 1.

I. Erfüllt die Funktion E der Stelle des Raumes τ die Bedingung, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\overline{\gtrless} A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, so sind auch die zweiten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

sowohl im Innenraume, als auch im Außenraume derart stetig, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 des Innen(Außen)raumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< (a A + b \text{ abs. Max. } E)\, r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo a und b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ abhängig sind und von der Zahl λ.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Innenraumes in der Entfernung r_{12}, wir beschränken uns auf die Betrachtung im Innenraume, die Betrachtung im Außenraume ist Schritt für Schritt dieselbe. Wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1, dann ist, wenn wir

$$2)\left\{\begin{aligned} V &= \underbrace{\overbrace{\int_{\tau}[E(\xi\eta\varsigma)-E(xyz)]\frac{d\tau}{r}}^{V''} + \int_{\tau}(E(xyz)-E_1)\frac{d\tau}{r}}_{V'} + \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V' &= V - \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V'' &= \int_{\tau}[E(\xi\eta\varsigma)-E(xyz)]\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right.$$

setzen, mit D_2 irgend eine zweite Ableitung bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$\left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1 \overline{\gtrless} 2A \left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1, \quad \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_2 \overline{\gtrless} 2A \left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2,$$

wobei durch den Index τ_1 angedeutet werden soll, daß das Potential V'' nur über den Raum τ_1 erstreckt werden soll, also:

$$\text{abs.} \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \overline{\gtrless} 2A \left[\left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 + \left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \right].$$

Aus der durch eine einfache Green'sche Umformung folgenden Formel:

$$3)\quad \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}}\, d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \omega_1 \text{ Oberfläche von } \tau_1, \\ \nu \text{ innere Normale von } d\omega, \end{array} \right.$$

ergibt sich:

$$\left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 \overline{\gtrless} \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_1, \quad \left| \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \overline{\gtrless} \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int\limits_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_2,$$

somit:

$$\text{abs.} \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \overline{\gtrless} \frac{16\pi}{\lambda} A r_{12}^{\lambda}, \quad \text{abs.} \left| D_2 V'_{\tau_1} \right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} \text{ [1]}$$

und:

$$4)\quad \begin{array}{c} \text{abs.} \left| D_2 (V - V') \right|_1^2 + \text{abs.} \left| D_2 V'_{\tau_1} \right|_1^2 \\ \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} + \text{endl. Konst. abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda} \text{ [2]}. \end{array}$$

Wir schlagen jetzt um O eine zweite Kugel mit dem Radius R; wir können denselben so wählen, daß derselbe größer

---

[1]) Da $D_2 \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r}$ stets endlich ist.

[2]) Da stets bei genügend kleinem r_{12}: abs. $\left| D_2 \int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r} \right|_1^2 \overline{\gtrless}$ endl. Konst. r_{12}^{A}, wo A einen beliebigen echten Bruch darstellt. (Zusatz 2 zu Satz III des I. Abschnitts.)

ist, als eine bestimmte, endliche Länge, aber dennoch gen klein so, daß die Oberfläche ω_2 dieser Kugel den Raum in zwei Teile τ_2 und $\tau-\tau_1-\tau_2$ zerlegt, und daß für j Punkte 1 und 2 des Raumes $\tau_1+\tau_2$:

$$\text{abs.}\,|E|_1^2 \overline{\gtrless} A\cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Es ist dann:

$$\text{abs.}\,|D_2 V'_{\tau_2}|_1^2 < \int_1^2\int_{\tau_2}[\,|E(\xi\eta\varsigma)-E(xyz)|+A\cdot r_{12}^{\lambda}]\left|\frac{\partial D_2{}'_r}{\partial s}\right.$$

wobei wir durch den Index τ_2 andeuten, daß das Poten nur über den Raum τ_2 erstreckt werden soll, und unt ein Element der Graden 1, 2 [1]) verstehen, und es ist a Graden 1, 2:

$$\int_{\tau_2}[\,|E(\xi\eta\varsigma)-E(xyz)|+A r_{12}^{\lambda}]\left|\frac{\partial D_2{}^1_r}{\partial s}\right| d\tau < 6A\int_{\tau_2}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}}+6A$$

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int_{\tau_2}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} = \frac{1}{\lambda-1}\int_{\omega_1+\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}\,d\omega, \quad \left|\ \nu \text{ die in das Gebiet } \tau_2 \text{ h gehende Normale von}\right.$$

$$< \frac{12A}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}r_{12})^{1-\lambda}}\cdot 4\pi + \frac{12A}{1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}r_{12}}\,r_{12}^{\lambda}\cdot 4\pi$$

daraus folgt:

$$\int_{\tau_2}[\,|E(\xi\eta\varsigma)-E(xyz)|+A r_{12}^{\lambda}]\left|\frac{\partial D_2{}^1_r}{\partial s}\right| d\tau < 4\pi\,\frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda}$$

somit:

$$\text{5)}\qquad \text{abs.}\,|D_2 V'_{\tau_2}|_1^2 < 4\pi\,\frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda}\,A\,r_{12}^{\lambda}.$$

Schließlich ist, da R größer ist als eine gegebene liche Länge:

[1]) Falls die Verbindungsgrade 1, 2 nicht ganz im Innenraum laufen sollte, kann dieselbe durch eine andere zwischen 1 und laufende, ganz im Innenraume liegende Kurve s ersetzt werden.

6) $\quad \text{abs.}\,|D_2 V'_{\tau-\tau_1-\tau_2}|_1^2 < b' \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}, \quad (b' \text{ endlich}),$

und es folgt durch Addition von 4), 5), 6) die Behauptung:

7) $$\text{abs.}\,|D_2 V|_1^2 < (aA + b \text{ abs. Max. } E)\, r_{12}^{\lambda}.$$

§ 2.

II. Die ersten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

in dem E lediglich als endlich[1]) vorausgesetzt wird, sind im ganzen Raume derartig stetig, daß ihre absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo man für λ einen beliebigen echten Bruch setzen kann und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ und der Wahl des echten Bruches λ abhängt.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Raumes in der Entfernung r_{12}: wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1,2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen wieder das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1, dann ist, wenn wir mit $D_1 V$ irgend eine erste Ableitung von V bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$D_1 V_{\tau_1 1} < 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad |D_1 V_{\tau_1}|_2 < 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}$$

somit:

8) $$\text{abs.}\,|D_1 V_{\tau_1}|_1^2 \leqq 8\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Es ist ferner:

$$\text{abs.}\,|D_1 V_{\tau-\tau_1}|_1^2 < \int_1^2 \left| \frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s} \right| ds$$

[1]) Endlich im Sinne von endlich und integrabel.

wenn wir wieder unter ds ein Element der
stehen, und es ist auf der Graden 1, 2:

$$\left|\frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s}\right| \overline{<} \alpha \text{ abs. Max. } E \int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^3} \overline{<} \beta \text{ abs.}$$

α, β endliche Konstanten,

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^{2+\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda} \int\limits_{\omega+\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

$\omega\omega_1$ Oberflä
ν die in das
gehende

auch:

$$\overline{<} \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}},$$

daraus folgt:

$$\int\limits_1^2 \left|\frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s}\right| ds < \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max.}$$

und:

$$9) \qquad \text{abs.} \mid D_1 V_{\tau-\tau_1} \mid_1^2 \overline{<} \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E$$

somit, durch Addition von 8) und 9) die Beha

$$10) \qquad \text{abs. } D_1 V \;_1 < A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda}$$

§ 3.

III. Verstehen wir unter θ eine Funktion
auf einer Kugelfläche vom Radius R, d
stetig ist, daß die absolute Funktionsdiff
zwei Punkte 1 und 2 der Kugelfläche in
kleiner Entfernung r_{12}

$$< A \cdot r_{12}^{\lambda},$$

[1] Es ist möglich, daß man die Voraussetzung des Sa

$$\text{abs.} \mid \theta \mid_1^2 \overline{<} A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

entbehren kann, und daß die Stetigkeit von θ auf der Ku
reichend ist; doch ist der Satz in der obigen Form für di
die wir ihn brauchen werden, ausreichend.

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum der Kugel bei den Randwerten $\bar{\theta}$, so sind die zweimal nach der Normalen genommenen Ableitungen des Raumpotentials:

$$V = \int_i \theta \frac{d\tau}{r} \tag{11}$$

an der inneren (äußeren) Seite der Kugelfläche in folgender Weise darstellbar:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} &= 2\pi\bar{\theta} + \tfrac{1}{2}\int_\omega \bar{\theta} \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial \nu}\int_i \theta \frac{d\tau}{r}, \text{ außen,} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} &= -4\pi\bar{\theta} + \tfrac{1}{2}\int_\omega \bar{\theta} \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial \nu}\int_i \theta \frac{d\tau}{r}, \text{ innen,} \\ &\nu \text{ innere Normale.} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Wir denken uns zum Beweise die Funktion θ auf der Kugelfläche nach Kugelfunktionen entwickelt, was ja bei der Voraussetzung des Satzes gestattet ist:

$$\bar{\theta} = \sum_0^\infty {}_j\, Y_j(\mu, \varphi), \tag{13}$$

dann ist:

$$\theta = \sum_0^\infty {}_j \left(\frac{r_1}{R}\right)^j Y_j(\mu_1 \varphi_1) \text{ für jeden Punkt } (r_1 \mu_1 \varphi_1) \text{ in der Kugel,}$$

und:

$$V = \int_i \theta \frac{d\tau}{r} = 4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \frac{R^{j+3}}{\varrho^{j+1}} Y_j(\mu, \varphi)$$

für jeden Punkt $(\varrho\, \mu\, \varphi)$ des Außenraums,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} = 4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi) \tag{14}$$

außen an der Kugelfläche.

Da ferner:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \nu} = -4\pi \sum_0^\infty {}_j \frac{j+1}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi) \tag{15}$$

und:

$$16)\qquad \int_\omega \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = -4\pi\sum_0^\infty j\,\frac{j}{2j+1}\,Y_j(\mu,\varphi)$$

außen an der Kugelfläche,

so folgt die erste Formel 12) unmittelbar aus 13), 14), 15) und 16).

Die zweite Formel 12) ergiebt sich, wenn man bedenkt, daß:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_a = 4\pi\bar{\theta} + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_i,$$

$$\left|\int_\omega \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right|_a = -4\pi\bar{\theta} + \left|\int_\omega \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right|_i.$$

§ 4.

IV. **Verstehen wir unter $\bar{\theta}$ eine Funktion der Stelle auf einer beliebigen, geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, und zwar eine derart stetige Funktion, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}**

$$< A\, r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} < \sigma),$$

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum von ω bei den Randwerten $\bar{\theta}$, so ist die Funktion:

$$17)\qquad f = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_i \theta\,\frac{d\tau}{r}\right|_a$$

der Stelle an der Außenseite der Oberfläche ω derart stetig, daß die Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< \left[\varepsilon_\alpha A + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_\delta \sigma}\right)\text{abs. Max.}\,\bar{\theta}\right] r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} < (1-\delta)\sigma),$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Zahl

abhängen, δ eine Zahl, die beliebig klein gewählt werden kann, ε_σ und ε_δ zwei Konstanten, die mit abnehmendem σ bezw. δ zu null konvergieren, aber stets bestimmte, von null verschiedene positive Werte haben, sobald σ und δ von null verschiedene positive Werte besitzen.

Zum Beweise seien 1 und 2 zwei Punkte der Oberfläche ω in der Entfernung r_{12}, und wir denken uns zwei Kugeln mit einem Radius R, der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge, aber doch klein genug, daß die beiden Kugeln, welche bezw. die Fläche ω in 1 und 2 berühren sollen, ganz in dem Innenraume von ω liegen. Auf dem Schnittkreise der beiden Kugeln, die wir in der Folge als erste und zweite Kugel be-

zeichnen wollen, markieren wir den Punkt 3, der von der Graden 1, 2 den kürzesten Abstand hat, und wir konstruieren um diesen Punkt 3 als Zentrum eine Kugel mit dem Durchmesser

$$\sigma(1-\Delta),$$

wo Δ eine beliebig klein gewählte Zahl sein mag. Den Teil der Kugel, der im Innenraume von ω, aber außerhalb der beiden zuerst konstruierten Kugeln liegt, wollen wir mit T bezeichnen. T ist in der Figur schraffiert. Der Gang unseres Beweises wird nun folgender sein:

Wir werden zeigen, daß die Funktion:

$$18)\left\{\begin{array}{l} F = \theta - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_{i-T}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_a \quad \nu \text{ nach Belieben eine d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4 \text{ Richtungen:} \\ \text{innere Normale von } \omega \text{ in 1 oder 2,} \\ \text{innere Normale der beiden zuerst konstruierten Kugel-} \\ \text{flächen in 3,} \end{array}\right.$$

die Ungleichungen erfüllt:

$$19a)\ \text{abs.}|F|_1^3 < \left\{\varepsilon_a A + \left(b + \frac{c}{\varepsilon_\delta a}\right)\text{abs. Max. }\theta\right\} r_{12}^\lambda, \quad r_{12} < (1-\delta)$$

$$19b)\ \text{abs.}|F|_2^3 < \left\{\varepsilon_a A + \left(\beta + \frac{\gamma}{\varepsilon_\delta a}\right)\text{abs. Max. }\theta\right\} r_{12}^\lambda, \quad b, c, \beta, \gamma \text{ end. Konstanten}$$

und daß die Funktion:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_T(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_a$$

in den beiden Punkten 1 und 2 Werte besitzt, deren absolu Differenz

$$< \left(\varepsilon_a A + \left(B + \frac{C}{A}\right)\text{abs. Max. }\theta\right) r_{12}^\lambda, \quad (B, C \text{ endl. Konstanten}$$

und daraus wird sehr leicht die Behauptung folgen.

Wir wollen zuerst zeigen, daß

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_T(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_a$$

die zuletzt behauptete Eigenschaft besitzt.

Wir bemerken hierzu zunächst, daß bei der Voraussetzu unseres Satzes über θ:

$$20)[1] \quad \text{abs.}|\theta|_1^2 < \text{endl. Konst. } \varrho_{12}^\lambda \quad \left|\begin{array}{l}\text{für zwei beliebige Punk} \\ \text{des Innenraumes in genüge} \\ \text{kleinem Abstand } \varrho_{12},\end{array}\right.$$

[1]) Satz III des I. Abschnitts.

und im Besonderen in dem Raume T:

$$21)^{1)}\quad \text{abs.}\,|\theta|_1^2 < \left(\text{endl. Konst.}\,A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\,\text{abs. Max.}\,\bar{\theta}\right)\varrho_{12}^{\lambda}.$$

Wir teilen ferner das Gebiet T noch in zwei Teile (1) und (2), so daß (2) alle Punkte von T enthält, deren Abstand von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 2 größer als r_{12} ist — das Gebiet (2) kann sich auch auf Null reduzieren. Dann ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_{(1)}[\theta(\xi\eta\zeta)-\theta(xyz)]\frac{d\tau}{r}$$

$$< \left(\text{endl. Konst.}\,A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\,\text{abs. Max.}\,\theta\right)\int\limits_{(1)}\frac{d\tau}{r^{3-\lambda}},$$

oder, da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnittes:

$$\int\limits_{(1)}\frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{2}{\lambda}\int\limits_{\omega_1}\frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}}\,d\omega$$

auch:

$$< \left(\text{endl. Konst.}\,A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\,\text{abs. Max.}\,\theta\right)\int\limits_{\omega_1}\frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}}\,d\omega$$

wenn wir mit ω_1 die Oberfläche von (1) bezeichnen. Nun ist für die Teile von ω_1, welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu) < \text{endl. Konst.}\,r_{12}$$

für den übrigen Teil ist:

$$\int\frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} < r_{12}^{\lambda}\int\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

und gleichfalls:

$$\int\frac{|\cos(r\nu)|}{r^2}\,d\omega < \text{endl. Konst.}\,r_{12}.$$

---

[1]) Zusatz 3 zu III des I. Abschnitts.

Es ist somit jedenfalls:

$$\int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} d\omega \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^{1+\lambda}$$

und folglich:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} [\theta(\xi\eta\zeta) - \theta(xyz)] \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

$$\leqq \left[\varepsilon_n \Delta + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta} \text{abs. Max. } \bar{\theta}\right] r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l}\text{sowohl in 1,} \\ \text{als auch in 2.}\end{array}\right.$$

Da wieder infolge einer einfachen Greenschen Transformation:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} \right|_a = \left| \int_{\omega_1} \cos(\nu\nu') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} d\omega' \right|_a, \quad \left| \begin{array}{l}\text{man vgl. z. B. Formel 35)} \\ \text{S. 62 meines Lehrbuchs der} \\ \text{Potentialtheorie I.}\end{array}\right.$$

ferner wiederum für die Teile von ω_1, welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(\nu\nu') = 1 + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| \leqq \text{endl. Konst. } r_{12},$$

für den übrigen Teil:

$$\int \frac{|\cos(r\nu')|}{r^2} d\omega < \text{endl. Konst. } r_{12},$$

so ist sowohl in 1, als auch in 2:

$$\text{abs.} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} \bigg|_a \leqq \text{endl. Konst. } r_{12},$$

somit:

$$(\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} \bigg|_a < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},$$

und es folgt:

$$22) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2} \displaystyle\int_{(1)} [\theta(\xi\eta\zeta) - \theta_1] \frac{d\tau}{r} \bigg|_a \\ < \left(\varepsilon_n \Delta + \left(\text{endl. Konst.} + \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\Delta}\right) \text{abs. Max. } \theta\right) r_{12}^{\lambda}. \\ \text{(sowohl in 1, als auch in 2).} \end{array} \right.$$

Andererseits ist:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{(2)}(\theta - \bar{\theta}_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^2$$

$$\int\limits_1^2\int\limits_{(2)}\left\{\theta(\xi\eta\zeta)-\theta(xyz)\right| + \left(\text{endl.K.}A+\frac{\text{endl.K.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs.M.}\bar{\theta}\right)r_{12}^{\lambda}\Big\}\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial\nu^2\partial s}d\tau\, ds,$$

wenn wir mit ds ein Element der Verbindungsgraden 1, 2[1]) bezeichnen, somit:

$$\overline{\overline{<}}\left(\text{endl. Konst.}A+\frac{\text{endl.Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs. Max.}\bar{\theta}\right)\int\limits_1^2\left\{\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}}+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^4}\right\}ds;$$

da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnitts:

$$\int\limits_{(2)}\frac{d\tau}{r^{4-\lambda}}=\frac{1}{\lambda\cdot 1}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}d\omega,$$

ω_2 Oberfläche von (2), ν die in das Innere von (2) hineingehenden Normalen,

auch:

$$< \left(\text{endl. Konst. }A+\frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta\cdot\sigma}\text{abs. Max. }\bar{\theta}\right)$$

$$\int\limits_1^2\left\{\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}d\omega+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^3}d\omega\right\}ds.$$

Wieder ist für die Teile der Fläche ω_2, welche der Fläche ω und den zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu) \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. }\sigma.$$

Für den übrigen Teil ist:

$$\int\frac{\cos(r\nu)}{r^2}d\omega \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. }\sigma,$$

es folgt somit:

$$\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}}d\omega+r_{12}^{\lambda}\int\limits_{\omega_2}\frac{\cos(r\nu)}{r^3}d\omega < \text{endl. Konst. }\sigma\frac{r_{12}^{\lambda}}{r_{12}}$$

[1]) Vgl. Anmerkung [1]) S. 24.

und:

$$23)\quad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{(2)}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^2 \overline{<}\left(\varepsilon_\sigma \varDelta + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta}\,\text{abs. Max.}\,\theta\right.$$

Durch Addition von 22) und 23) ergibt sich:

$$24)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{T}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{\sigma 1}^2 \\ \overline{<}\left(\varepsilon_\sigma \varDelta + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta}\right)\text{abs. Max.}\,\bar\theta\right. \end{array}\right.$$

Wir gehen jetzt zum Beweise der Formel 19 a) über
teilen zum Beweise derselben das Gebiet $i - T$ in vier
1. in die Kugel T_1, deren Oberfläche ω in 1 berührt,
den Teil T_2 von $i - T - T_1$, welcher außerhalb der Kug
dem Radius $\frac{\sigma}{2}(1-\varDelta)$ um den Punkt 3 als Zentrum
drittens in den Teil T_3 von $i - T - T_1 - T_2$, dessen Ab
von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 3 größer si
r_{12}, und viertens in den übrig bleibenden Teil T_4 von
Dann ist zunächst analog 22) und 23):

$$25)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{T_4}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{1a}^3 \\ <\left(\varepsilon_\sigma \varDelta + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta}\right)\text{abs. Max.}\,\theta\right. \end{array}\right.$$

$$26)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{T_3}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^3 \\ <\left(\varepsilon_\sigma \varDelta + \frac{\text{endl. Konst.}}{\varDelta}\,\text{abs. Max.}\,\theta\right) r_{12}^{\lambda}; \end{array}\right.$$

es ist ferner:

$$27)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left|\theta - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int\limits_{T_1}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{a1}^3 \\ < \text{endl. Konst. abs. Max.}\,\theta \cdot r_{12}^{\lambda}\,{}^{1)} \end{array}\right.$$

nach dem Satze III dieser Abhandlung.

[1]) Mit Rücksicht auf Satz II dieses Abschnitts und Satz II
I. Abschnitts.

Schließlich ist:

$$
28)\quad \begin{cases}
\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_{T_2}(\theta-\bar\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_1^3 \\
\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\ \bar\theta\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sigma(1-\Delta)-\frac{1}{2}r_{12}}\cdot r_{12},{}^{1)} \\
\overline{\overline{<}}\ \frac{\text{endl. Konst.}}{D\cdot\sigma(1-\Delta)}\ \text{abs. Max.}\ \bar\theta\cdot r_{12},\quad (r_{12}\ \overline{\overline{<}}\ \sigma(1-\Delta)(1-D)).
\end{cases}
$$

Aus 25), 26), 27), 28) folgt nunmehr unmittelbar die Formel 19a), und analog die Formel 19b).

Berücksichtigt man, daß nach Zusatz 2 zu Satz II des I. Abschnitts:

$$
29)\quad \text{abs.}\ \bar\theta_1\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int\limits_i\frac{d\tau}{r}\right|_1^2\ \overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\ \bar\theta\cdot r_{12}^{\Delta}
$$

bei genügend kleinem r_{12}, Δ ein ganz beliebiger echter Bruch, so ergibt sich aus 19a), 19b) und 24) unmittelbar die Behauptung unseres Satzes, wenn wir noch zeigen können, daß tatsächlich die Formeln 19a), 19b) bestehen, welche Richtung von den 4 Richtungen

innere Normale von ω in 1 oder 2,

innere Normalen der beiden ersten Kugelflächen in 3

wir auch wählen mögen.

Wir bemerken hierzu, daß die Fehler, welche wir machen, wenn wir eine dieser Richtungen durch eine andere derselben ersetzen,

$$\overline{\overline{<}}\ \mathfrak{A}\cdot\text{endl. Konst.}\ r_{12}$$

sind, wenn $\mathfrak{A}$ den absolut größten Wert bezeichnet, den irgend eine der zweiten Ableitungen von

$$\int\theta\frac{d\tau}{r}\ \Big|\ \text{(hinerstreckt über eine der beiden zuerst konstruierten Kugeln)}$$

haben kann, da nur in 27) ein Fehler entstehen kann.

---

[1]) Da $\int\limits_{T_2}\frac{d\tau}{r^4}$ auf der Verbindungslinie 1, 3 kleiner als

$$\frac{\text{endl. Konst.}}{\text{kürzester Abstand von } T_2 \text{ nach dieser Verbindungslinie}}.$$

Nun ist, wie bereits aus den Hölderschen Untersuchungen hervorgeht:

$$\mathfrak{A} \overline{\overline{<}} \varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma^{\lambda'}} \text{abs. Max. } \bar{\theta}, \quad \Big| \; \lambda' \text{ ein beliebiger, echter Bruch,}$$

somit auch der gemachte Fehler

$$< (\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma} \text{abs. Max. } \bar{\theta}) \, r_{11},$$

und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

I.

Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(Eingelaufen 18. Januar.)

Die Methode der successiven Annäherungen ist im Anschluß an die bekannten, grundlegenden Arbeiten von Schwarz, Picard, Poincaré mit größtem Erfolge zur Lösung einer Reihe der wichtigsten Probleme der mathematischen Physik herangezogen worden.

Versuche, diese Methode auch zur Lösung der in der Elastizitätstheorie auftretenden Differentialgleichungen, und zwar zunächst der statischen Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -X, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -Y, \quad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -Z, \end{cases}$$

anzuwenden, sind von Lauricella[1]) und E. und F. Cosserat[2]) gemacht worden, aber sie hatten bisher noch zu keinem be-

---

[1]) Lauricella, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa 1894; N. C. (4) 9, S. 97, 10, S. 5. Während der Drucklegung meiner Abhandlung erhielt ich Kenntnis von einer neuen, interessanten Untersuchung Herrn Lauricellas (Ann. di Mat. 1905), auf die ich hier noch hinweisen will; dieselbe beschränkt sich auf eine überall konvexe Grenzfläche.

[2]) E. und F. Cosserat, C. r. 126, S. 1089, 1898; 133, S. 145, 1901.

Bezeichnen wir mit U, V, W die Potentialfunktionen Gebietes τ, welche bezw. die Grenzwerte $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ an ω besi so ergeben sich für die Funktionen:

$$3)\quad \begin{cases} u' = u - U, \\ v' = v - V, \\ w' = w - W \end{cases}$$

die Differentialgleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \Delta u' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = -X - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} = -Y - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \Delta w' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} = -Z - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

wo wir noch:

$$5)\quad \begin{cases} \theta' = \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z}, \\ \Theta = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} \end{cases}$$

gesetzt haben. Dazu kommen noch die Grenzbedingungen

$$6)\quad \begin{rcases} u' = 0, \\ v' = 0, \\ w' = 0 \end{rcases} \text{ an } \omega.$$

§ 2.

Das allgemeine Problem läßt sich somit auf das folg zurückführen, das wir als das Hauptproblem des elastis Gleichgewichts bezeichnen wollen:

Wir suchen drei in einem Gebiete τ eindeutige und st Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, we in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$
7) \quad \begin{cases} \Delta u + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -f_3, \end{cases}
$$

oder, was dasselbe ist, den Differentialgleichungen:

$$
8) \quad \begin{cases} \Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -F_1, & F_1 = (1-\mathfrak{k}) f_1, \\ \Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -F_2, \quad k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}}, & F_2 = (1-\mathfrak{k}) f_2, \\ \Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -F_3, & F_3 = (1-\mathfrak{k}) f_3, \end{cases}
$$

und an der Oberfläche ω von τ die Grenzwerte:

$$
8') \quad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}
$$

annehmen.

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ der Stelle in τ wollen wir annehmen, daß sie in τ derart stetig sind,[1]) daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} die absoluten Funktionsdifferenzen

$$
\overline{\overline{<}}\, A r_{12}^{\lambda}
$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ eine von Null verschiedene, positive Zahl vorstellt, und überdies im Innenraume

$$
8'') \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0
$$

vorausgesetzt werden soll.

[1]) Diese Bedingung ist im besonderen erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von $f_1\, f_2\, f_3$ in τ endlich sind.

Nach Lösung dieses Problems werden wir im § 7 zeig
daß man in der Tat auch für f_1 f_2 f_3 drei Funktionen von
folgenden Form wählen darf:

$$f_1 = X + \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$f_2 = Y + \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$f_3 = Z + \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

wo X, Y, Z drei ganz beliebige Funktionen der Stelle in
sind, die in τ nur derart stetig sind, daß für zwei Punk
1 und 2 des Gebietes in genügend kleiner Entfernung r_{12} di
absoluten Funktionsdifferenzen, sowie die von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial}$

$$\leqq A r_{12}^{\lambda}, \quad \begin{array}{|l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ positive, von Null verschiedene Zahl,} \end{array}$$

sind, und Θ eine allgemeine, stetige Potentialfunktion,[1]) den
Stetigkeit in τ dieselbe Bedingung erfüllt, wie die Stetigk
der Funktionen X, Y, Z.

Wir werden die Lösung des Problems geben für jed
beliebigen Wert von k in den Grenzen

$$-1 < k < \infty$$

d. h. für jeden Wert von $\mathfrak{k}$ in den Grenzen:

$$-1 < \mathfrak{k} < +1 \quad \text{(in strengem Sinne}$$

wenn also $\mathfrak{k}$ einen beliebigen positiven oder negativen echt
Bruch vorstellt.

§ 3.

Daß für

$$-1 < k < \infty$$

nur ein System von Lösungen vorhanden ist, wenn man v
vornherein die Existenz eines Systems von Lösungen vorau

[1]) D. i. die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum
bei gegebenen stetigen Randwerten Θ an ω.

tzt, ist bekannt, ich füge den Beweis hier nur der Voll-
ändigkeit halber hinzu.

Gäbe es zwei Systeme von Lösungen $u_1\, v_1\, w_1$ und $u_2\, v_2\, w_2$,
ınn wäre:

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta (u_1 - u_2) + k \frac{\partial (\theta_1 - \theta_2)}{\partial x} = 0, \\ &\Delta (v_1 - v_2) + k \frac{\partial (\theta_1 - \theta_2)}{\partial y} = 0, \\ &\Delta (w_1 - w_2) + k \frac{\partial (\theta_1 - \theta_2)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right| \text{ in } \tau,$$

ıd:

$$)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0, \\ v_1 - v_2 &= 0, \\ w_1 - w_2 &= 0 \end{aligned}\right| \text{ an } \omega.$$

Wir multiplizieren die erste der Gleichungen 9) mit $u_1 - u_2$,
ᴈ zweite mit $v_1 - v_2$, die dritte mit $w_1 - w_2$, addieren und
tegrieren über τ, dann folgt:

$$\int\Big[(u_1 - u_2)\, \Delta (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)\, \Delta (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2)\, \Delta (w_1 - w_2)$$

$$k\left\{(u_1 - u_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial x} + (v_1 - v_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial y} + (w_1 - w_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial z}\right\}\Big] d\tau = 0,$$

er mit Rücksicht darauf, daß:

$$)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right], \\ \Delta v &= \frac{\partial \theta}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \\ \Delta w &= \frac{\partial \theta}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

ch:

$$\int\Big[(1 + k)\left\{(u_1 - u_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial x} + (v_1 - v_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial y} + (w_1 - w_2)\frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial z}\right\}$$

$$(u_1 - u_2)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial z} - \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial x}\right)\right]$$

$$(v_1 - v_2)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial y} - \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y}\right)\right]$$

$$w_1 - w_2)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial z} - \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial y} - \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial z}\right)\right]\Big] d\tau = 0$$

oder nach einer einfachen Greenschen Umformung:

$$12)\quad \int_\tau \Big[(1+k)(\theta_1-\theta_2)^2 + \left\{\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y} - \frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z} - \frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right\}^2\Big] d\tau = 0$$

sobald somit $k+1$ positiv ist, solange also:

$$13)\quad -1 < k < \infty$$

folgt:

$$14)\quad \begin{cases} u_1 - u_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0, \\ w_1 - w_2 = 0 \end{cases}$$

im ganzen Innenraume von ω; damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

§ 4.

Wir gehen nun zur Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe der Methode der successiven Annäherungen über, und zwar gehen wir von den Gleichungen 8) aus. Wir bilden successive die folgenden Funktionen:

$$15)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ \left.\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j + u_{j-1}, \\ v_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j + v_{j-1}, \\ w_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j + w_{j-1}, \end{aligned}\right\} j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

o die $U_j V_j W_j$ die Lösungen des Dirichletschen Problems ei den Randwerten:

$$
6) \quad \left\{ \begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_1 \frac{d\tau}{r}, & U_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\
V_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_2 \frac{d\tau}{r}, & V_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \quad j = 1, 2 \ldots \\
W_0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_3 \frac{d\tau}{r}, & W_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r},
\end{aligned} \right\} \text{ an } \omega
$$

ırstellen.[1] Können wir beweisen, daß:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{j=\infty} \cdot \mathfrak{t}^j \left(\Delta u_j - 2\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0, \\
&\lim_{j=\infty} \cdot \mathfrak{t}^j \left(\Delta v_j - 2\frac{\partial \theta_j}{\partial y} \right) = 0, \\
&\lim_{j=\infty} \cdot \mathfrak{t}^j \left(\Delta w_j - 2\frac{\partial \theta_j}{\partial z} \right) = 0
\end{aligned}
$$

ɪ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung n der Oberfläche, und daß die Reihen:

$$
\sum_0^\infty{}^j \mathfrak{t}^j u_j, \quad \sum_0^\infty{}^j \mathfrak{t}^j v_j, \quad \sum_0^\infty{}^j \mathfrak{t}^j w_j
$$

ınktionen darstellen, die in τ eindeutig und stetig sind und dliche erste Ableitungen besitzen, dann werden diese Funk-

---

[1]) Die Existenz dieser Funktionen $U_j\ V_j\ W_j$, ihre für uns in Beıcht kommenden Stetigkeitseigenschaften, sowie die Formeln:

$$
5') \quad \left\{ \begin{aligned}
\Delta \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}, \\
\Delta \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial y}, \\
\Delta \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} &= -4\pi\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial z}
\end{aligned} \right.
$$

'erden wir noch in diesem § beweisen.

tionen offenbar die Lösungen der gestellten Aufgabe darstell
Wir werden zunächst zeigen, daß die Integrale:

17) $$J_j = \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau$$

die Ungleichungen erfüllen:

18) $$\mathfrak{f}^{2j} \cdot J_j \leqq a \cdot \mathfrak{f}^{2j},$$

wo $\mathfrak{f}$ ein beliebiger echter Bruch ist, a eine endliche Konstan

Es ist in der Tat, wenn wir die Abkürzungen:

19) $$\begin{cases} \mathfrak{u}_j = \dfrac{\partial w_j}{\partial y} - \dfrac{\partial v_j}{\partial z}, \\ \mathfrak{v}_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial z} - \dfrac{\partial w_j}{\partial x}, \\ \mathfrak{w}_j = \dfrac{\partial v_j}{\partial x} - \dfrac{\partial u_j}{\partial y} \end{cases}$$

gebrauchen:

$$\int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau$$

$$= -\int_\tau \Big[u_j \Big\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial x} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial z} \Big) \Big\} + v_j \Big\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial y} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial x} \Big) \Big\}$$

$$+ w_j \Big\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial y} \Big) \Big\} \Big] \, d\tau.$$

$$= -\int_\tau (u_j \Delta u_j + v_j \Delta v_j + w_j \Delta w_j) \, d\tau,$$

$$= -\int_\tau \Big[u_j \Big(\Delta u_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x} \Big) + v_j \Big(\Delta v_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial y} \Big)$$

$$+ w_j \Big(\Delta w_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial z} \Big) \Big] \, d\tau,$$

$$= \int_\tau [\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1} - 2 \theta_j \theta_{j-1}] \, d\tau.$$

somit:

20) $$\begin{cases} \int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau = \int_\tau [-\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} \\ \qquad + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1}] \, d\tau. \end{cases}$$

und hieraus folgt:

$$21)^{1)}\ \int\limits_{\tau}[\theta_j^2+\mathfrak{u}_j^2+\mathfrak{v}_j^2+\mathfrak{w}_j^2]\,d\tau \overline{\overline{<}} \int\limits_{\tau}(\theta_{j-1}^2+\mathfrak{u}_{j-1}^2+\mathfrak{v}_{j-1}^2+\mathfrak{w}_{j-1}^2)\,d\tau$$

also:

$$22)\quad \begin{cases} \mathfrak{k}^{2j} J_j \overline{\overline{<}} \mathfrak{k}^{2j}\int\limits_{\tau}[\theta_j^2+\mathfrak{u}_j^2+\mathfrak{v}_j^2+\mathfrak{w}_j^2]\,d\tau \\ \overline{\overline{<}} \mathfrak{k}^{2j}\int[\theta_0^2+\mathfrak{u}_0^2+\mathfrak{v}_0^2+\mathfrak{w}_0^2]\,d\tau \overline{\overline{<}} a\,\mathfrak{k}^{2j}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{k}$ einen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt.

Wir haben für die Gültigkeit dieser Ableitung nur noch zu begründen, daß bei unseren Voraussetzungen die in der Ableitung benützten Integrale einen Sinn haben, und daß die Greenschen Umformungen berechtigt sind.

Wir bedenken hierzu, daß nach Voraussetzung die Funktionen $F_1\, F_2\, F_3$ in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung ihre absoluten Funktionsdifferenzen

$$\overline{\overline{<}} A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo λ einen ganz bestimmten echten Bruch, A eine endliche Konstante bezeichnen möge. Es sind aus diesem Grunde (Satz I des zweiten Abschnitts der vorangehenden Abhandlung) die zweiten Ableitungen der Raumpotentiale

$$\int\limits_{\tau} F_1 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_{\tau} F_2 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_{\tau} F_3 \frac{d\tau}{r}$$

---

[1]) Nach der bekannten Schwarzschen Ungleichung ergibt sich ja aus 20):

$$\left[\int\limits_{\tau}(\theta_j^2+\mathfrak{u}_j^2+\mathfrak{v}_j^2+\mathfrak{w}_j^2)\,d\tau\right]^2$$
$$< \int\limits_{\tau}(\theta_j^2+\mathfrak{u}_j^2+\mathfrak{v}_j^2+\mathfrak{w}_j^2)\,d\tau \int(\theta_{j-1}^2+\mathfrak{u}_{j-1}^2+\mathfrak{v}_{j-1}^2+\mathfrak{w}_{j-1}^2)\,d\tau.$$

in τ in ähnlicher Weise stetig, somit die zweiten Ableitungen von $u_0 v_0 w_0$ ebenfalls, solange man sich in endlicher, im übrigen beliebig kleinen Entfernung von der Oberfläche hält, und Gleiches folgt successive nach den Formeln 15) für die zweiten Ableitungen von $u_j\ v_j\ w_j$, wenn die θ_j stetige allgemeine Potentialfunktionen sind.[1])

Die Gleichung 20), auf die es uns ankommt, wird durch einen strengen Grenzübergang erhalten, wenn wir zeigen können, daß die ersten Ableitungen der $u_j v_j w_j$ im ganzen Raume eindeutig und stetig sind.

Wir haben also noch zu beweisen, daß die θ_j infolge der Definitionen 15) stetige, allgemeine Potentialfunktionen[1]) des Innenraumes τ und daß alle ersten Ableitungen von $u_j v_j w_j$ im ganzen Innenraume eindeutig und stetig sind.

Wir werden nun in der Tat zeigen, daß die θ_j bei unseren Voraussetzungen stetige, allgemeine Potentialfunktionen und in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 < C_j r_{12}^{\lambda_j}, \quad (0 < \lambda_j < 1),$$

wo C_j bei endlichem j eine endliche, von j abhängige Konstante vorstellt, die natürlich, worauf es uns vorläufig nicht ankommt, möglicherweise mit j unendlich wachsen könnte.[2])

Die Funktionen $U_0\ V_0\ W_0$ haben Randwerte, deren erste Ableitungen (Satz II des II. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung) derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} ihre absoluten Funktionsdifferenzen:

$$< a \cdot \text{abs. Max.}\,(F_1, F_2, F_3) \cdot r_{12}^{A}$$

sind, wo A einen ganz beliebigen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der

[1]) D. h. Lösungen eines Dirichletschen Problems mit stetigen Randwerten θ_j.

[2]) Diese Frage werden wir im späteren Verlauf der Abhandlung noch diskutieren.

Fläche ω und der Wahl der Zahl Λ abhängt. Die Funktionen $U_0\, V_0\, W_0$ sind somit[1]) Potentialfunktionen des Raumes τ, die im ganzen Innenraum derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 desselben in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} \right|_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\Lambda},$$

wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, da ja λ ein ganz bestimmter echter Bruch ist und wir Λ größer als λ wählen können. Außerdem ist:

$$\Delta u_0 = -F_1,$$
$$\Delta v_0 = -F_2,$$
$$\Delta w_0 = -F_3,$$

somit:

$$24) \qquad \Delta \theta_0 = 0, \text{ mit Rücksicht auf } 8'');$$

es ist also θ_0 eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$25) \qquad \text{abs.} \left| \theta_0 \right|_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\Lambda} \overline{<} C_0\, r_{12}^{\lambda_0}, \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \lambda_0 < 1, \\ C_0 \text{ endlich.} \end{array} \right.$$

Es ist nun weiter:

$$26) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - U_1, \\ v_1 &= v_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - V_1, \\ w_1 &= w_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - W_1, \end{aligned} \right.$$

und die ersten Ableitungen der Randwerte der Potentialfunktionen $U_1\, V_1\, W_1$:

[1]) Zusatz 4 zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung.

$$27)\quad \left.\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r}, \\ V_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r}, \\ W_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r} \end{cases}\right\} \text{ an } \omega$$

sind an der Oberfläche ω derart stetig, daß:

$$28)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial U_1}{\partial h}\right|_1^2 \overline{\gtrless} (a\, C_0 + b \text{ abs. Max. } \theta_0)\, r_{12}^{\lambda_0},$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung,[1] a b endlich stanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fl und der Zahl λ_0 abhängen (Satz II des zweiten Abschn vorstehenden Abhandlung). Mit Rücksicht auf den Z zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abha folgt somit, daß die ersten Ableitungen von u_1 v_1 w_1 Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 u genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$29)\quad \text{abs.}\left|\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda_1} < C_1\, r_{12}^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda \quad C_1 \text{ endlich}$$

wo σ eine beliebige Richtung, C_1 eine endliche Ko vorstellt.

Außerdem ist:

$$\Delta u_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta u_0,$$

$$\Delta v_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta v_0,$$

$$\Delta w_1 = -2\frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \Delta w_0$$

somit:

$$30)\qquad \Delta \theta_1 = 0;$$

[1]) $\cos(h_2.r) = \cos(h_1.r) + \varepsilon_1, \ldots$ wo $\varepsilon_1 \gtrless$ endl. Konst. r_{12}.

es ist also θ_1 eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r:

$$31) \qquad \text{abs. } \theta_2 \Big|_1^2 \overline{<} C_1 r_{12}^{\lambda_1}, \quad \Big| \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < 1, \\ C_1 \text{ endlich.} \end{array}$$

In dieser Weise können wir nun weiter gehen und sehen, daß für jedes beliebige endliche j die θ_j stetige, allgemeine Potentialfunktionen sind, deren Stetigkeit in τ die Bedingung 23) erfüllt.

Es folgt auf diese Weise auch die Gültigkeit der Formeln 15') S. 45 für jeden Punkt des Raumes τ in irgendwelcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω. Es folgt schließlich auch successive die Stetigkeit der ersten Ableitungen von $u_j\, v_j\, w_j$ in ganzer Erstreckung des Raumes τ für jedes beliebige endliche j.

Damit sind nun aber alle Schlüsse dieses § streng begründet, und wir können bisher das folgende Resultat aussprechen:

Die durch die Formeln 15) definierten successiven Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ sind mit ihren ersten Ableitungen für jedes beliebige endliche j in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig; die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen, im besonderen die Stetigkeit der stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen θ_j in τ ist derart, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } \theta_j \Big|_1^2 \overline{<} C_j r_{12}^{\lambda_j},$$

wo λ_j einen echten Bruch, C_j eine endliche Konstante vorstellt.

Die Formeln:

$$\Delta \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial x},$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial y},$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial z},$$

bestehen für jedes beliebige endliche j in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω.

Es besteht ferner die Ungleichung:

$$\mathfrak{k}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \overline{\gtrless} a \cdot \mathfrak{k}^{2j},$$

wo a eine von j unabhängige endliche Konstante vorstellt.

§ 5.

Wir suchen jetzt zu beweisen, daß die Funktion θ eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ darstellt, deren Stetigkeit die Bedingung erfüllt:

32) $$\text{abs.} \left| \theta \right|_1^2 \overline{\gtrless} C \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad | \; C \text{ endlich},$$

wenn wir:

33) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\, \theta_1 + \mathfrak{k}^2 \theta_2 + \cdots$$

setzen. Daß diese Reihe innerhalb τ, d. h. in endlicher Entfernung von der Oberfläche ω stets konvergent ist und mit allen Ableitungen innerhalb ω eindeutig und stetig ist, folgt leicht aus der Ungleichung:

$$\mathfrak{k}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \overline{\gtrless} a\, \mathfrak{k}^{2j}.$$

Denn denken wir uns um einen Punkt $(x\, y\, z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$\theta_j(x, y, z) = \frac{3}{4\pi R^3}\int \theta_j\, d\tau,$$

wo das Integral rechts über die Kugel zu erstrecken ist, somit:

$$\mathfrak{r}^j|\theta_j(x,y,z)| \leqq \frac{3\mathfrak{r}^j}{4\pi R^3}\sqrt{\int\theta_j^2\, d\tau \int d\tau} \leqq \frac{3\mathfrak{r}^j}{4\pi R^3}\sqrt{\int_\tau \theta_j^2 d\tau \frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$< \sqrt{\frac{3a}{4\pi R^3}}\,\mathfrak{r}^j$$

oder:

$$34)\qquad |\theta_j|\,\mathfrak{r}^j < \frac{\beta}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{r}^j, \quad \Big|\ \beta \text{ endliche Konstante},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung von der Oberfläche ω darstellt.

Analoge Formeln kann man sofort auch für die ersten, zweiten etc. Ableitungen von θ_j innerhalb ω ableiten.

Für uns ist es aber erforderlich, die Stetigkeit von θ und zwar die Stetigkeit von der Art 32) in ganzer Erstreckung des Gebietes τ zu erweisen, und zu diesem Zwecke müssen wir, ausgehend von der Formel:

$$35)\qquad \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \leqq C_0 r_{12}^{\lambda}, \quad (0 < r_{12} \leqq \sigma), \quad \Big|\ \begin{matrix}\lambda_0 \text{ echter Bruch},\\ C_0 \text{ endliche Konstante},\end{matrix}$$

in den successiven Formeln:

$$36)\qquad \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \leqq C_j r_{12}, \quad (0 \leqq r_{12} \leqq \sigma_j)$$

die Abhängigkeit der Größen $C_j\,\lambda_j\,\sigma_j$ von j näher erforschen.

Wir gehen aus von den Definitionsformeln:

$$37)\qquad \left\{\begin{aligned} u_j &= u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j,\\ v_j &= v_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j, \quad j = 1, 2, \cdots\\ w_j &= w_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j\end{aligned}\right.$$

W_j sind die Potentialfunktionen des Innenra[illegible]
den Randwerten:

$$\left.\begin{aligned} U_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}, \\ V_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}, \\ W_j &= \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega,$$

zur Abkürzung:

39)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} &= [illegible] \frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} &= [illegible] \frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} &= [illegible] \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \end{aligned}\right.$$

gesetzt haben, es ist [illegible] nach der Methode des arith[illegible]schen Mittels[1]:

40)
$$\left\{\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,1} \\ V_j &= \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,2} \\ W_j &= \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,3} \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Es hat in der Tat jedes $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}, \ldots$ nach Satz II des [illegible]schnitts der vorstehenden Abhandlung die Eigenschaft:

$$\text{abs.}\left[\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\right]_1^2 < a \text{ abs. Max. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{A_1}, \quad (0 < r_{12} < \sigma)$$

wo A_1 einen beliebigen echten Bruch vorstellt, a eine endliche Kon[illegible] σ eine Länge, die gar nicht von der Funktion θ_{j-1} abhängig sind. [illegible] hierauf ergibt sich in der Tat 41) mit Hilfe des Satzes I des [illegible]schnitts der vorstehenden Abhandlung, wenn nur $A < A_1$, also überha[illegible] ein beliebiger echter Bruch ist.

wo $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{j,3}$ Potentiale von Doppelbelegungen sind, deren erste Ableitungen nach dem Satze I des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung S. 1 im ganzen Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$41)\quad \text{abs.}\left|\frac{\partial X_{j,1}}{\partial \sigma}\right|_1^2 \overline{\overline{<}}\, A \cdot \text{abs. Max. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{\Lambda}, \ldots \quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma),$$

wo σ eine beliebige Richtung, Λ einen echten Bruch, A eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellt, die in keiner Weise von j abhängig sind, und man kann, wenn man will:

$$42)\qquad \Lambda = \lambda$$

setzen.

Es sind andererseits $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ die Potentialfunktionen des Aussenraumes mit den Randwerten $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ an ω, es ist daher wieder nach der Methode des arithmetischen Mittels:

$$43)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,1},\\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,2},\\ \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,3}, \end{aligned}\right| \text{ im Außenraume},$$

wo die $\Phi_{j,1}$ $\Phi_{j,2}$ $\Phi_{j,2}$ Potentiale von Doppelbelegungen mit denselben Stetigkeitseigenschaften wie $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{,3}$, im besonderen an der Fläche ω, sind.

Da mit Rücksicht auf den Satz I des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung die Funktionen $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}, \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}$ auf der Fläche ω erste tangentiale Ableitungen haben, von solcher

Stetigkeit, das für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial \xi \, \partial h} \right|_1^2 < C_j r_{12}^{\lambda_j}, \ldots (0 < r_{12} \overline{<} a_j),$$

so ist an der Fläche ω nach einem bekannten Satze (Lehrbuch der Potentialtheorie I S. 394):

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_i = \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_a, \ldots$$

somit folgt:

$$44) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial x \, \partial \nu} \right|_a + \Xi_j, \\ \dfrac{\partial V_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial y \, \partial \nu} \right|_a + H_j, \\ \dfrac{\partial W_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial z \, \partial \nu} \right|_a + Z_j, \end{cases}$$

wobei die $\Xi_j \; H_j \; Z_j$ Funktionen vorstellen, deren erste Ableitungen an der Oberfläche ω derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$45) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial \Xi_j}{\partial h} \right|_1^2 < B \,\text{abs. Max.}\, \theta_{j-1} \, r_{12}^{A}, \ldots (0 < r_{12} \overline{<} \sigma).$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung, A einen echten Bruch, B eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellen, die in keiner Weise von j abhängen, und man kann, wenn man will:

$$A = \lambda$$

setzen.

Da $u_j \; v_j \; w_j$ an der Fläche ω verschwinden, ist:

$$\left.\begin{aligned} \theta_j &= \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_j}{\partial \nu} \cos(\nu z), \\ \theta_{j-1} &= \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \text{an } \omega$$

und es folgt aus den Formeln 37):

$$\theta_j = \theta_{j-1} + \left|\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i - \left\{\frac{\partial U_j}{\partial\nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial V_j}{\partial\nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial W_j}{\partial\nu}\cos(\nu z)\right\},$$

$$= \theta_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a + H_j,$$

oder:

$$46)\qquad \theta_j = -\left\{\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + H_j,$$

wo H_j eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche im Abstand r_{12}:

$$47)\qquad \text{abs.}\left|H_j\right|_1^2 < \Gamma \cdot \text{abs. Max. } \theta_{j-1} \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{<} r_{12} < \sigma)$$

Γ eine endliche Konstante, σ eine Länge, die größer ist als eine bestimmte endliche Länge; Γ, σ gänzlich unabhängig von j.

Wir bringen jetzt den Satz IV des II. Abschnitts der vorangehenden Abhandlung über Raumpotentiale, den eigentlichen Schlüsselpunkt für die Lösung der gestellten Aufgabe, zur Anwendung. Besteht für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in der Entfernung r_{12} die Ungleichung:

$$48)\qquad \text{abs.}\left|\theta_{j-1}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} C_{j-1}\, r_{12}^{\lambda_{j-1}}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} < \sigma_{j-1}),$$

so ergibt sich nach dem genannten Satze, den Formeln 46) und 47):

$$49)^{1)}\ \text{abs.}\left|\theta_j\right|_1^2 < \left[\varepsilon_{\sigma_{j-1}} C_{j-1} + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_\delta \sigma_{j-1}}\right)\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right] r_{12}^{\lambda_{j-1}},$$
$$(0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma_{j-1}(1-\delta)),$$

wo δ eine beliebig kleine Zahl, $\varepsilon_{\sigma_{j-1}}$ und δ zwei Konstanten vorstellen, die bezw. mit σ_{j-1} und δ zu Null konvergieren, aber stets von Null verschiedene, bestimmte Werte haben, sobald bezw. σ_{j-1} und δ von Null verschieden sind. ε_δ von j unabhängig.

---

[1]) c_1 c_2 endliche Konstanten, die von j unabh[illegible]

Wir können hieraus sofort die folgenden Schlüsse ziehen: Wir können

$$50)\quad \begin{cases} \lambda_j = \lambda, \\ \sigma_j = \sigma \cdot (1-\delta)^j \end{cases}$$

setzen, wo δ eine beliebig kleine Zahl sein kann, und:

$$51)\quad \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \overline{<} \left(\varepsilon_j C_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta\,\sigma(1-\delta)^{j-1}}\,\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right) r_{12}^\lambda,$$
$$(0 \overline{<} r_{12} < \sigma(1-\delta)^j),$$

wo die Konstanten c und ε_δ von j ganz unabhängig sind und ε_j eine mit j zu Null konvergierende Zahl vorstellt. Wir können jedenfalls, indem wir σ von vornherein genügend klein wählen

$$\varepsilon_j \overline{<} 1$$

machen und die Ungleichung 51) auch so schreiben:

$$52)\quad \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \overline{<} \left(C_{j-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^j}\,\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right) r_{12}^\lambda,$$
$$(0 \overline{<} r_{12} < \sigma(1-\delta)^j),$$

wo E_δ eine Konstante vorstellt, die zwar um so größer ist, je kleiner δ gewählt wird, aber für jedes $\delta \neq 0$ einen bestimmten, von Null verschiedenen, von j unabhängigen Wert hat; wir können dabei δ im übrigen von vornherein beliebig klein wählen.

Diese Formel wird sogleich eine sehr wichtige Rolle spielen. Wir errichten in einem Punkte 0 der Fläche die innere Normale und markieren auf derselben in dem Abstande $\mathfrak{r}_j$ den Punkt 0'. Dann ist:

$$\theta_{j\,0} = \theta_{j\,0'} + \theta_{j}\,|_{0'}^{0}$$

und mit Rücksicht auf 34) und 52):

$$53)\quad \begin{cases} \text{abs.}\,\theta_j < \dfrac{\beta}{\mathfrak{r}_j^{\,3}} + \left(C_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta(1-\delta)^j}\,\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right)\mathfrak{r}_j^\lambda, \\ (0 < \mathfrak{r}_j \overline{<} \sigma(1-\delta)^j), \end{cases}$$

er, wenn wir mit $\Re$ einen echten Bruch

$$\tfrac{1}{2} < \Re < 1 \qquad)$$

zeichnen und

$$\begin{cases} \Re^j \text{ abs. Max. } \theta_j = A_j, \\ \Re^j \cdot C_j = B_j \end{cases} \qquad)$$

zen, so daß:

$$\begin{cases} \text{abs. Max. } \theta_j \Re^j \overline{\gtrless} A_j \\ \text{abs. } |\Re^j \theta_j|_1^2 \overline{\gtrless} B_j r_{12}^\lambda, \quad (0 \overline{\gtrless} r_{12} \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^j), \end{cases} \qquad)$$

erhalten wir die Formeln:

$$\begin{cases} A \overline{\gtrless} \frac{\beta \Re^j}{\mathfrak{r}_j^{\frac{1}{2}}} + \left(B_{j-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^j} A_{j-1}\right) \mathfrak{r}_j^\lambda, \quad (0 \overline{\gtrless} \mathfrak{r}_j \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^j), \\ B_j \overline{\gtrless} B_{j-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^j} A_{j-1}. \end{cases} \qquad)$$

Wir wählen nun δ und einen echten Bruch L so, daß:

$$\Re < L < (1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}} < 1 \qquad)$$

d setzen:

$$\mathfrak{r}_j = \left(\frac{\Re^{\frac{1}{2}}(1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\frac{1}{2}}}\right)^j, \qquad)$$

s ja gestattet ist, da ja:

$$\frac{\Re^{\frac{1}{2}}(1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\frac{1}{2}}} < 1 - \delta;$$

r können dann die beiden Ungleichungen 57) so schreiben:

$$\begin{cases} A_j \overline{\gtrless} \beta \left(\frac{L}{(1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}}}\right)^j + \frac{1}{E_\delta} (B_{j-1}(1-\delta)^{j-1} E_\delta + A_{j-1}) \left(\frac{\Re}{L}\right)^{\frac{1}{2}\lambda j}, \\ B_j \overline{\gtrless} B_{j-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^j} A_{j-1}, \end{cases} \qquad)$$

er, wenn wir mit μ den größeren der beiden echten Brüche

$$\left(\frac{\Re}{L}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{L}{(1-\delta)^{\frac{3}{2\lambda}}}$$

bezeichnen:

$$61)\quad \begin{cases} A_i \gtreqless \left[\beta + \frac{1}{E_\delta}(A_{i-1} + E_\delta(1-\delta)^{i-1}B_{i-1})\right]\mu^i. \\ B_i \gtreqless B_{i-1} + \frac{1}{E_\delta(1-\delta)^i} A_{i-1}. \end{cases}$$

Wir multiplizieren die zweite dieser Ungleichungen m $E_\delta(1-\delta)^i$ und addieren, dann folgt:

$$62)\quad \begin{cases} A_i + E_\delta(1-\delta)^i B_i \gtreqless A_{i-1} + E_\delta(1-\delta)^{i-1}B_{i-1} \\ \qquad + \left[\beta + \frac{1}{E_\delta}(A_{i-1} + E_\delta(1-\delta)^{i-1}B_{i-1})\right]\mu^i, \end{cases}$$

oder, wenn wir:

$$63)\qquad \Gamma_i = A_i + E_\delta(1-\delta)^i B_i$$

setzen:

$$64)\qquad \Gamma_i \gtreqless \Gamma_{i-1} + \left[\beta + \frac{\Gamma_{i-1}}{E_\delta}\right]\mu^i.$$

Wir wenden jetzt den Kunstgriff an, der bereits v Liapounoff[1]) bei einer anderen Gelegenheit mit Erfolg benüt worden ist. Wir schreiben die Ungleichung in der Form:

$$\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta < (\Gamma_{i-1} + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right),$$

dann folgt:

$$\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta < (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right)$$

Das Produkt:

$$65)\qquad Q = \left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots$$

ist konvergent, da $\mu < 1$, und es wird somit:

$$66)\qquad \Gamma_i + \beta \cdot E_\delta < (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\, Q,$$

[1]) Liapounoff, Sur certaines questions qui se rattachent au problèm de Dirichlet (Journ. de math. 1898, S. 278).

so daß:

$$67)\qquad \Gamma_i \gtreqless A,$$

wo A eine bestimmte, endliche, von j unabhängige Konstante vorstellt. Nun ist:

$$\text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i \cdot \theta_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot A_i,$$

$$\mathfrak{k}^i \cdot C_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot B_i,$$

so daß, wenn wir wieder mit m einen echten Bruch bezeichnen:

$$68)\qquad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i \theta_i \gtreqless a \cdot m^i, \\ \mathfrak{k}^i C_i \gtreqless b \cdot m^i, \end{cases} \quad m = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}(1-\delta)}$$

und wir erhalten das wichtige Resultat:

$$69)\qquad \begin{cases} |\mathfrak{k}^i \theta_i| \gtreqless a \cdot m^i, \\ \text{abs.} |\mathfrak{k}^i \theta_i|_1^2 \gtreqless b \cdot m^i r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \gtreqless r_{12} \gtreqless \sigma(1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo m einen echten Bruch vorstellt, a, b endliche, von j unabhängige Konstanten.

Durch die erste Formel 69) wird uns die gleichmäßige Konvergenz der Reihe:

$$70)\qquad \theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\theta_1 + \mathfrak{k}^2\theta_2 + \cdots$$

gewährleistet, und sicher gestellt, daß θ eine in dem ganzen Gebiet τ eindeutige und stetige Funktion der Stelle vorstellt.

Wir verlangen von der Stetigkeit der Funktion θ aber noch mehr, und wir wollen mit Hilfe der zweiten Formel 69) die Behauptung 32) nachweisen.

Wir teilen die Reihe 70) in 2 Teile:

$$71)\qquad \theta = \sum_0^{\nu}{}^i \mathfrak{k}^i \theta_i + \sum_{\nu+1}^{\infty}{}^i \mathfrak{k}^i \theta_i$$

und wählen die Zahl ν genügend groß, so daß:

$$\left| \sum_{\nu+1}^{\infty}{}^j \mathfrak{k}^j \theta_j \right| \gtreqless \text{endl. Konst. } r_{12},$$

wenn r_{12} die Entfernung zweier Punkte 1 und 2 des Raumes vorstellt. Eine solche Zahl ν läßt sich stets finden, da:

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} j\, t^j \theta_j \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } m^\nu;$$

man hat eben nur ν so groß zu machen, daß

72) $$m^\nu \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12};$$

dann ist:

73 a) $$\text{abs.} \left| \sum_{\nu+1}^{\infty} j\, t^j \theta_j \right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12},$$

und:

73 b) $$\text{abs.} \left| \sum_{0}^{\nu} j\, t^j \theta_j \right|_1^2 < \text{ endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \quad (0 \overline{\gtrless} r_{12} \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^\nu)$$

mit Rücksicht auf die zweite Formel 69), und die Bedingung

$$0 \overline{\gtrless} r_{12} \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^\nu$$

kann noch fortgelassen werden, sie ist, wenn nur

$$1-\delta > m$$

ist, was ja stets dadurch erreicht werden kann, daß man von vornherein δ klein genug annimmt, bei der Festsetzung 72) von selbst erfüllt, wenn $r_{12} <$ bestimmte, endliche Konstante $\sigma' (< \sigma)$.

Durch Addition der Formeln 73 a) und 73 b) folgt aber für irgend zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ:

74) $$\text{abs. } \theta \,\big|_1^2 < \text{ endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

und das wollen wir in diesem § beweisen.

Wir haben also das Resultat erhalten:

Die Reihe:

75) $$\theta = \theta_0 + t\,\theta_1 + t^2\,\theta_2 + \cdots \qquad (-1 \overline{\gtrless} t < +1)$$

stellt eine in der ganzen Erstreckung des Raumes τ eindeutige und stetige Funktion dar, und es gelten für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ die Formeln:

76) $$\text{abs. } \theta \,\big|_1^2 < \text{ endl. Konst. } r_{12}^\lambda.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe haben die Eigen-
aaft:

$$) \quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^j \theta_j \overline{\overline{<}} a \cdot m^j, \\ \text{abs.} \mid \mathfrak{k}^j \theta_j \mid_1^2 \overline{\overline{<}} b \cdot m^j \cdot r_{12}^{\lambda}, \ (0 < r_{12} < \sigma(1-\delta)^j), \end{cases}$$

) die a, b endliche, von j unabhängige Konstanten, einen echten Bruch darstellt.

§ 6.

Wir gehen nunmehr zu der Untersuchung der Funktionen $_i\, v_i\, w_i$ über, die successive durch die Gleichungen 15) de-iniert sind.

Es ergiebt sich zunächst wieder aus den Ungleichungen 77) ür die Potentialfunktionen $U_j\, V_j\, W_j$ mit den Randwerten 16) in ω mit Rücksicht auf Satz II und Satz I des I. Abschnitts ler vorangehenden Abhandlung, daß die Reihen:

$$78) \qquad U = \sum_0^{\infty}{}_j\, \mathfrak{k}^j U_j \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1),$$

und

$$79) \qquad \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_0^{\infty}{}_j\, \mathfrak{k}^j \frac{\partial U_j}{ds} \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1),$$

wenn s eine beliebige Richtung vorstellt, für jeden Punkt des Gebietes τ konvergieren, und daß die Reihen U und $\frac{dU}{ds}$ im ganzen Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle vorstellen.

Wir multiplizieren jede der Formeln 15) bezw. mit $\mathfrak{k}'^j$ $0 < \mathfrak{k} < \mathfrak{k}' < 1$) und summieren von 1 bis j, dann folgt:

$$0) \quad \begin{cases} \mathfrak{k}'^j u_j = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i \theta_i \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_\tau F_1 \frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i U_i, \\ \mathfrak{k}'^j v_j = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i \theta_i \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_\tau F_2 \frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i V_i, \\ \mathfrak{k}'^j w_j = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i \theta_i \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_\tau F_3 \frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i W_i, \end{cases}$$

dann folgt, da auch:

$$
81) \quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{f}'^{i}\,\theta_i \overline{\overline{<}}\, a'\,m'^{i} \\ \text{abs. } |\,\mathfrak{f}'^{i}\,\theta_i\,|_1^2 \overline{\overline{<}}\, b'\,m'^{i}\,r_{12}^{1}, \quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma\,(1-\delta')^{i-1}) \end{cases}
$$

wo m' einen echten Bruch bedeutet:

$$
82) \quad \begin{cases} |\,\mathfrak{f}'^{j}\,u_j\,| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\,\mathfrak{f}'^{j}\,v_j\,| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\,\mathfrak{f}'^{j}\,w_j\,| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \end{cases}
$$

und auch:

$$
83) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}'^{j}\,\dfrac{\partial u_j}{\partial s} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ \mathfrak{f}'^{j}\,\dfrac{\partial v_j}{\partial s} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ \mathfrak{f}'^{j}\,\dfrac{\partial w_j}{\partial s} < \text{ endl. Konst.}, \end{cases}
$$

wo s eine ganz beliebige Richtung vorstellt.

Setzen wir jetzt:

$$
84) \quad n = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}'}
$$

so folgt:

$$
85) \quad \begin{cases} |\,\mathfrak{f}^{j}\,u_j\,| < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \\ \mathfrak{f}^{j}\,v_j < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \\ \mathfrak{f}^{j}\,w_j < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \end{cases}
$$

und:

$$
86) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}^{j}\,\dfrac{\partial u_j}{\partial s} < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \\ \mathfrak{f}^{j}\,\dfrac{\partial v_j}{\partial s} < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \\ \mathfrak{f}^{j}\,\dfrac{\partial w_j}{\partial s} < \text{ endl. Konst. } n^{j}, \end{cases}
$$

wo n einen echten Bruch bedeutet, und wir sehen, daß a
die Reihen:

$$u = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j u_j,$$

$$v = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j v_j,$$ ...)

$$w = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j w_j$$

...d:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j \frac{\partial u_j}{\partial s},$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j \frac{\partial v_j}{\partial s},$$ ...)

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{k}^j \frac{\partial w_j}{\partial s}$$

...ganzer Erstreckung des Raumes τ konvergieren und ein-...utige und stetige Funktionen der Stelle darstellen.

Nunmehr können wir das Resultat aussprechen:

Die Reihen 87) stellen, wie behauptet, die Lö-...ungen unserer gestellten Aufgabe dar.

§ 7.

Wir haben bisher über die gegebenen Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ ... den Differentialgleichungen 7) vorausgesetzt, daß sie der ...ifferentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \qquad \text{...)}$$

...d daß sie in ganzer Erstreckung des Gebietes τ derart stetig ...nd, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Ent-...rnung r_{12}:

...) abs. $| f_1 \,|_1^2 \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $r_{12}^\lambda, \ldots \mid \lambda$ echter Bruch;

...r den Beweis ist aber von Wichtigkeit nur, daß die durch ...e Formeln:

$$91)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0 \end{cases}$$

definierten $u_0\ v_0\ w_0$ in τ mit ihren ersten Ableitungen ei und stetig sind, und daß die stetige, allgemeine Pot funktion:

$$92)\quad \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

in τ derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in ge kleiner Entfernung r_{12}:

$$93)\quad \text{abs.}\ |\theta_0|_1^2 \lesseqgtr \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

und daß schließlich in τ in irgend welcher im übrigen b kleinen Entfernung von ω:

$$94)\quad \begin{cases} \Delta \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial x}. \\ \Delta \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial y}. \\ \Delta \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt zunächst weiter zeigen, daß diese Vo setzungen 92), 93), 94) auch erfüllt sind, wenn

$$95)\quad \begin{cases} f_1 = X + \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ f_2 = Y + \dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ f_3 = Z + \dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

XYZ wieder in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{96)} \qquad \text{abs.} \mid X \mid_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots$$

und Θ eine stetige, allgemeine Potentialfunktion vorstellen soll, von der wir nur wissen, daß ihre Stetigkeit in τ die Bedingung erfüllt:

$$\text{97)} \qquad \text{abs.} \mid \Theta \mid_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$$

für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}.

Es folgt nämlich in diesem Falle aus den Formeln 91) in derselben Weise, wie 46) aus 37) folgte,

$$\text{98)} \quad \begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau X \frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau Y \frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau Z \frac{d\tau}{r}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{d\tau}{r}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial \Theta}{\partial y}\frac{d\tau}{r}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{d\tau}{r}\right] - \dfrac{\partial U_0}{\partial x} - \dfrac{\partial V_0}{\partial y} - \dfrac{\partial W_0}{\partial z}, \\ \dfrac{2\theta_0}{1-\mathfrak{k}} = -\Theta - \left\{\Theta - \dfrac{1}{\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial \nu^2}\displaystyle\int_\tau \Theta \frac{d\tau}{r}\right|_\omega\right\} + H_0, \end{cases}$$

wo H_0 eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{99)} \qquad \text{abs.} \mid H_0 \mid_1^2 \overline{<} \Gamma \text{ abs. Max. } (\Theta, X, Y, Z) \cdot r_{12}^{\varDelta},$$

wo $\varDelta$ ein ganz beliebiger echter Bruch, Γ eine endliche Konstante ist, die nur von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches $\varDelta$ abhängig ist, den man z. B. gleich λ setzen kann.

Es ist ferner θ_0 nach wie vor eine stetige Potentialfunktion des Raumes, die nunmehr nach dem Satze IV des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung[1]) im ganzen Raume τ bei genügend kleinem r_{12} der Bedingung 93) genügt.

[1]) Diese Berichte S. 28.

Auch die Bedingungen 94) sind erfüllt, da $X\,Y\,Z$ Bedingung 96) erfüllen und Θ nach Voraussetzung eine allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ ist.

Der Beweis bleibt also nach wie vor richtig, wenn von der Form 95) sind.

Es bleibt jetzt schließlich noch der Fall zu behandeln,

$$F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0, \tag{100}$$

aber eine derart stetige Funktion des Raumes τ ist, daß zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung

$$\text{abs.}\,|\,F\,|_2^1 \lesseqgtr \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}. \tag{101}$$

Wir setzen in diesem Falle:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi(1+k)}\int_\tau F\frac{d\tau}{r} \tag{102}$$

und:

$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Potentialfunkti von τ mit den Randwert

$$\left|\begin{array}{ll} u = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{U} + u', & \mathfrak{U} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r}, \\ v = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{V} + v', & \mathfrak{V} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r}, \\ w = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{W} + w' & \mathfrak{W} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} \end{array}\right| \tag{103}$$

dann ist:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = (1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta u' + k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right) \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = (1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \Delta v' + k\dfrac{\partial\theta'}{\partial y} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right) \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = (1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta w' + k\dfrac{\partial\theta'}{\partial z} + k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right) \end{array}\right. \tag{104}$$

und die neuen Funktionen $u'\,v'\,w'$ haben die Differenti gleichungen zu erfüllen:

$$105)\begin{cases}\Delta u'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x}=\left[X-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right],\\ \Delta v'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial y}=\left[Y-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right],\\ \Delta w'+k\dfrac{\partial\theta'}{\partial z}=\left[Z-(1+k)\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right]+\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\Theta-k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right];\end{cases}$$

das sind aber wieder Differentialgleichungen von der früheren Form 7), bei denen die Funktionen $f_1\,f_2\,f_3$ die Form 95) haben. Dieser Fall ist damit auf den früheren zurückgeführt.

§ 8.

Theorem. Es sei vorgelegt das folgende Problem:

Wir suchen drei in einem von einer stetig gekrümmten Fläche ω begrenzten Raume τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$106)\qquad\begin{cases}\Delta u+k\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-X-\dfrac{\partial\Theta}{\partial x},\\ \Delta v+k\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=-Y-\dfrac{\partial\Theta}{\partial y},\\ \Delta w+k\dfrac{\partial\theta}{\partial z}=-Z-\dfrac{\partial\Theta}{\partial z},\end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$107)\qquad\left.\begin{array}{l}u=\bar{u},\\ v=\bar{v},\\ w=\bar{w},\end{array}\right\}\text{ an }\omega,$$

wo $X\,Y\,Z\,\Theta$ gegebene Funktionen der Stelle des Raumes τ, $\bar{u}\;\bar{v}\;\bar{w}$ gegebene Funktionen der Oberfläche ω sein sollen, und zwar machen wir über diese gegebenen Funktionen die folgenden Voraussetzungen:

$X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ sollen in τ derart (ab-lungsweise) stetig sein, daß für zwei Punkte 1 u (der Teilgebiete) in genügend kleiner Entfernung

108) $\quad \text{abs.}\,|X|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \ldots \mid \lambda$ echter Bruch,

Θ soll eine stetige allgemeine Potentialfunktion Raumes τ sein, deren Stetigkeit im Raume τ der dingung:

109) $$\text{abs.}\,|\Theta|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda$$

bei genügend kleinem r_{12} genügt.

$\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}$ sollen mit ihren ersten Ableitungen st sein, und zwar sollen die ersten Ableitungen de stetig sein, daß für je zwei Punkte 1 und 2 der Flä in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

110) $$\text{abs.}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial h}\right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

wenn $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung stellt.

Dieses Problem hat, wenn der Parameter k Ungleichung erfüllt:

111) $$-1 < k < +\infty$$

stets ein und nur ein Lösungssystem, das man folgende Weise erhalten kann:

Man führe entsprechend den Ausführungen § 1 und des § 7 das Problem auf das Grundproblem

112) $$\left.\begin{array}{l} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -f_3, \end{array}\right\} \text{in } \tau, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} =$$

[1]) $\cos(h_2, r) = \cos(h_1, r) + \varepsilon_1, \ldots, \quad \varepsilon_1 <$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

$$
3)\qquad \left.\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}\right\} \text{an } \omega
$$

rück und bilde dann successive die folgenden Funk-
nen:

$$
4)\qquad \begin{cases}
u_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\
v_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \qquad k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}} \\
w_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\
\left.\begin{aligned}
u_j &= u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j, \\
v_j &= v_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j, \\
w_j &= w_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j,
\end{aligned}\right\} j = 1, 2, \ldots,
\end{cases}
$$

die $U_j\ V_j\ W_j$ die Potentialfunktionen des Raumes τ
rstellen mit den Randwerten:

$$
5)\qquad \left.\begin{cases}
U_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, \quad U_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\
V_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r}, \quad V_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \quad j = 1, 2 \ldots \\
W_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, \quad W_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}
\end{cases}\right\} \text{an } \omega,
$$

nn erfüllen die Funktionen:

$$
116)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \sum_0^\infty{}^{j}\, k^j u^j, \\
v &= \sum_0^\infty{}^{j}\, k^j v^j, \\
w &= \sum_0^\infty{}^{j}\, k^j w^j
\end{aligned}
\right.
$$

in τ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω die Differentialgleichung II und an der Fläche die Randbedingungen 113). Die Funktionen $u\, v\, w$, die durch die Reihen 116) definiert werden, sind mit ihren ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig.

Es ist von Interesse, dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat in der Potentialtheorie zu vergleichen:

Es sei V die Lösung der Differentialgleichung:

$$\Delta V = -f(x, y, z),$$

welche in τ eindeutig und stetig ist und an ω die stetig Randwerte

$$\bar{V}$$

annimmt; ist die in τ gegebene Funktion f derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Gebietes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\ \left| f \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\ r_{12}^\lambda, \quad \lambda \text{ echter Bruch}$$

und ist $\bar{V}$ mit seinen ersten Ableitungen auf ω eindeutig und stetig, und zwar die ersten Ableitungen derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\ \left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial h} \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\ r_{12}^\lambda,$$

wo $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt, dann kann man aussagen, daß V mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Gebiete τ eindeutig und stetig ist.

Es folgt dies leicht aus dem Satze IX meiner Abhandlung I zur Potentialtheorie[2]) mit Hilfe eines bekannten Theoremes von Hölder.[3])

Die Analogie wird noch größer, wenn man für V die folgende Differentialgleichung in τ fordert:

$$\Delta V = -X - \frac{\partial \Theta}{\partial s},$$

wo s eine beliebige feste Richtung, X eine gegebene Funktion von $(x\,y\,z)$, Θ eine gegebene, stetige allgemeine Potentialfunktion in τ vorstellt, bei den Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\,|\,X\,|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\,|\,\Theta\,|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \end{array}\right|\ \lambda \text{ echter Bruch.}$$

Auch in diesem allgemeineren Falle ist V mit seinen ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung von τ eindeutig und stetig.

---

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots;\ |\varepsilon_1| <$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

[2]) Abhandulngen zur Potentialtheorie (Berlin, F. Dümmlers Verlag, 1901—1902).

[3]) Daß bei der Voraussetzung über f:

$$\Delta \int_\tau f \frac{d\tau}{r} = -4\pi f.$$

Anhang.

Die von mir in dieser Abhandlung gegebene Meth beruht auf der Umformung der Gleichungen des elastisc Gleichgewichts 7) auf die Form 8):

$$\Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -F_1,$$

$$\Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -F_2, \quad k = \frac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}},$$

$$\Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -F_3,$$

und der Reihenentwickelung von $u\ v\ w$ nach Potenzen von Die Methode gilt für

$$-1 < \mathfrak{k} < 1$$

also für den Bereich von k:

$$-1 < k < +\infty.$$

Nach dem hier gegebenen Beweise kann man nun a die früheren Entwickelungen, durch welche von Lauricella u E. und F. Cosserat die Lösung versucht wurde, in den Grenz in denen diese Entwickelungen konvergent sind, sicher stell

Wir wollen die Entwickelung, die von der Form:

$$117)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1 \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -f_3 \end{cases}$$

ausgeht, nach Potenzen von k als die Entwickelung von Lau cella bezeichnen.

Man setzt bei derselben:

$$
)\qquad
\begin{cases}
u = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{i}\, k^i\, u_i, \\[2ex]
v = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{i}\, k^i\, v_i, \\[2ex]
w = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{i}\, k^i\, w_i,
\end{cases}
$$

bei die Funktionen $u_i\ v_i\ w_i$ in der folgenden Weise ge-
det werden:

$$
19)\qquad
\begin{cases}
u_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \dfrac{d\tau}{r} - U_0, \\[2ex]
v_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \dfrac{d\tau}{r} - V_0, \\[2ex]
w_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \dfrac{d\tau}{r} - W_0, \\[2ex]
u_i = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{i-1} \dfrac{d\tau}{r} - U_i, \\[2ex]
v_i = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{i-1} \dfrac{d\tau}{r} - V_i, \\[2ex]
w_i = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{i-1} \dfrac{d\tau}{r} - W_i,
\end{cases}
$$

$_i\ V_i\ W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Rand-
erten:

$$
20)\quad
\left.
\begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, & U_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r} \\
V_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r}, & V_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}, \quad i = 1, 2 \ldots \\
W_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, & W_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}
\end{aligned}
\right\}\ \text{an } \omega.
$$

Für:

121) $$1 < k < +1$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$k^{2i} J_i, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

in der:

122) $$J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

123) $$k^{2i} J_i \overline{\gtrless} a \cdot k^{2i}, \mid a \text{ endliche Konstante.}$$

Andererseits geht die Formel 46) S. 57, auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

124) $$\theta_i = -\frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a\right) + H_i$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

125) $$\begin{cases} \text{abs.} \, |\theta_i|_1^2 < \frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i) C_{i-1} + \frac{c}{\varepsilon_3 \sigma (1-\delta)^{i-1}} \text{abs. Max.} \theta_{i-1}\right] r_1 \\ (0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma (1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Vergrößerung von i unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 11) und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Lauricellasche Entwickelung für:

$$-1 < k < +1$$

die Lösung des Problems darstellt.

Wir wollen schließlich die Entwickelung, die von der Form

126) $$\begin{cases} \Delta u - \varkappa\left(\Delta u - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -\varphi_1, & \varphi_1 = (1-\varkappa) f_1, \\ \Delta v - \varkappa\left(\Delta v - \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -\varphi_2, & \varphi_2 = (1-\varkappa) f_2, \quad k = \frac{\varkappa}{1-\varkappa} \\ \Delta w - \varkappa\left(\Delta w - \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -\varphi_3, & \varphi_3 = (1-\varkappa) f_3, \end{cases}$$

ɪgeht, nach Potenzen von $\varkappa$ als die Entwickelung von Cosserat ;eichnen. Man setzt bei derselben:

$$
7)\quad \begin{cases} u = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i u_i, \\ v = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i v_i, \\ w = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i w_i, \end{cases}
$$

ɪbei die Funktionen $u_i\, v_i\, w_i$ in der folgenden Weise gebildet ɪrden:

$$
8)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ u_i = u_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - U_i, \\ v_i = v_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - V_i, \quad i = 1, 2 \dots \\ w_i = w_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - W_i, \end{cases}
$$

$_i\, V_i\, W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Rand- ərten:

$$
29)\quad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r}, & U_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \\ V_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r}, & V_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \quad i = 1, 2 \dots \\ W_0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r}, & W_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \theta_{i-1} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega.
$$

Für:

$$130)\qquad -1 < \varkappa < +1$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$\varkappa^{2i} J_i,$$

in der:

$$131)\qquad J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

$$132)\qquad \varkappa^{2i} J_i < a \cdot \varkappa^{2i}, \quad | \ a \text{ endliche Konstante.}$$

Andererseits geht die Formel 46), auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

$$133)\quad \theta_i = + \frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}\right|_{-}\right) + H_i.$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

$$134)\quad \begin{cases} \text{abs. } \theta_i \,|\, < \frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i)\, C_{i-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta \, \sigma (1-\delta)^{i-1}} \text{abs. Max.} \theta_{i-1}\right] r_{12}^i \\ (0 < r_{12} < \sigma (1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Verkleinerung von i unter jede beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 127 und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Cosseratsche Entwicklung für:

$$-1 < \varkappa < +1, \quad -\frac{1}{2} < k < +\infty$$

die Lösung des Problems darstellt.

Unser Beweis kann also auch dazu dienen, die Lauricellaschen und Cosseratschen Entwickelungen streng zu begründen, die Entwickelung von Lauricella für:

$$-1 < k < +1$$

die von Cosserat für:

$$-\frac{1}{2} < k < +\infty .$$

Unsere Entwickelung ist die allgemeinste, sie gibt die Lösung des Problems für:

$$-1 < k < +\infty .$$

Für manche Untersuchungen wird noch die folgende Bemerkung von Wichtigkeit sein:

Es ergibt sich nach den Ausführungen des § 5:

$$\left.\begin{array}{r} |\mathfrak{k}^i \theta_i| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A \cdot m^i, \\ \text{abs.} |\mathfrak{k}^i \theta_i|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } A m^i r_{12}^{\lambda}, \\ (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma(1-\delta)^i), \end{array}\right| m < 1,$$

wenn

$$\text{abs.} |\theta_0|_1^2 \overline{\overline{<}} C_0 r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} < \sigma)$$

und A den größeren der beiden Werte C_0 und abs. Max. θ_0 darstellt; dabei sind die hier auftretenden endlichen Konstanten lediglich von der Gestalt der Oberfläche ω abhängig.

Bei der Definition von

$$\theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

durch die drei ersten Formeln 15) S. 44 ist mit Rücksicht auf Satz II des II. Abschnittes und Zusatz 4 zu III des I. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung

$$A < \text{abs. Max.} (F_1, F_2, F_3) \cdot \text{endl. Konst.},$$

und es folgt somit:

$$135) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. abs. Max.} (F_1, F_2, F_3), \\ \text{abs.} |\theta|_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max.} (F_1, F_2, F_3)\, r_{12}^{\lambda}, \\ \qquad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma'), \quad (\sigma' < \sigma), \end{array} \right.$$

wobei λ ein ganz beliebiger echter Bruch sein kann und endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktion $F_1\, F_2\, F_3$ abhängen.

Die Lösungen u, v, w des Problems 7) S. 41 erfüllen a stets die Ungleichungen:

$$136)\begin{cases}\text{abs. Max.}(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{\overline{<}} \text{endl. K. abs. Max.}(f_1, f_2, \\ \text{abs.} \,|\, \theta \,|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3)\end{cases}$$

wenn $D_1 u$, $D_1 v$, $D_1 w$ irgend welche erste Ableitungen u, v, w bezeichnen.

Ist

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0,$$

so ergeben die Ausführungen des § 7 (Formeln 103), 105)) m Rücksicht auf das soeben gefundene Resultat 136) die U gleichungen:

$$137)\begin{cases}\text{abs. Max.}(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{\overline{<}} \text{endl. K. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3, \\ \text{abs.} \,|\, \theta \,|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. abs. Max.}(f_1, f_2, f_3, F)\end{cases}$$

wobei nach wie vor λ ein beliebiger echter Bruch ist und endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktion $f_1\, f_2\, f_3$ abhängen.

Die Formeln 137) sind noch einer weiteren Verallgemein rung fähig, worauf ich bei einer späteren Gelegenheit zurüc kommen werde.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 3. Februar 1906.

1. Herr H. v. Seeliger hält einen Vortrag: „Über die sogenannte absolute Bewegung."

Der Verfasser behandelt vom Standpunkt des Astronomen die in den letzten Jahrzehnten vielbesprochene Frage nach einer einwandfreien Definition des Trägheitsgesetzes. Er stellt sich dabei entschieden auf die Seite der Relativisten, welche die Annahme einer absoluten Bewegung als sinnlos und demzufolge als unzulässig erklären. Es wird im einzelnen ausgeführt, daß weder die logische Fassung noch die tatsächlichen, astronomischen Verwendungen der mechanischen Grundsätze zur Aufgabe des Prinzips der Relativität nötigen.

2. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Professors der Geodäsie an der Technischen Hochschule Dr. Max Schmidt vor: „Die südbayerische Dreieckskette, eine neue Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und der Basis von Oberbergheim."

Dieselbe behandelt die vorläufigen Berechnungsergebnisse einer in den letzten Jahren im Auftrag der K. B. Kommission für die internationle Erdmessung bei der Akademie der Wissenschaften von ihm bearbeiteten Hauptdreieckskette.

Diese Kette großer Dreiecke, deren Eckpunkte teilweise auf den Berggipfeln des Nordrandes der bayerischen Alpen

gelegen sind, und die als wichtigsten Hauptpunkt die Spitze des nördlichen Turmes der Frauenkirche in München enthält, erstreckt sich längs des 48. Breitenparallels in eine Ausdehnung von 200 km von der württembergischen Grenze im Westen bis zu den Salzburger Bergen im Osten.

Sie bildet ein bisher noch fehlendes Zwischenglied einer zum Studium der Krümmungsverhältnisse des Erdsphäroids dienenden Längengradmessung auf dem 48. Breitenparallel, welche sich von Brest am atlantischen Ozean über Paris, Straßburg, München und Wien bis nach Astrachan am Kaspischen Meere ausdehnt. Die wissenschaftlichen Ergebnisse dieses großen Unternehmens werden nach seiner Vollendung als Ganzes durch das Zentralbureau der Internationalen Erdmessung in Potsdam bearbeitet und veröffentlicht werden.

3. Herr Siegfried Günther überreicht eine Abhandlung des Dr. med. Karl E. Ranke in Arosa: „Anthropologische Beobachtungen aus Zentralbrasilien." Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Der Verfasser, welcher die von jeglicher Kultur unberührten Wilden des Xingu-Gebietes aus eigener Anschauung genau kennt, hat sich drei Stämme zu seinen Untersuchungen ausersehen, deren Sprachen bereits auf ihre Verschiedenheit hinweisen, und hat letztere auf Grund genauer anthropometrischer Bestimmungen, die er eingehend beschreibt, völlig außer Zweifel gesetzt. Dabei fallen auch interessante Streiflichter auf die Beziehungen zwischen den südamerikanischen Indianern und — einerseits — den Kaukasiern, sowie — andererseits — der mongoloiden Rasse. Endlich hat die Arbeit auch methodologischen Wert, indem sie umfassend die Hilfsmittel der von Fechner und Bravais begründeten, neuerdings von englischen und amerikanischen Forschern weiter geförderten mathematischen Statistik zur Anwendung bringt.

4. Herr Alfred Pringsheim legt eine Arbeit des Herrn rofessor Edmund Landau in Berlin: „Über die Grundlagen er Theorie der Fakultätenreihen" vor.

Der Verfasser beweist zunächst die bereits bekannten grundgenden Sätze mit neuen, wesentlich vereinfachten Hilfsmitteln ıd fügt eine Anzahl neuer Sätze hinzu, die insbesondere die takte Bestimmung der geradlinigen Konvergenz-Grenze und ıs Verhalten der durch solche Reihen definierten analytischen unktionen auf jener Konvergenz-Geraden zum Inhalt haben. ußerdem behandelt er noch verschiedene andere mit den 'akultätenreihen verwandte Reihen und gewisse in naher eziehung stehende bestimmte Integrale.

Über die sogenannte absolute Bewegung.

Von **Hugo Seeliger.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

Für Galilei, den Begründer der wissenschaftlichen Mechanik, konnte kein Zweifel darüber entstehen, was er bei der Betrachtung von Bewegungsvorgängen als das Ruhende und Feste betrachten mußte, um voraussichtlich zu der einfachsten theoretischen Zusammenfassung der beobachteten Erscheinungen zu gelangen. Für ihn kamen fast ausschließlich nur Vorgänge in Betracht, die sich in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche abspielten und so erschien es von selbst als das Natürlichste, die Erdoberfläche zum Bezugssystem zu wählen, in Bezug auf welches alle irdischen Bewegungen zu betrachten seien. Ein glücklicher Umstand war es hierbei, daß für die damals bebekannten mechanischen Vorgänge die getroffene Wahl des Bezugssystems vollständig genügte, denn nur so war es ihm möglich, in den verwickelten Bewegungserscheinungen das im mechanischen Sinne Wesentliche von dem zu trennen, was als unwesentlich anzusehen ist. Das Resultat dieser Abstraktion, die zu den bewunderungswürdigsten gehört, die der menschliche Geist ausgeführt hat, war die Aufstellung des alle Bewegungsvorgänge beherrschenden Trägheitsgesetzes: ein sich selbst überlassener Punkt bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Was man darunter, trotz des Fehlens einer genaueren Definition, zu verstehen hat, konnte zu Galileis Zeiten niemandem zweifelhaft sein und insoweit auch in der Folgezeit keine Erscheinungen bekannt wurden, die eine genauere Festlegung der Begriffe verlangten, war da-

mit in der Tat die Grundlage zur Entwicklung der Mechanik gegeben. Denn die weiterhin entwickelten Begriffe der Beschleunigung, der Kraft, der Masse u. s. w. schließen sich an das Trägheitsgesetz an und sind durch dasselbe bedingt.

Als man aber die Folgerungen aus der kopernikanischen Lehre zu ziehen anfing, als man die Bewegungen der irdischen Körper — z. B. den freien Fall derselben — als auf einer rotierenden und um die Sonne sich bewegenden Erde vor sich gehend aufzufassen begann, als dann Newton die Bewegung der Himmelskörper auf Grundlage der Galileischen Forschungen zu untersuchen unternahm, mußte sich das Bedürfnis nach einer strengeren Begriffsbildung einstellen. Newton war der erste, der dieses Bedürfnis erkannte und eine strenge Definition des den mechanischen Betrachtungen zu Grunde zu legenden Koordinatensystems für nötig hielt. So trat zuerst bei ihm die fundamentalste Frage der Mechanik auf: in Bezug auf welches Koordinatensystem bewegt sich ein sich selbst überlassener Punkt geradlinig und gleichförmig? Die Antwort Newtons ist in den bekannten und viel zitierten Sätzen enthalten:[1])

I. Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich, vermöge ihrer Natur, gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äußeren Gegenstand . . . .

II. Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich. Der relative Raum ist ein Maß oder ein beweglicher Teil des ersteren. . . .

III. Der Ort ist ein Teil des Raums, welchen ein Körper einnimmt und nach Verhältnis des Raumes entweder absolut oder relativ.

IV. Die absolute Bewegung ist die Übertragung des Körpers von einem absoluten Ort nach einem anderen absoluten Ort; die relative Bewegung die Übertragung von einem relativen Ort nach einem anderen relativen Ort. — Die weiteren Er-

---

[1]) Newtons mathematische Prinzipien etc. Übersetzt von Wolfers, 1872, S. 25.

klärungen Newtons sind dahin zusammenzufassen, daß die absolute Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes geradlinig und gleichförmig sei. Das gesuchte Koordinatensystem ist also ein absolutes oder ein mit dem absoluten festen Raum fest verbundenes.

Bei diesen wenig befriedigenden Festsetzungen Newtons haben sich die meisten Forscher auf dem Gebiete der Mechanik beruhigt. Dies muß einigermaßen befremden, da man kaum zaudern wird, E. Mach[1]) Recht zu geben, wenn er die absolute Zeit Newtons einen müßigen metaphysischen Begriff nennt und ebenso L. Lange,[2]) der die absolute Zeit und den absoluten Raum als „Gespenster" bezeichnet.

Die Geschichte der Versuche sich mit den Newtonschen Fiktionen in der einen oder anderen Weise abzufinden, ist äußerst interessant. Sie ist sehr eingehend von H. Streintz[3]) und L. Lange dargestellt worden. Danach hat es seit Newton bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts zwar nicht an Versuchen zur Klarlegung gefehlt, aber es waren doch nur wenige Mathematiker und Physiker, die sich in dieser Richtung betätigt haben. Allgemeineres Interesse haben die sich hier darbietenden Fragen nicht gefunden und eine wirkliche Aufklärung ist tatsächlich nach keiner Richtung hin erfolgt. Eine Wendung wurde erst durch eine kleine Schrift von Carl Neumann[4]) hervorgerufen, die auf die Notwendigkeit einer strengeren Fassung der mechanischen Grundsätze aufmerksam machte.

---

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 5. Aufl., Leipzig 1904, S. 238.

[2]) Von L. Lange werden im folgenden drei Arbeiten zitiert:

a) Über das Beharrungsgesetz. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 1885.

b) Die Geschichte u. Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipz. 1886.

c) Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung. Wundts Philosophische Studien, Bd. XX, 1902.

[3]) H. Streintz, Die physikal. Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

[4]) Carl Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Leipzig 1870.

Diese wichtige Schrift Neumanns enthält eine Fülle klarer und eindringender Gedanken, denen eine unbedingte Gültigkeit zuerkannt werden muß, auch wenn man sich seinen schließlichen Zusammenfassungen nicht anschließen kann.

Nahezu gleichzeitig und unabhängig von C. Neumann setzen die Bemühungen E. Machs ein, dem alle unsere Erkenntnisse beherrschenden Prinzipe der Relativität auch in diesem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem hat man den besprochenen Fragen ein intensives Interesse entgegengebracht, wie eine recht umfangreiche Literatur darüber beweist. Diese ist in zusammenhängender Weise von Mach und L. Lange in den zitierten Schriften kritisch besprochen worden. Eine sehr vollständige Übersicht über diese Literatur hat A. Voß[1]) gegeben.

Wenn ich im folgenden auf den Gegenstand näher eingehe, so geschieht dies in der Absicht, den Versuch zu machen, das Fazit aus den Aufklärungen zu ziehen, die die letzten drei Jahrzehnte gebracht haben, und zwar in einer dem Gedankenkreise des Astronomen entsprechenden Weise. In der Astronomie ist die Überlegung dieser fundamentalen Fragen von großer Wichtigkeit und die richtige Interpretation mancher Tatsachen, welche die neuere Fixsternkunde kennen gelehrt hat, hängt hiervon ab. Die Schriften von L. Lange und Mach stellen gewiß befriedigende und richtige Lösungen der aufgetauchten Schwierigkeiten dar, wie sich im folgenden auch ergeben wird. Trotzdem hoffe ich, daß die folgenden Bemerkungen als nicht ganz unnötig sich erweisen werden.

Bisher hat sich, soviel ich weiß, von astronomischer Seite nur Herr E. Anding[2]) mit dem Verhältnis des in der Astronomie gebrauchten empirischen Koordinatensystem zu dem sogenannten „absoluten" der Mechanik beschäftigt. Es ist selbstverständlich, daß im folgenden sich nahe Berührungspunkte mit den ausgezeichneten Auseinandersetzungen Herrn E. Andings herausstellen werden.

---

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV.
[2]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band VI_2. 1905.

1.

Ausgehend von der Einsicht, daß ebenso wie nur relative Lagen der Objekte gegeneinander, auch nur relative Bewegungen beobachtet und gemessen werden können, muß man vielgebrauchte Begriffe wie: absoluter Raum, absolute Bewegung, absolute Ruhe als sinnlos erklären. Wenn auch natürlich nichts dagegen einzuwenden ist, daß man der Kürze wegen diese Worte gebraucht, solange man sie nur wirklich faßbaren Begriffen zuordnet, so ist es doch, wie L. Lange betont, ratsam, etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen und jene Worte gänzlich zu vermeiden. Es soll demzufolge das Newtonsche „absolute" Koordinatensystem, einem sehr passenden Vorschlage L. Langes gemäß „Inertialsystem" genannt werden. Ebenso soll „Inertialzeit" „Inertialbewegung" materiell mit dem übereinstimmen, was Newton durch das Beiwort absolut bezeichnen wollte.

Die Frage, welche vorliegt, geht also dahin: wie ist das Newtonsche Inertialsystem vom Standpunkt der Relativität aus zu definieren? Wir sagen „Newtonsches Inertialsystem", weil dieselben Grundlagen festgehalten werden sollen, welche sich beim Aufbau der heutigen Mechanik nach jeder Richtung bewährt haben. Im wesentlichen kommen diese auf den materiellen Inhalt des Galilei-Newtonschen Trägheitsgesetzes hinaus. Notwendig ist dieser Standpunkt keineswegs, denn niemand wird die Möglichkeit leugnen, andere Systeme der Mechanik aufstellen und ausbauen zu können. Zweifelhaft bleibt es nur, ob man auf anderem Wege zu einer ebenso einfachen Zusammenfassung der Bewegungstatsachen gelangen kann, wie der heutigen Mechanik gelungen ist.

Mit der Forderung nach einer logisch einwandfreien Definition eines Inertialsystems darf die nach der tatsächlichen Festlegung eines solchen, z. B. gegen den Fixsternhimmel oder gegen ein System ausgewählter Sterne, nicht vermengt werden. Denn diese Festlegung kann unabhängig von einer vorangehenden Definition dadurch bewerkstelligt werden, daß einfachere Bewegungsvorgänge verfolgt werden, in denen Richtungen auf-

treten, welche nach den weiteren Entwicklungen der Mechanik in einem Inertialsystem unveränderlich sind. Mit diesen Richtungen also bilden die Achsen eines Inertialsystems unveränderliche Winkel, und wenn man jene gegen die Fixsterne festlegt, so ist dasselbe mit den Inertialaxen geschehen. Dieser Weg ist schon von Newton, allerdings in sozusagen umgekehrter Richtung, vorgezeichnet worden. Denn er hat gezeigt, und dieses Resultat als wichtig hervorgehoben, daß in seinem „absoluten" System sowohl die Apsidenlinien als auch die Ebenen der Planetenbahnen festliegen, wenn selbstverständlich von den störenden Einwirkungen der anderen Planeten abgesehen wird. Die Richtungen von der Sonne nach den Perihelien und Aphelien, ebenso wie die Durchschnittslinien der Planetenbahnen mit irgend einer von ihnen erlauben demnach die Lage eines Inertialsystems gegen ein beliebiges empirisches, etwa durch die Fixsterne definiertes System zu bestimmen. Man kann auch andere astronomisch verfolgbare Erscheinungen, wie die aus der Rotationstheorie ableitbaren Veränderungen der Lagen von Rotationsachsen hierbei benutzen, doch sind solche Modifikationen des Verfahrens prinzipiell unwesentlich. Wesentlich bleibt die Möglichkeit einer Festlegung mechanischer Inertialsysteme gegen empirische auf Grund der Newtonschen Entwicklungen. In erweiterter Fassung hat neuerdings Carl Neumann[1]) diesen Newtonschen Ansatz in überaus klarer Weise auseinandergesetzt und auch die Ausführungen Herrn Andings weisen in gleicher Richtung.

Faßt man die Frage von diesem empirischen Standpunkt, so erscheint die Forderung nach einer streng logischen Definition des Inertialsystems als weniger wichtig. Man schiebt dann allerdings das Rätselhafte und Mysteriöse im absoluten System Newtons beiseite, ohne es erklären zu wollen. Es ist nun zwar denkbar, daß sich mancher durch dieses Verfahren befriedigt fühlen könnte, aber der Meinung, daß die Annahme der ab-

[1]) Carl Neumann, Über die sogenannte absolute Bewegung. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904.

luten Zeit und des absoluten Raumes „weitaus“ als die beste und einfachste zu gelten habe, wie neuerdings ein sehr hervorragender Mathematiker behauptet hat, muß auf das entschiedenste entgegengetreten werden. Denn diese Annahme ist sinnlos, liegt außerhalb aller Erfahrung und erlaubt gar keine bestimmte Fassung. Will man der unbequemen Frage nach der Bedeutung des Trägheitsgesetzes aus dem Wege gehen, so kann man dies nur, wie erwähnt, durch die Bestimmung der Lage des sogenannten absoluten Koordinatensystems gegen ein empirisch gegebenes. Man verzichtet so allerdings auf eine Diskussion der Grundlagen der Mechanik, gibt sich aber dann wenigstens keiner Selbsttäuschung hin. Stellt man sich aber nicht auf diesen wenig befriedigenden Standpunkt, so drängt sich uns von selbst die Frage auf: wie kommt es, daß sich Geister wie Lagrange, Laplace u. a. mit der Fiktion eines absoluten Raumes befreunden konnten, was bedeutete ihnen dieser an sich inhaltsleere Begriff? Carl Neumann hat nun von Neuem auf die bekannte Stelle in der Mécanique céleste von Laplace aufmerksam gemacht, in der von einem „espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière“ die Rede ist. Dieser Ausspruch, dem man ähnliche Aussprüche anderer berühmter Mathematiker und Physiker an die Seite stellen könnte, läßt kaum einen Zweifel aufkommen darüber, daß hier der Raum als eine objektiv gegebene Realität, ausgestattet mit irgendwelchen bestimmten Eigenschaften mathematischer oder physikalischer Natur, angesehen wird. Man darf hierin nicht etwa den Hinweis auf die Vorstellungen der modernen Physik erblicken, welche im Äther den Vermittler oder Erzeuger aller physikalischen Vorgänge sieht. Gelänge es wirklich, wovon wir noch weit entfernt sind, alle Bewegungen durch Beziehungen zu dem Äther zu erklären, so wäre allerdings damit jede Schwierigkeit in der Definition des Trägheitsgesetzes behoben, zugleich hätte sich aber das Prinzip der Relativität glänzend bewährt. Die hier allein in Betracht gezogene heutige Mechanik hat mit solchen Beziehungen nichts zu tun und der räumlich gedehnte Äther ist eben nicht der Raum, sondern

reales Ding. Der Raum soll frei sein von allem, was irgend wie an das, was wir Materie nennen, erinnert. Denn erst wenn von allen materiellen Objekten, von allen ihren physikalischen Eigenschaften abstrahiert wird, soll der Newtonsche absolute Raum übrig bleiben. Für den Naturforscher geht aber bei diesem Prozesse alles ohne Rest verloren und der Begriff verflüchtigt sich zu nichts. Deshalb ist gegen die Konstruktion dieses monströsen Gedankendings, Raum genannt, von mancher Seite schon protestiert worden und es ist in der Tat nicht abzusehen, wie diesem Protest auf wirksame Weise begegnet werden könnte. Offenbar handelt es sich hier um ein Mißverständnis, demzufolge man die Art und Weise, wie man räumliche Beziehungen von Objekten zueinander aufstellen kann, verwechselt mit Eigenschaften, die man einem objektiv nicht existierenden, aber in dieser Weise angesehenen absoluten Raum andichtet. Aus diesem Mißverständnis sind auch zum Teil jene merkwürdigen Interpretationen zu erklären, welche manche Mathematiker den Entwicklungen der sogenannten nichteuklidischen Geometrie angedeihen lassen, denen doch eine ganz andere Bedeutung zukommt.

Die Schwierigkeiten, welche sich einer Begriffsbestimmung des Inertialsystems im Sinne des Prinzips der Relativität, an dem unter allen Umständen festgehalten werden muß, entgegenstellen, beruhen, wie Newton ausführlich erörtert hat, auf dem Auftreten von Zentrifugalkräften bei Rotationen. Die von ihm angeführten einfachen Beispiele sind auch jetzt noch die einleuchtendsten und sie können deshalb bei Auseinandersetzungen wie die vorliegenden, nicht gut umgangen werden. Ehe mit einigen Worten auf sie eingegangen wird, möge eine von Carl Neumann erwähnte instruktive Eventualität besprochen werden.

Ein flüssiger, um eine Achse rotierender homogener Körper wird die Gestalt eines Ellipsoids annehmen. Denkt man sich nun außer dieser rotierenden Masse alle übrigen Weltkörper des Universums vernichtet, so würden nur die in relativer Ruhe zu einander befindlichen Teilchen des Körpers vorhanden sein. Da also alle vorhandenen Teilchen in relativer Ruhe sind, könnten

auch, wenn die Rotation etwas rein Relatives wäre, keine Zentrifugalkräfte mehr vorhanden sein und mit ihrem Verschwinden müßte die Abplattung des rotierenden Körpers aufhören. L. Lange[1]) bemerkt demgegenüber, daß das Trägheitsgesetz gar nicht behauptet, daß die relative Ruhe der Teile eines materiellen Komplexes schon das Auftreten von Zentrifugalkräften verhindert, sondern nur die Ruhe gegen ein Inertialsystem. Im übrigen ist die Ausführung des Neumannschen Gedankenexperiments, um einen Ausdruck von E. Mach[2]) zu gebrauchen, nur dann zulässig, wenn angenommen wird, daß nur die Relativität der Bewegung gegen beliebig ausgewählte Massen in Frage kommt, was doch gewiß niemand behaupten wird. Im vorliegenden Falle werden die für die Definitionen wesentlichen Körper, nämlich die weit entfernten kosmischen Massen, wie noch gezeigt werden wird, fortgelassen und die unwesentlichen, nämlich die zu einer flüssigen im Gleichgewichte befindlichen Masse vereinten also in einer nahen physikalischen Verbindung miteinander stehenden, beibehalten. Die in Frage kommenden Definitionen verlieren ihre Bedeutung und es ist keineswegs merkwürdig, daß die Anwendung von nunmehr inhaltsleer gewordenen Begriffen zu Widersprüchen und Schwierigkeiten führt. Hätte man aber von vornherein nur einen isolierten, um eine Achse rotierenden Körper und gar keine anderen Massen, nach denen irgend eine Orientierung vorgenommen werden könnte, so würde sich die Mechanik auf einem solchen Körper ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Prinizpe der Relativität aufbauen lassen. Indessen wäre es vermutlich eine äußerst schwierige Aufgabe gewesen, unter solchen Umständen Ordnung in die Bewegungserscheinungen zu bringen, und niemand kann wissen, wie sich hier die Mechanik entwickelt hätte. Ein besonders ingeniöser Kopf wäre vielleicht auf den Versuch verfallen, alle Ortsveränderungen auf ein Koordinatensystem zu beziehen, dessen eine Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, deren Lage also etwa durch die kleinste Dimension des Körpers bedingt ist,

[1]) Abhandlung b) S. 123. [2]) E. Mach. S. 301.

während die beiden darauf senkrechten Achsen im Äquator mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gegen die im Äquator gelegenen Teile des Weltkörpers sich drehen. So wären die ersten Grundlagen zu einer Mechanik in unserem Sinne gegeben gewesen, wobei nach keiner Richtung die Nötigung zur Annahme irgendwelcher „absoluter" Drehungen oder dergleichen aufgetreten wäre. Ähnliche Überlegungen könnte man anstellen, wenn nur zwei Körper, die sich umeinander bewegen, vorhanden wären. Doch haben diese und ähnliche Betrachtungen keinen besonderen Wert, denn wie Mach öfters hervorgehoben hat, die Mechanik ist eine rein empirische Wissenschaft, die sich nur auf Grund der wirklich gemachten Erfahrungen gerade so entwickelt hat, wie es tatsächlich geschehen ist.

Die obenerwähnten Beispiele Newtons betreffen das vielbesprochene „Wasserglas" und die zwei etwa durch einen Faden miteinander verbundenen Kugeln. Wird ein Glas mit Wasser um eine Achse gedreht, so krümmt sich die Wasseroberfläche immer mehr mit zunehmender Drehgeschwindigkeit und derselbe Erfolg kann nicht etwa dadurch erreicht werden, daß man das Glas ruhen läßt, und die Umgebung in Drehung versetzt. Der Faden der beiden Kugeln erhält mit zunehmender Drehgeschwindigkeit zunehmende Spannung und man könnte aus der mit einem Kraftmesser gemessenen Spannung die Größe der Rotationsgeschwindigkeit, die sich dann als eine „absolute" erweisen soll, berechnen. Die Beweiskraft dieser Anordnungen für das Vorhandensein einer absoluten Rotation fällt aber in sich zusammen, wenn es gelingt, ein Inertialsystem aus dem Prinzip der Relativität zu definieren.

Mach[1]) bezeichnet mit Recht die Anordnung mit dem Wasserglas, wenn dieses ruhend angenommen, hingegen die ganze Umgebung, also auch der Fixsternhimmel, rotierend gedacht wird, als unausführbar und deshalb nichtssagend. Wenn er aber weiter[2]) sagt: „Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und

[1]) Mechanik, S. 253. [2]) Mechanik, S. 253.

massiger und zuletzt mehrere Meilen dick würden. Es liegt nur der eine Versuch vor und, wir haben denselben mit den übrigen uns bekannten Tatsachen, nicht aber mit unseren willkürlichen Dichtungen in Einklang zu bringen", so lassen sich doch wohl nicht unbegründete Einwendungen dagegen erheben. Soll mit dem Angeführten gesagt sein, daß wir niemals mit Sicherheit über das hinausgehen können, was beobachtet und im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin erklärt worden ist, indem wir immer gefaßt sein müssen, auf eine Tatsache zu stoßen, die eine Modifikation der bestehenden Theorie nötig machen könnte, so ist dies allerdings ein etwas rigoroser Standpunkt, dessen Zulässigkeit indessen nicht bestritten werden kann. Hält man sich aber an den Wortlaut, so müßte man eine erhebliche Veränderung in den quantitativen Verhältnissen allein, gegenüber denen, welche bei der Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen zu Gebote standen, als eine vollständig neue Situation betrachten, deren Erklärbarkeit durch die Theorie keineswegs wahrscheinlich sei. Gäbe man dies zu, dann wären z. B. sehr viele Resultate der Mechanik des Himmels sehr schwach begründet. Die auf dem Erdkörper mit gewissen Theorien in Übereinstimmung gefundenen Resultate werden uns z. B. nicht berechtigen, dieselbe Theorie auf die soviel größeren Himmelskörper, wie Sonne oder Jupiter, anzuwenden, der Nachweis, die Rotation der Sonne könne nur eine kleine Abplattung ihrer Oberfläche hervorrufen, falls sie als flüssig angenommen werden darf, wäre hinfällig u. s. f. Sicherlich würde dieser allzu rigorose Standpunkt auf die Entwicklung der Mechanik des Himmels nicht günstig einwirken und ich meine, er wäre auch in Rücksicht auf die bisherigen Erfahrungen, die wohl ausnahmslos nachträglich ähnliche Extrapolationen bestätigt haben, nicht gerechtfertigt.

An die eben besprochene Äußerung Machs knüpfen B. und J. Friedländer[1]) an. Ohne, wie mir scheint, die sonstigen Klarstellungen Machs und namentlich auch Langes genügend zu

[1]) B. u. J. Friedländer, Absolute oder relative Bewegung? Berlin 1896.

würdigen, wollen sie das Trägheitsgesetz in einem anderen Prinzip zusammenfassen: alle Massen streben danach, ihren Bewegungszustand nach Geschwindigkeit und Richtung aufrecht zu erhalten. Ohne genauere Verfolgung im einzelnen, die die Verfasser nicht versuchen, sind solche Sätze viel zu unbestimmt und es ist wohl kaum möglich, ihre Richtigkeit zu beurteilen. Im besten Falle, nämlich wenn es, was mir nicht sehr wahrscheinlich scheint, gelänge, in dieser oder ähnlicher Weise die Grundlagen der Mechanik herzustellen, käme es nach den Vorschlägen der Verfasser in letzter Instanz auf die Einführung von Kräften hinaus, die von den relativen Geschwindigkeiten abhängen und auch die Gesetze der Massenanziehung müßten durch dementsprechende Zusatzglieder vervollständigt werden. Der Sinn der von den Herren F. in Angriff genommenen Experimente kann wohl kaum anders gedeutet werden. Diese Experimente selbst suchen nach einem Einfluß schnell rotierender, verhältnismäßig großer Massen — als solche wurde ein großes Fabriksschwungrad genommen — auf eine möglichst nah aufgestellte Drehwage. Für die vorliegenden Fragen wäre der Nachweis solcher Einwirkungen — der bisher nicht gelungen ist —, wie mir scheint, erst dann von Bedeutung, wenn gezeigt werden könnte, daß diese Einwirkungen nicht von der Drehgeschwindigkeit gegen ein Inertialsystem, sondern tatsächlich von der relativen Geschwindigkeit gegen die Drehwage abhängen. Die Versuche müßten demnach eine Genauigkeit besitzen, die wohl gänzlich außerhalb des Bereiches des Erreichbaren liegen dürfte.

2.

Ich habe schon oben die Meinung ausgesprochen, daß durch die Arbeiten von Mach und L. Lange die Aufgabe, das Trägheitsgesetz aus dem Prinzip der Relativität zu erklären, im wesentlichen als gelöst zu betrachten ist. Es scheinen sich auch andere dieser Auffassung anzuschließen, wie u. a. aus den ähnliche Tendenzen wie Lange verfolgenden [illegible]

ollen Aufsätzen von Mac Gregor[1]) hervorgeht. Die wichtigen esultate L. Langes verdienen aber unter allen Umständen ehr, als bisher, bekannt zu werden, auch was ihre mathe-atische Begründung betrifft. Anschließend an ein Referat[2]) ald nach Erscheinen der Langeschen ersten Schrift werde ch im folgenden eine Begründung der Langeschen Sätze geben. ie Darstellung folgt selbstverständlich dem Gedankengange anges, benützt aber im einzelnen etwas abgeänderte Entwick-ungen.

In den Gleichungen, welche die Transformation von einem echtwinkligen Koordinatensystem $\Xi Y Z$ zu einem anderen X, Y, Z, vermitteln:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \delta + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ \eta &= \delta_1 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \\ \zeta &= \delta_2 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ommen 6 voneinander unabhängige Koeffizienten vor. Die Zeit t soll zunächst in einer ganz willkürlichen Skala gemessen werden, so daß sie nichts anderes als eine vierte Variable bedeutet, durch welche die Bewegungsvorgänge mitbestimmt werden. Bewegt sich im System $\Xi Y Z$ ein Massenpunkt auf einer beliebigen Kurve mit beliebiger Geschwindigkeit, so werden $\xi \eta \zeta$ gegebene Funktionen von t sein. Aus (1) folgt dann sofort, daß es unendlich viele Systeme $X Y Z$ gibt, in Bezug auf welche dieser Punkt eine vorgeschriebene Kurve mit vorgeschriebener Geschwindigkeit beschreibt. Erst wenn 2 Punkte in beiden Systemen gegebene Bahnen mit gegebenen Geschwindigkeiten beschreiben sollen, wäre die Lage und Bewegung des einen Systems gegen das andere im allgemeinen bestimmt, da dann 6 Größen 6 Gleichungen zu genügen haben. Es sollen nun nur geradlinige Bahnen betrachtet werden. Nimmt man zu-

[1]) Mac Gregor, On the fundamental hypotheses of abstract dynamics. anada, R. Soc. Trans. vol X, 1892, ferner: On the hypotheses of dynamics. hilos. Mag. 5. ser., vol. 36, 1893.

[2]) Vierteljahresschrift der Astr. Gesellsch., Band 28.

erst an, daß n Punkte im System XYZ sich in vorgeschriebenen Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x^{(n)} = A_n z^{(n)} + C_n \\ y^{(n)} = B_n z^{(n)} + D_n \end{array}\right. ; \quad n = 0, 1 \ldots, n-1 \Bigg\} \qquad (2)$$

bewegen sollen, so sind also die Größen A, B, C, D gegeben, während ihre Bewegung im System $\Xi Y Z$ ebenfalls beliebig gegeben ist, so daß $\xi \eta \zeta$ bekannte Funktionen der Zeit sind. Für jeden Wert von t müssen dann $3n$ Gleichungen (1) und $2n$ Gleichungen (2) erfüllt sein, denen die 6 Transformationskoeffizienten und $3n$ Koordinaten zu genügen haben. Die Erfüllung der Bedingungen ist im allgemeinen nur möglich, wenn

$$5n < 3n + 6 \text{ oder } n \leqq 3$$

Man kann demnach im allgemeinen ein System XYZ so bestimmen, daß in ihm 3 beliebig bewegte Punkte vorgeschriebene Gerade beschreiben. Für diesen Fall schreiben wir die Gleichungen der gegebenen Geraden besser in der Parameterdarstellung

$$\begin{array}{l|l|l} x = a + b\,\varphi(t) & x' = a' + b'\varphi' & x'' = a'' + b''\varphi'' \\ y = a_1 + b_1\varphi(t) & y' = a_1' + b_1'\varphi' & y'' = a_1'' + b_1''\varphi'' \\ z = a_2 + b_2\varphi(t) & z' = a_2' + b_2'\varphi' & z'' = a_2'' + b_2''\varphi'' \end{array} \qquad (3)$$

Gegeben sind also die Koeffizienten a, b.. die Funktionen $\xi \eta \zeta, \xi' \ldots \xi''$, während die Funktionen $\varphi \varphi' \varphi''$, $\alpha \beta \delta \ldots$. zu bestimmen sind. Da es sich, weil die Orthogonalitätsbedingungen vom 2. Grade sind, um nichtlineare Gleichungen handelt, ist die Bestimmung nicht eindeutig, sie kann auch zu imaginären Werten führen. Aus den 9 Gleichungen (1) kann man die 6 Transformationskoeffizienten eliminieren. Die sich so ergebenden 3 voneinander unabhängigen Gleichungen erhält man am einfachsten dadurch, daß man das von den drei Punkten in jedem Zeitmoment gebildete Dreieck betrachtet. Dasselbe ist erst durch alle 3 Seiten gegeben und diese drei Seiten müssen in den beiderlei Systemen dieselbe Länge haben.

Die 3 im allgemeinen voneinander unabhängigen Gleichungen sind also:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\ (\xi-\xi'')^2+(\eta-\eta'')^2+(\zeta-\zeta'')^2 &= (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2\\ (\xi'-\xi'')^2+(\eta'-\eta'')^2+(\zeta'-\zeta'')^2 &= (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Führt man mit (3) die $\varphi\varphi'\varphi''$ ein, so erscheinen diese für jedes t durch 3 quadratische Gleichungen bestimmt. Denkt man sich die $\varphi\varphi'\varphi''$ etwa als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes, so muß dieser zugleich auf 3 Oberflächen 2. Grades liegen. Danach gibt es höchstens 8 zusammengehörige Werte $\varphi\varphi'\varphi''$. Bildet man nun aus (1) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi-\xi' &= \alpha(x-x')+\alpha_1(y-y')+\alpha_2(z-z')\\ \xi-\xi'' &= \alpha(x-x'')+\alpha_2(y-y'')+\alpha_2(z-z'')\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

wozu noch noch hinzutritt

$$1=\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2$$

so ergeben sich für jedes Wertsystem $\varphi\varphi'\varphi''$ zwei Lösungen für $\alpha\alpha_1\alpha_2$ etc. und ähnlich für $\beta\beta_1\beta_2$. Denn die ersten beiden Gleichungen geben α_1 und α_2 als lineare Funktionen von α und die 3. Gleichung ist dann vom 2. Grade in Bezug auf α.

Zu jedem Wertsystem $\alpha\alpha_1\alpha_2$ gehört aber nur ein Wertsystem $\beta\beta_1\beta_2$, denn es ist

$$\begin{aligned}\eta-\eta' &= \beta(x-x')+\beta_1(y-y')+\beta_2(z-z')\\ \eta-\eta'' &= \beta(x-x'')+\beta_1(y-y'')+\beta_2(z-z'')\\ 0 &= \beta\cdot\alpha+\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2\end{aligned}$$

und die β bestimmen sich also eindeutig aus den $\alpha\alpha_1\alpha_2$.

Ganz ähnliches kann für die Bestimmung des $\gamma\gamma_1\gamma_2$ und auch der $\delta_1\delta_1,\delta_2$ ausgesagt werden, so daß es also höchstens 16 Koordinatensysteme gibt, die den gestellten Bedingungen entsprechen. Natürlich können einige der Lösungen imaginär werden und es können auch, da hier die Bestimmungen für die einzelnen Zeitmomente ausgeführt werden, reelle Lösungen mit

der Zeit imaginär werden und umgekehrt. Es ist wohl kaum nötig, zu erwähnen, daß die Bestimmung der a aus (5) unbestimmt wird, wenn die 3 Punkte in XYZ in einer Geraden liegen, welcher Fall also auszuschließen ist.

Man kann also auch für 3 sich selbst überlassene Punkte, die sich in Bezug auf ein willkürliches Koordinatensystem ΞYZ irgendwie in bekannter Weise bewegen, ein Koordinatensystem XYZ gegen ΞYZ so festlegen, daß sich diese 3 Punkte in vorgeschriebenen Geraden bewegen und zwar gibt es nur eine relative kleine Zahl solcher Systeme.

Der letzte Zusatz setzt noch voraus, daß die Gleichungen (4) voneinander unabhängig sind, was wohl im allgemeinen, aber nicht in allen besonderen Fällen stattfindet. Sind die Gleichungen (4) nicht unabhängig voneinander, dann gibt es unendlich viele gesuchte Systeme, die Aufgabe ist unbestimmt. Die Unabhängigkeit der Gleichungen (4) voneinander wird dadurch ausgedrückt, daß man (3) in (4) einsetzt, die $\varphi\varphi'\varphi''$ als unabhängige Variable betrachtet und die Funktionaldeterminante Δ der 3 Funktionen von $\varphi\varphi'\varphi''$, welche in (4) vorkommen, gleich Null setzt. Man setze zur Abkürzung

$$\Sigma a = a + a_1 + a_2,\ \Sigma a' = a' + a_1' + a_2',\ \Sigma ab = ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ etc.}$$

so schreiben sich die rechten Seiten von (4)

$$\Sigma(a'-a)^2 + 2\varphi' \Sigma(a'-a)b' - 2\varphi \Sigma(a'-a)b$$
$$-2\Sigma bb'\varphi\varphi' + \varphi'^2 \Sigma b'^2 + \varphi^2 \Sigma b^2$$
$$\Sigma(a''-a)^2 + 2\varphi'' \Sigma(a''-a)b'' - 2\varphi \Sigma(a''-a)b$$
$$-2\Sigma bb''\varphi\varphi'' + \varphi''^2 \Sigma b''^2 + \varphi^2 \Sigma b^2$$
$$\Sigma(a''-a')^2 + 2\varphi'' \Sigma(a''-a')b'' - 2\varphi \Sigma(a''-a')b'$$
$$-2\Sigma b'b''\varphi'\varphi'' + \varphi''^2 \Sigma b''^2 + \varphi'^2 \Sigma b'^2$$

und wenn man weiter abkürzt:

$$\begin{array}{l|l|l} A = \Sigma ab + \varphi \Sigma b^2 & B = \Sigma a'b' + \varphi' \Sigma b'^2 & C = \Sigma a''b'' + \varphi'' \Sigma b''^2 \\ A_1 = \Sigma a'b + \varphi' \Sigma bb' & B_1 = \Sigma a''b' + \varphi'' \Sigma b'b'' & C_1 = \Sigma ab'' + \varphi \Sigma bb'' \\ A_2 = \Sigma a''b + \varphi'' \Sigma bb'' & B_2 = \Sigma ab' + \varphi \Sigma bb' & C_2 = \Sigma a'b'' + \varphi' \Sigma b'b'' \end{array}$$

wird

$$= \begin{vmatrix} A - A_1 & B - B_2 & 0 \\ A - A_2 & 0 & C - C_1 \\ 0 & B - B_1 & C - C_2 \end{vmatrix} = -(A - A_1)(B - B_1)(C - C_1) + (A - A_2)(B - B_2)(C - C_2)$$

Offenbar ist $\Delta \equiv 0$, wenn

$$b' = k\,b,\ b_1' = k\,b_1,\ b_2' = k\,b_2$$
$$b'' = k'b,\ b_1'' = k'b_1,\ b_2'' = k'b_2$$

.h. wenn die Geraden parallel zueinander sind. Diese Be-
ingung ist also gewiß hinreichend. Daß sie aber auch not-
endig ist, kann man folgendermaßen beweisen. Soll $\Delta = 0$
in für alle möglichen Werte der $\varphi\,\varphi'\,\varphi''$, so kann man par-
ell nach den einzelnen φ diffenzieren.

Differenziert man log Δ partiell nach φ, so wird:

$$\frac{\Sigma b^2}{A - A_1} - \frac{\Sigma b b''}{C - C_1} = \frac{\Sigma b^2}{A - A_2} - \frac{\Sigma b b'}{B - B_2}$$

Differentiiert man weiter nach φ'':

$$\frac{(A - A_2)^2}{\Sigma b^2} = \frac{(C - C_1)^2}{\Sigma b''^2}$$

ıd durch nochmalige Differentiation nach φ ergibt sich sofort:

$$\frac{\Sigma b^2}{A - A_2} = - \frac{\Sigma b b''}{C - C_1}$$

ne Gleichung, die für jedes φ'' erfüllt sein muß, woraus man
ıdet:

$$\Sigma b^2\, \Sigma (a'' - a) b'' = \Sigma b b'' (a'' - a) b$$
$$\Sigma b^2\, \Sigma b''^2 = (\Sigma b b'')^2$$

Die letzte Gleichung ausführlich geschrieben lautet:

$$(b^2 + b_1^2 + b_2^2)(b''^2 + b_1''^2 + b_2''^2) = (b b'' + b_1 b_1'' + b_2 b_2'')^2$$

Setzt man nun

$b'' =$ $\qquad$ $b_2'' =$

so wird

$$b^2 b_1^2 (k-\lambda)^2 + b^2 b_2^2 (\mu - k)^2 + b_1^2 b_2^2 (\mu - \lambda)^2 = 0$$

eine Gleichung, die für reelle und von 0 verschiedene b nur erfüllt werden kann durch $k = \lambda = \mu$.

In derselben Weise wird sich nachweisen lassen, daß die Gleichung $\varDelta = 0$ die Bedingung nach sich zieht:

$$b' = k_1 b;\; b_1' = k\, b_1;\; b_2' = k_1 b_2$$

womit die Notwendigkeit der obigen Bedingung nachgewiesen erscheint.

Wenn aber durch die drei sich selbst überlassenen Punkte ein Koordinatensystem mit beschränkter Vieldeutigkeit dadurch definiert ist, daß in ihm die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, so ist dieses System noch kein Inertialsystem. Als solches soll vielmehr ein System gelten, in Bezug auf welches sich beliebig viele sich selbst überlassene Punkte geradlinig bewegen. Es wird sich empfehlen, die Definition eines Inertialsystems, wie L. Lange tut, durch Konstruktion eines recht einfachen Falles zu bewerkstelligen. Danach sollen drei Massenpunkte genommen werden, die gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen von einem Punkte ausgehen und sich selbst überlassen werden. Ein Koordinatensystem, in Bezug auf welches dann die 3 Bahnkurven gerade Linien sind, ist, wie leicht zu zeigen, ein Inertialsystem. Die Voraussetzungen erlauben, die Möglichkeit eines solchen Ansatzes natürlich vorausgesetzt, anzunehmen

$$\xi^{(n)} = B^{(n)}\, t$$
$$\eta^{(n)} = B_1^{(n)}\, t$$
$$\zeta^{(n)} = B_2^{(n)}\, t$$

wo für n kein, ein oder 2 Striche zu setzen sind. Es kann dabei t in irgend einer Skala angesetzt sein. Ebenso wird man in (3) alle a gleich Null setzen dürfen. Dann schreibt sich die erste Gleichung (4)

$$(B'-B)^2+(B_1'-B)^2+(B_2'-B)^2=\left(b'\frac{\varphi'}{t}-b\frac{\varphi}{t}\right)^2+\left(b_1'\frac{\varphi'}{t}-b_1\frac{\varphi}{t}\right)^2+\left(b_2'\frac{\varphi'}{t}-b_2\frac{\varphi}{t}\right)^2$$

und ganz ähnlich die beiden anderen. Die Auflösung gibt unter allen Umständen

$$\varphi = m\,t\,;\ \varphi' = m'\,t\,;\ \varphi'' = m''\,t$$

wobei die m Konstanten sind. Ebenso wird die Auflösung von (5) für die Richtungskosinusse $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ konstante Werte ergeben, während sich die $\delta\,\delta_1\,\delta_2$ als lineare Funktion von t darstellen.

Für jeden weiteren sich selbst überlassenen Punkt werden jetzt die Koordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ als lineare Funktionen von t, also

$$\xi = A + B\,t\,,\ \eta = A_1 + B_1\,t\,,\ \zeta = A_2 + B_2\,t$$

anzusetzen sein und daraus folgt dann, wenn man die soeben gefundene Form der Transformationskoeffizienten in (1) berücksichtigt, daß $x\,y\,z$ ebenfalls lineare Funktionen von t sind.

Auf Grund der ausgeführten Entwicklungen erweisen sich nun, wie von selbst klar ist, die Aufstellungen L. Langes nach jeder Richtung hin als zulässig und wohlbegründet. Ich führe sie hier wörtlich an:

Definition I. Inertialsystem heißt ein jedes Koordinatensystem von der Beschaffenheit, daß mit Bezug darauf drei vom selben Raumpunkt nach verschiedenen Richtungen projizierte und dann sich selbst überlassene Punkte $P\,P'\,P''$ auf drei beliebigen, in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden dahinschreiten.

Theorem I. Mit Bezug auf ein Inertialsystem ist die Bahn jedes beliebigen vierten sich selbst überlassenen Punktes gleichfalls geradlinig.

Über die Bedeutung der 4. Variablen, der Zeit t, ist bisher noch nichts ausgesagt worden. Man kann sich nun unbedenklich der von Carl Neumann gegebenen Aussage anschließen: „Zwei materielle Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen bleibt, bewegen sich (in einem Inertialsystem) in solcher Weise, daß gleiche Wegabschnitte des einen immer gleichen Wegabschnitten des anderen entsprechen“, und gleichen Weg abschnitten werden gleiche Zunahmen der Variablen t zugeordnet, wo t das, was wir die Zeit in einer gleichförmig ver-

laufenden Skala gemessen nennen, ist. Die Einwendun
die H. Streintz hiergegen erhoben hat, sind nach meiner Mein
unwesentlich und gegenstandslos. Dann ergeben sich folg
Sätze, deren logisch musterhafte Fassung man ebenfalls L. La
verdankt.

Definition II. Inertialskala heißt eine jede Zeits
in Bezug auf welche ein sich selbst überlassener auf ein Inert
system bezogener Punkt gleichförmig fortschreitet.

Theorem II. In Bezug auf eine Inertialzeitskala ist je
beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inert
bahn gleichförmig bewegt.

Die Langesche Konstruktion des Inertialsystems ist sel
verständlich eine Idealkonstruktion, die aber das logisch B
dürfnis nach jeder Richtung vollkommen befriedigt und
Prinzip der Relativität wahrt, denn tatsächlich ist jede Bez
nahme auf etwas Absolutes gänzlich verschwunden.

Es ist von einigen Seiten angewendet worden, daß der s
selbst überlassene Punkt noch einer Definition bedarf, d
doch als solcher, erst durch die Geradlinigkeit seiner Bah
Inertialsystem erkennt werden kann. Indessen darf nicht üb
sehen werden, daß man zu dem Begriff des sich selbst üb
lassenen Punktes auch gelangen kann, wenn man den Kr
begriff zunächst in anderer Weise festlegt und dann den s
selbst überlassenen Punkt als einen solchen definiert, der v
keinen Kräften angegriffen wird. Erfahrungsgemäß sind
alle Kraftwirkungen in der Natur an das Vorhandensein v
Massen gebunden. Wo Kraftwirkungen nachweisbar sind,
auch Massen in größeren oder kleineren Entfernungen da
umgekehrt, wo Massen in der Nähe sind, haben wir Kr
wirkungen anzunehmen. So wird sich strenge genommen nirg
im Univerum eine Stelle finden, wo das Ideal eines sich sel
überlassenen Punktes anzutreffen wäre. Ähnliches gilt
allen Teilen der Naturwissenschaften, wo gewisse Idealvor
erst durch mehr oder weniger weit ausgeführte Abstrakt
geschaffen werden müssen. So werden wir hier durch A
straktion den Begriff eines isolierten Massenpunktes bil

müssen, indem wir uns einen solchen in immer größere Entfernung von anderen Massen gerückt denken. Das praktisch unerreichbare Ideal wäre erreicht, wenn alle anderen Massen m in unbegrenzt großer Entfernung sich befänden. In Wirklichkeit erfordert auch schon von Anfang an die Idealkonstruktion Langes die Durchführung einer ähnlichen Abstraktion. Denn die von einem Punkt ausgehenden materiellen Punkte werden sich auch gegenseitig durch die Newtonsche Gravitation beeinflussen und strenge genommen erst dann sich selbst überlassene Punkte sein, wenn sie in ihren Bahnen in überaus große gegenseitige Entfernungen gerückt sind. Man könnte ja auch die Massen der Punkte immer kleiner werden lassen, doch leistet dies Verfahren nicht mehr, als die zuerst gemachte Annahme, da hier ebensowenig ein nicht zu Ende durchführbarer Prozeß vermieden werden kann wie dort. Erklärt man die Unzulässigkeit dieser Art von Abstraktionen, dann wird man überhaupt niemals zu befriedigenden Definitionen der Grundbegriffe der Mechanik gelangen können. Läßt man aber den Begriff des isolierten Massenpunktes als zulässig gelten, dann würden in der Tat 3 isolierte Punkte, die nicht in einer Geraden stehen ein Inertialsystem vollständig und in der einfachsten Weise definieren. Der Anfang des Systems kann in jedem der 3 isolierten Punkte liegen, seine Achsenrichtungen werden durch die Richtungen nach den beiden anderen Punkten bestimmt.

Diese Idealkonstruktion ist nichts anderes als ein spezieller Fall der Langeschen. Man wird aber kaum leugnen können, daß sie mit der Wirklichkeit, d. h. mit den durch astronomische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen engere Fühlung besitzt. Denn man wird zunächst als Anfang des Inertialsystems nicht einen isolierten Punkt nehmen, der überhaupt nicht auffindbar ist, sondern ein in mechanischer Beziehung äquivalentes Gebilde. Ein solches ist — allerdings wegen der Anziehung der Sterne nur näherungsweise — der Schwerpunkt des Planetensystems, der sich gegenüber äußerst entfernten Massen gerade so bewegt wie ein Massenpunkt. Dann wird man zur Orien-

tierung auch ähnliche ausgedehnte Massensysteme benützen können und zwar in beliebiger Anzahl, wenn dieselben nur die Bedingung der Isoliertheit erfüllen, d. h. unbegrenzt weit vom Schwerpunkt des Sonnensystems abstehen und von ihm aus gesehen nicht in unmeßbar kleiner Entfernung voneinander zu stehen scheinen. Eine solche Idealkonstruktion des Inertialsystems, die also außer dem Schwerpunkt des Planetensystems noch mindestens 2 unbegrenzt weite Massen erfordert, scheint mir keine größeren gedanklichen Schwierigkeiten zu besitzen als irgend eine andere und ich habe keinen Grund, sie als nicht sehr ansprechend zu bezeichnen. Bekanntlich gehen in solchen Fragen die Meinungen auseinander und was dem einen besonders ansprechend erscheint, ist es dem anderen keineswegs und eine Diskussion in dieser Richtung führt selten zu einer Einigung. Daß das so definierte System ein wohl definiertes ist und auf dem Prinzip der Relativität ruht, dürfte indessen unzweifelhaft sein.

Die angestellten Betrachtungen leiten direkt zu den Klarlegungen über, welche die Wissenschaft Mach verdankt. Sie sind, wie schon erwähnt, in seinem Buche über die Entwicklung der Mechanik enthalten, welches zu den schönsten Büchern gehört, die über Mechanik überhaupt geschrieben worden sind. Die fundamentale Wichtigkeit dieses Werkes in Bezug auf die vorliegenden Fragen beruht hauptsächlich in der Konsequenz, mit welcher Mach zuerst das Prinzip der Relativität und den Grundsatz festgehalten hat, demzufolge die Mechanik ein auf rein empirischer Grundlage aufgebautes Gebäude ist, was merkwürdigerweise nicht immer genügende Berücksichtigung gefunden hat. Für Mach hat nun die Orientierung des Inertialsystems einfach nach dem Fixsternhimmel zu erfolgen und die Zeitskala ist durch die Rotation der Erde gegeben. Zu Newtons Zeit hätte diese Definition unzweifelhaft auch praktisch ausgereicht. Seitdem hat man aber in den Eigenbewegungen der Fixsterne Einflüsse kennen gelernt, welche die Festlegung eines Inertialsystems erschweren und auch die Rotationszeit der Erde, gemessen durch die übliche Sternzeit, ist ein Zeitmaß, das auf

nachgewiesenermaßen periodisch und säkular, letzteres in einem nicht genügend festgestellten Grade, ändert. Infolge dieser Tatsachen ist eine Orientierung einfach nach dem Fixsternhimmel zu unbestimmt und muß schärfer gefaßt werden. Das ist Mach auch nicht entgangen und er ersetzt,[1]) von dem Grundsatze ausgehend, daß man von den Massen des Universiums nicht absehen dürfe, die Aussage, daß eine Masse μ im Raum sich in gerader Linie und mit gleicher Geschwindigkeit bewege durch eine andere. Nennt man $m, m' \ldots$ die Massen in den Entfernungen $r, r' \ldots$ vom Punkte μ, so wird die genannte Aussage äquivalent sein mit dem Sinne der Formel

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\Sigma m r}{\Sigma m}\right) = 0$$

insofern nur „hinreichend viele, hinreichend große und weite Massen“ in Betracht gezogen werden. Die Zulässigkeit dieses sinnreichen Ansatzes unter gewissen Bedingungen muß anerkannt werden. Denn wenn die großen und weiten Massen die näheren überwiegen, deckt sich der mechanische Ansatz mit den oben gemachten Bemerkungen mit beliebiger Annäherung, wenn einzelne Entfernungen r beliebig groß gemacht werden.

Indessen möchten doch Einwände zu erheben sein. Der erste bezieht sich darauf, daß es nicht in unserem Ermessen steht, die ausgesprochene Bedingung für die Massen zu erfüllen, da wir Tatsachen nicht verändern können. Daß ferner die Formel auf die sichtbaren Fixsterne angewendet nahezu richtig ist, dürfte feststehen; ebenso sicher ist es aber, daß sie nicht dem, was die Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes in einem Inertialsystem ausdrücken soll, ganz genau entsprechen kann. Alle Massen und die näheren im besonderen wirken auf μ so ein, daß sich dieser Punkt tatsächlich nicht gleichförmig und geradlinig in Bezug auf ein Inertialsystem bewegt und ohne nähere Untersuchung können wir nicht einmal sagen, ob diese Abweichung nicht sehr merklich ist. Man

[1]) Mechanik, S. 248.

muß also die wirkliche Bewegung von μ unter allen Umständen durch Abstraktion idealisieren. Wie weit man die Abstraktion treibt, scheint mir von keiner ausschlaggebenden Bedeutung zu sein und man wird demnach berechtigt sein, von diesen und jenen Massen zu abstrahieren, da man ganz ohne Ausführung eines solchen Prozesses doch nicht auskommen kann. Hält man daran fest, so führt auch der Machsche Ansatz zu der Nötigung, **nur** sehr weite und isolierte Massen zur Orientierung zu verwenden und dann kommt man wieder auf denselben Weg, auf den die obigen Betrachtungen geführt haben und das p auch die Langeschen Festsetzungen, in gewissem Sinne, erweisen.

Die wirkliche Festlegung eines Inertialsystems mit Hilfe sehr weiter isolierter Massen ist geknüpft an eine niemals abbrechende Reihe von Korrekturen von Beobachtungen feststellbarer Tatsachen und sie verlangt also strenge genommen die Ausführung eines unendlichen Prozesses, der natürlich nie zu Ende geführt werden kann. An sich wird hiermit allerdings nichts anderes verlangt, was nicht auch sonst in allen Naturwissenschaften verlangt wird; da alle Beobachtungen ungenau sind, wird die immer erneute Nötigung zu Korrekturen niemals aufhören.

Bei der Festlegung eines Inertialsystems würde es also darauf ankommen, die Entfernung immer weiter entfernter Fixsterne abschätzen zu lernen und dann die näheren als zur Orientierung nicht geeignet ausscheiden zu lassen. Da tritt nun eine neue und wie es scheint unüberwindliche Schwierigkeit entgegen. Alle Erfahrungen in der Fixsternastronomie drängen zu der Annahme, daß die sichtbaren, also zunächst der Beobachtung allein zugänglichen Weltkörper ein räumlich begrenztes und zwar nicht einmal so ungeheuer großes, wie man früher meinte, System bilden, über dessen Grenzen hinaus bisher jede Wahrnehmung ausgeschlossen war und wohl auch immer bleiben wird. Dadurch ist es unmöglich, den oben erwähnten Abstraktionsprozeß beliebig weit fortzusetzen und das Inertialsystem kann auf diesem Wege nur bis zu einer gewissen Be-

schränkten Genauigkeit festgelegt werden. Diese Beschränkung bezieht sich natürlich nur auf die tatsächliche, nicht begriffliche Festlegung. So bleibt für die erstere nur der bereits oben erwähnte, durchaus gangbare, bereits von Newton angezeigte und von Carl Neumann näher beleuchtete Weg übrig.

Nicht unnötig dürfte es sein, am Schluß dieser Betrachtungen noch einmal darauf hinzuweisen, daß mit der festeren Begründung des Trägheitsgesetzes einzig und allein die Absicht verbunden sein kann, den wahren Sinn der Grundlagen des wissenschaftlichen Systems, das wir Mechanik nennen, festzustellen. Von diesem Standpunkt hat es kein Interesse, zu untersuchen, ob unter allen Umständen die jetzige Mechanik sich als das zweckmäßigste wissenschaftliche System für die Erklärung aller denkbaren Vorgänge bewähren muß. Indessen wird uns doch die fast unabsehbare Reihe von Erfahrungen, die bisher in dieser Richtung gesammelt worden sind, einigermaßen zuversichtlich machen und uns die Hoffnung offen lassen, es möchten nicht leicht rein mechanische Tatsachen auftreten, welche die bisher benützten Grundsätze als hinfällig und unbrauchbar oder selbst nur als unzweckmäßig erweisen würden.

3.

Die Aufgabe der tatsächlichen Festlegung eines Inertialsystems fällt der Astronomie zu und diese Festlegung hat gegen das empirisch hergestellte, in der Astronomie gebräuchliche Koordinatensystem zu erfolgen. Legen wir die Anfänge beider Systeme in den Schwerpunkt des Planetensystems, so wäre das nur erlaubt, wenn das Planetensystem wirklich isoliert wäre. Selbstverständlich ist das im strengen Sinne des Wortes nicht der Fall, aber diese Annahme genügt, wenn die Abweichungen in langen Zeiträumen innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen bleiben. Diese Forderung als strenge erfüllt nachzuweisen, ist gegenwärtig unmöglich und man muß sich mit mehr oder wen[illegible] sicheren Abschätzungen begnügen. Auf Schwierigkeiten [illegible]erbei auftreten, haben Carl Neu-

mann[1]) und ich[2]) hingewiesen. Es steht danach, trotz der Einwände, die hiergegen gemacht worden sind, fest, daß man sich entschliessen muß, die universelle und strenge Gültigkeit der Newtonschen Attraktionsformel zu leugnen, wenngleich nur so kleine Korrekturen notwendig sein mögen, daß deren Folgen innerhalb des Planetensystems und vielleicht beträchtlich darüber hinaus unbemerkbar bleiben. Diese Korrekturen müssen unter allen Umständen in der Richtung liegen, daß die Gravitationswirkung gegenüber der Newtonschen Formel schneller mit der Entfernung abnimmt. Bedenkt man weiter, daß wir mit einiger Sicherheit die uns umgebenden Fixsterne als ein endliches und durch weite Zwischenräume von eventuell anderen vorhandenen Systemen getrenntes System ansehen müssen, so wird vielleicht die Wirkung der Anziehungen jener anderen Systeme vernachlässigt werden können. Dann würde es in absehbarer Zeit möglich sein, eine obere Grenze für die Gesammtanziehung der Fixsterne anzugeben, denn es ist anzunehmen, daß die Studien über die räumliche Verteilung der Sterne zu bestimmten zahlenmäßigen Resultaten führen werden. Zur Ableitung einer solchen oberen Grenze genügt die Annahme des Newtonschen Gesetzes. Laplace[3]) hat die Größe der Anziehung eines Sternes berechnet und danach die Überzeugung gewonnen, daß in der Tat unser Sonnensystem als ein isoliertes aufzufassen ist. Die Wichtigkeit der Sache wird es rechtfertigen, wenn ich hier eine kurze Darstellung von einem etwas anderen Standpunkt aus folgen lasse.

Das Sonnensystem befindet sich in dem von den Fixsternen geschaffenen Kraftfeld. Ein Punkt mit der Masse 1 wird an einer Stelle, deren Koordinaten in einem Inertialsystem, dessen Anfang etwa im Schwerpunkt des ganzen Fixsternsystems liegt,

[1]) C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip etc. Leipzig 1896.

[2]) Münchener Sitzungsberichte 1896 und A. N. Nr. 3273.

[3]) Laplace, Mécanique céleste, Livre VI, Chapit. XVIII und Connaissance des temps pour l'an 1829.

$\xi\,\eta\,\zeta$ sein mögen, den Kraftkomponenten X, Y, Z ausgesetzt sein und diese verändern sich mit ξ, η, ζ. Strenge genommen werden sie auch die Zeit explizite enthalten; diese Abhängigkeit kann aber vorerst sicherlich unberücksichtigt bleiben.

Sind nun $M, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ Masse und Inertialkoordinaten der Sonne, m, ξ, η, ζ dieselben Größen für einen Planeten, so hat man:

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = k^2 \Sigma m \frac{\xi - \xi_0}{r^3} + X_\odot$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2 M \cdot \frac{\xi_0 - \xi}{r^3} + k^2 \Sigma_1 \frac{m_1(\xi_1 - \xi)}{\Delta_1^3} + X$$

Die Σ ist auf alle Planeten, Σ_1 auf alle Planeten mit Ausnahme des betrachteten auszudehnen. Ferner ist r der Radiusvektor der Planeten, Δ_1 seine Entfernung von einem anderen Planeten, $X_\odot$ und X die Werte von X an den Stellen ξ_0, η_0, ζ_0 und ξ, η, ζ.

Für den Schwerpunkt $\Xi\, Y\, Z$ des Planetensystems ist:

$$(M + \Sigma m)\frac{d^2\Xi}{dt^2} = M X_\odot + \Sigma m X$$

und für die relativen Koordinaten $x\,y\,z$ des betrachteten Planeten gegen die Sonne ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(M + m)\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + (X - X_\odot)$$

und ähnliche für y und z. Hier bedeutet R die gewöhnliche, aus der Anziehung der Planeten hervorgehende Störungsfunktion. Die Veränderung der Komponenten $X\,Y\,Z$ mit den Koordinaten wird sicher sehr klein sein. Erlaubt man sich in der betreffenden Taylorschen Reihe die Glieder 2. Ordnung fortzulassen und nennt man $X_0\,Y_0\,Z_0$ die Werte von $X\,Y\,Z$ im Schwerpunkt des Planetensystems, so wird

$$\frac{d^2 \Xi}{dt^2} = X_0; \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = Y_0; \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = Z_0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta}\right)_0 z$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right)_0 z \qquad (1$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(M+m)\frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)_0 z$$

Hier bedeuten die eingeklammerten Werte der Differential-quotienten Werte im Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt des Planetensystems mag sich vielleicht nicht unbeträchtlich in dem vorliegenden Koordinatensystem bewegen. Nach der oftmals gemachten Annahme, daß er sich im Jahre etwa um $\frac{4}{3}\pi$ Erdbahnradien weiter bewegt, würde er sich in tausend Jahren immerhin um rund 140 Neptunsweiten verschieben, was einer Parallaxe von 49" entspricht, die etwa $\frac{1}{?}$ der Entfernung der allernächsten Sterne gleichkommt. Ob innerhalb solcher Räume und Zeiten die Differentialquotienten $\left(\frac{dX}{d\xi}\right)_0$ etc. als konstant angesehen werden dürfen, ist natürlich zweifelhaft. Indessen wird man wohl auch dann nicht ganz unsichere Abschätzungen mit dieser Annahme erhalten.

Nennt man dann noch V das Potential der Sternanziehung, so werden also die Koeffizienten:

$$2a_{00} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right)_0; \quad 2a_{01} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0, \quad 2a_{02} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \zeta}\right)_0$$

$$2a_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\right); \quad 2a_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \zeta}\right)_0, \quad 2a_{22} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}\right)_0$$

wo $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$ konstant sein und die Bewegung eines Planeten um die Sonne geschieht so, daß durch die Fixsterne eine Störung hinzutritt, deren Störungsfunktion

$$F = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + - + a_{22}z^2 \qquad (2$$

eine quadratische Form der Variablen $x\,y\,z$ ist. Wirken die Sterne nach dem Newtonschen Gesetz, so besteht die Gleichung:

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$$

Es macht nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Veränderung der Bahnelemente eines Planeten infolge der Störungsfunktion F zu ermitteln. In jedem Falle kann man sich auf die Betrachtung der säkularen Veränderungen beschränken. Man hat zu diesem Zweck den säkularen Teil S der Funktion F zu bilden und hierzu sind die säkularen Teile der in (2) vorkommenden variablen Größen aufzusuchen. Ich will solche säkulare Teile durch ein vorgesetztes S bezeichnen.

Mit Benutzung der üblichen Bezeichnungsweise (a, e, π, Ω, i, n = halbe große Achse, Exzentrizität, Perihel-, Knotenlänge, Neigung und mittlere Bewegung) ergibt sich leicht:

$$S(x^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \sin^2\Omega \sin^2 i + 4\,e^2 - 5\,e^2 \sin^2\pi\right]$$

$$S(y^2) = \frac{a^2}{2}\left[1 - \cos^2\Omega \sin^2 i + 4\,e^2 - 5\,e^2 \cos^2\pi\right]$$

$$S(z^2) = \frac{a^2}{2}\sin^2 i$$

$$S(xy) = \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\,\Omega \sin^2 i + 5\,e^2 \sin 2\,\pi\right]$$

$$S(xz) = -\frac{a^2}{2}\sin\Omega \sin i$$

$$S(yz) = +\frac{a^2}{2}\sin\Omega \sin i$$

und mit diesen Ausdrücken nach (2):

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial \pi} = \frac{5}{2}\,a^2 e\left[(a_{11} - a_{00})\sin 2\,\pi + 2\,a_{01}\cos 2\,\pi\right]$$

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{\partial S}{\partial e} = -5\,a^2\left[a_{00}\sin^2\pi + a_{11}\cos^2\pi - a_{01}\sin 2\,\pi - \frac{4}{5}\,(a_{00} + a_{11})\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial i} = a^2 \cos i \,[(-a_{00} \sin^2 \Omega - a_{11} \cos^2 \Omega + a_{22} + a_{01} \sin 2\,\Omega) \sin i - a_{02} \sin \Omega + a_{12} \mathrm{c}$$

$$\frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial S}{\partial \Omega} = \frac{a^2}{2} \cdot [(a_{11} - a_{00}) \sin 2\,\Omega \sin i + 2\,a_{01} \cos 2\,\Omega \sin - 2\,a_{02} \cos \Omega - 2\,a_{12} \sin$$

Diese Ausdrücke hätte man in die bekannten For für die Variation der Konstanten einzusetzen, was so ei sich vollzieht, daß nicht weiter darauf einzugehen nötig

Zur Abschätzung wird die Bemerkung genügen, daß die säkularen Veränderungen $\frac{de}{dt}$, $e\frac{d\pi}{dt}$, $\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ ergi wenn man die angegebenen Differentialquotienten mit $\frac{a\,n}{k^2}$ mit Zahlen, die **höchstens** einige Einheiten betragen, m pliziert. Berechnet man den **Rang** einer Größe dadurch, man sie in Klammern setzt, so würde die Gleichung

$$\{A\} = a$$

aussagen, daß der absolute Wert von A gleich ist a m pliziert mit einer Zahl, die höchstens einige Einheiten betr kann. Auf diese Weise ergibt sich, daß für jedes der 4 B elemente E

$$\left\{\frac{d\,E}{d\,t}\right\} = \frac{a^3\,n}{k^2}\,\{a_{\varkappa\lambda}\}$$

Danach könnte man also, falls die $a_{\varkappa\lambda}$ gegeben wären, säkularen Veränderungen der Bahnelemente leicht abschä

Es soll nun beispielsweise eine ganz einseitige Ma verteilung angenommen werden, welche also voraussich ganz außerordentlich übertrieben große $a_{\varkappa\lambda}$ ergibt. Nimmt nämlich an, daß alle Fixsterne in einer bestimmten Richtun der Entfernung ϱ vom Planetensystem in einer Masse μ einigt wären, dann ergibt sich leicht

$$\{a_{\varkappa\lambda}\} = \frac{k^2\,\mu}{\varrho^3}$$

und demzufolge

$$\left\{\frac{dE}{dt}\right\} = \mu \cdot n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3$$

Setzt man $\mu = \lambda \cdot 10^8$ Sonnenmassen, ϱ entsprechend einer Parallaxe 0"01 · δ, so ergibt sich für Neptun, wo $\frac{dE}{dt}$ numerisch am größten wird, im Jahrhundert

$$\{dE\} = 0''00027 \cdot \lambda \cdot \delta^3$$

Nach dem, was wir — es ist das allerdings wenig genug — über die Massen und Verteilung der Fixsterne wissen, wird man λ und δ kaum größer als 1 annehmen dürfen, δ ist sogar wahrscheinlich ein kleiner Bruch. Danach darf man selbst nach vielen Jahrhunderten in den planetarischen Bewegungen um die Sonne wohl kaum einen bemerkbaren Einfluß der Anziehung der zu unserem Fixsternsystem gehörenden Massen erwarten. Ein wenig anders mögen sich die Verhältnisse für die Bewegung des Schwerpunktes unseres Sonnensystems verhalten. Die Kraftkomponenten sind hier — bei Festhaltung des herangezogenen Beispiels — nur vom Range $\frac{k^2 \Sigma m}{\varrho^2}$. Ich habe schon bei früherer Gelegenheit[1]) gezeigt, daß man wohl kaum bei den Fixsternen selbst in langen Zeiträumen auf eine bemerkbare Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung rechnen wird dürfen, natürlich von Ausnahmefällen abgesehen.

Der Krümmungsradius ϱ der Bahn des Schwerpunktes des Planetensystems ist gegeben durch

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$$

wo ds das Bogenelement ist.

[1]) Astronomische Nachrichten, Nr. 3675.

Nennt man also V die Geschwindigkeit und P die G
der einwirkenden Kraft, so wird der Rang von ϱ durch

$$\{\varrho\} = \frac{V^2}{P}$$

gegeben sein. Der Winkel $d\alpha$ zwischen zwei benachb
Tangenten an die Bahn ist dann

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{\varrho}$$

Also

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{P}{V}$$

und im obigen Beispiel:

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{k^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Bei Festhaltung der astronomischen Einheiten ist k^2
wo c die Bahngeschwindigkeit der Erde ist. Demnach hat

$$\left\{\frac{d\alpha}{dt}\right\} = \frac{c^2\mu}{V\cdot\varrho^2}$$

Setzt man, wie oben, $\mu = \lambda\cdot 10^8$; ϱ entsprechend
Parallachse $0''01\cdot\delta$ so ist $\Delta\alpha''$ die Änderung von α im J
hundert in Bogensekunden

$$\Delta\alpha'' = 31''\cdot\left(\frac{c}{V}\right)\cdot\lambda\,\delta^2$$

Für $\frac{c}{V} = \frac{3}{2}$, $\lambda = \delta = 1$ würde also eine Richtungsände
in der Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems
46'' im Jahrhundert folgen, eine Zahl die voraussichtlich
viel zu hoch gegriffen ist.

4.

Die Bewegungen der Planeten werden auf ein gewisses empirisches Koordinatensystem bezogen. Dasselbe hat im Laufe der Zeit eine recht solide Festlegung erfahren. Das Nähere ist in dem soeben erschienenen Band VI_2 der mathematischen Enzyklopädie in den Artikeln von E. Anding und F. Cohn so eingehend auseinandergesetzt, daß dem wohl kaum etwas hinzuzufügen wäre. Indessen ist ohne weiteres durch eine einfache Betrachtung der Resultate der messenden Astronomie einzusehen, daß man von selbst darauf geführt wurde, eine in einem Inertialsystem feste Ebene z. B. die Ebene der Erdbahn zu einer bestimmten Epoche als Fundamentalebene einzuführen und diese gegen die Fixsterne oder vielmehr die Fixsterne gegen jene Ebene mit immer steigender Genauigkeit festzulegen. Könnte man nun in dieser Ebene eine feste Inertialrichtung gegen die Fixsterne bestimmen, so wäre ein Inertialsystem auch praktisch definiert. Das ist aber nicht mit genügender Genauigkeit möglich, weil der Durchschnittspunkt von Äquator und Ekliptik, welcher nach der XAchse des empirischen Systems weist, sich verschiebt und diese Verschiebung, in ihrem säcularen Teil wenigstens, nicht genau genug theoretisch berechnet werden kann. Hierzu wäre eine genauere Kenntnis der Differenzen der Trägheitsmomente des Erdkörpers nötig, die anderseitig nicht beschafft werden kann. So bleibt eine Unsicherheit in der Bestimmung der erforderlichen Inertialrichtung bestehen, die nur durch Zuhülfenahme von gewissen Hypothesen von zum Teil sehr zweifelhafter Sicherheit anscheinend behoben worden ist.

Jedenfalls werden tatsächlich in Bezug auf dieses empirische System die Differentialgleichungen der Bewegung für die Planeten aufgestellt und integriert und die hier auftreten-Konstanten als Bahnelemente behandelt und aus den Beobachtungen bestimmt. Da die Differentialgleichungen nur richtig sind, wenn sie sich auf ein Inertialsystem beziehen, so wird, wenn eine von der Zeit abhängige Verlagerung der beiderlei Achsen gegeneinander vorhanden ist, die Theorie der Planeten-

bewegung unvollständig sein. Man kann nun, um diese Unvo
kommenheit aufzudecken, sich damit begnügen von den S
rungen durch die Planeten abzusehen und die Keplersche B
wegung allein zu betrachten. Sind in dem empirischen Syst
die Koordinaten eines Planeten $x' y' z'$, so wird angenomm
daß die Bewegung durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 y'}{d t^2} + \mu \frac{y'}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 z'}{d t^2} + \mu \frac{z'}{r^3} = 0$$

bestimmt ist. In Wirklichkeit gelten aber die analog
Gleichungen nur für die Koordinaten $x y z$ in einem Inerti
system, wo also ist:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \mu \frac{x}{r^3} = 0$$

während die empirischen Koordinaten nunmehr Gleichung
von der Form

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} + \mu \frac{x'}{r^3} = X$$

genügen und demnach in der ausgebildeten Planententh
die als störende Kräfte interpretierteren Komponenten XYZ
vernachläßigt worden sind. Es handelt sich also um die Wir-
kung dieser störenden Kräfte auf die Planetenbahnelemente
die durch sie verändert erscheinen. Es ist leicht die allge-
meinen Formeln für eine beliebig gegen ein Inertialsystem be-
wegtes empirisches System abzuleiten. Da es sich indessen
offenkundig nur um sehr kleine Veränderungen handeln kann,
wird es genügen anzunehmen, daß die gegenseitigen Neigungen
der gleichnamigen Achsen beider Systeme so klein seien, daß
ihre zweiten Potenzen, innerhalb des betrachteten Zeitraumes
vernachläßigt werden können.

Zwischen den beiderlei Koordinaten bestehen nun die
Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y + c z \\ y' &= a' x + b' y + c' z \\ z' &= a'' x + b'' y + c'' z \end{aligned}$$

Werden die 2. Potenzen der oben genannten Neigungen fortgelassen, so folgt bekanntlich daraus:

$$b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0$$

und wenn man setzt:[1])

$$a' = -b = r_1; \quad -a'' = c = q; \quad b'' = -c' = p$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - r_1 y + q z \\ y' &= y - p z + r_1 x \\ z' &= z - q x + p y \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und mit derselben Genauigkeit:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + r_1 y' - q z' \\ y &= y' + p z' - r_1 x' \\ z &= z' + q x' - p y' \end{aligned}\right\} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Die $p\,q\,r_1$ sind bekanntlich die Drehkomponenten des einen Koordinatensystems um das andere. Die Gesamtdrehung erfolgt um eine Achse mit den Neigungswinkeln α, β, γ gegen das System $x'\,y'\,z'$ mit einer Winkeldrehung Ω und es ist

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_1^2}, \quad \Omega \cos\alpha = p, \quad \Omega\cos\beta = q, \quad \Omega\cos\gamma = r_1$$

Sind beide Koordinatensysteme rechtsdrehende (sog. Korkzieher-)Systeme, so daß also die x' Achse durch eine positive Drehung um die z' Achse um 90 Grad in die y' Achse gebracht werden kann und in ähnlicher Weise die y' Achse in die z' Achse und die z' Achse in die x' Achse, so bedeuten positive $p\,q\,r_1$ positive Drehungen, die um die Achsen des empirischen Systems $x'\,y'\,z'$ ausgeführt werden müssen, um zum Inertialsystem $x\,y\,z$ zu führen. Die in der Astronomie üblichen Systeme der Rektaszensionen und Deklinationen, ebenso wie der Längen und Breiten sind solche rechtsdrehende Systeme. Die $p\,q\,r_1$ können im allgemeinen beliebige Funktionen der Zeit sein. Ich will mich, was vorderhand ausreichend sein

[1]) Vgl. u. A. H. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1900, I, S. 201.

dürfte, mit der Annahme begnügen, daß $p\,q\,r_1$ sich prop
tional mit t ändern, so daß sie für $t = 0$ selbst verschwind
Es soll also gesetzt werden

$$p = w_x t, \qquad q = w_y t, \qquad r_1 = w_z t$$
$$w_x = w \cos \alpha, \qquad w_y = w \cos \beta, \qquad w_z = w \cos \gamma$$

wo die Drehkomponenten $w_x\,w_y\,w_z$ um die 3 Achsen als un
hängig von t anzusehen sind.

Aus den Gleichungen (2a) folgt dann:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - r_1 \frac{dy'}{dt} + q \frac{dz'}{dt} - y' w_z + z' w_y$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - r_1 \frac{d^2y'}{dt^2} + q \frac{d^2z'}{dt^2} - 2 w_z \frac{dy'}{dt} + 2 w_y \frac{dz'}{dt}$$

und aus (1) ergeben sich dann die Störungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} X &= -2 w_z \frac{dy}{dt} + 2 w_y \frac{dz}{dt} \\ Y &= -2 w_x \frac{dz}{dt} + 2 w_z \frac{dx}{dt} \\ Z &= -2 w_y \frac{dx}{dt} + 2 w_x \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\}$$

Hierin können nach Belieben die $x\,y\,z$ durch $x'\,y'\,z'$
setzt werden. Diesen Störungskomponenten entsprechend w
den die Bahnelemente periodische und säkulare Veränderun
erleiden. Zur Ermittlung dieser wird man am besten
Kraftkomponenten R, S, W, in der Richtung des Radiusvekt
senkrecht darauf in der Bahnebene und senkrecht auf
Bahnebene, berechnen. Es seien $x\,y\,z$ Ekliptikalkoordinat
ferner sollen die früheren Bezeichnungen festgehalten werd
außerdem v die wahre Anomalie, $u = v + \pi - \Omega = v +$
und $p = a\,(1 - e^2)$ sein. Man hat dann bekanntlich:

$$\frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$

$$\frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$

$$\frac{z}{r} = \sin u \sin i$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[-\cos \Omega (\sin u + e \sin \omega) + \sin \Omega \cos i (\cos u + e \cos \omega)]$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[-\sin \Omega (\sin u + e \sin \omega) - \cos \Omega \cos i (\cos u + e \cos \omega)]$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\sin i (\cos u + e \cos \omega)]$$

Bezeichnet man noch:

$$A = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i$$
$$B = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i$$
$$C = -\cos u \sin i$$

so wird:

$$R = X \cdot \frac{x}{r} + Y \frac{y}{r} + Z \cdot \frac{z}{r}$$
$$S = X \cdot A + Y \cdot B + Z \cdot C$$
$$W = X \sin \Omega \sin i - Y \cos \Omega \sin i + Z \cos i$$

Die weitere Ausrechnung ist mit Hilfe der Formeln für die Keplersche Bewegung leicht auszuführen. Setzt man zur Abkürzung:

$$D = \cos \alpha \sin \Omega \sin i - \cos \beta \cos \Omega \sin i + \cos \gamma \cos i$$
$$\Delta = \cos \alpha \sin \Omega \cos i - \cos \beta \cos \Omega \cos i - \cos \gamma \sin i$$
$$E = \cos \alpha \cos \Omega + \cos \beta \sin \Omega$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{2w}{r}\sqrt{\mu p}\,D \\ S &= +2we \sin v \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,D \\ W &= +2w\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[-\Delta \sin u + E \cos u - \Delta e \sin \omega + E e \cos \omega] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hiermit ergeben sich nun die Differentialquotienten der Bahnelemente nach der Zeit. Die periodischen Störungen entstehen durch das Auftreten von Zentrifugalkräften bei der Rotation des empirischen Systems um das Inertialsystem, wobei indessen nicht vergessen werden darf, daß mit w^2 multiplizierte Glieder fortgelassen worden sind.

Man findet leicht:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}\left(R e \sin v + S \frac{p}{r}\right) = 0$$

a bleibt demnach, wenn man nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt, völlig konstant. Nennt man E die exzentrische Anomalie, so wird

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left(R \sin v + S(\cos v + \cos E)\right) = -2wD\frac{r}{a}\sin v$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} W r \sin u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\Delta r \sin^2 u + E r \sin u \cos^2 u - \Delta e \sin \omega \cdot r \sin u + E e \cos \omega \cdot r \sin u]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} W r \cos u = \frac{2w}{p} \times$$

$$[-\Delta r \sin u \cos u + E r \cos^2 u - \Delta e \sin \omega \cdot r \cos u + E e \cos \omega \cdot r \cos u]$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[-R \cos v + S \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] + e \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

$$= \frac{2w}{p} \frac{1}{}\left[r \cos v (1 + e^2) + 2er\right] + e \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Offenbar darf man zunächst nur darauf rechnen, daß die säkularen Veränderungen eventuell merkbar werden. Um diese zu erhalten, sei bemerkt, daß man mit der oben eingeführten Bezeichnung für säkulare Glieder erhält:

$$S(r) = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right); \quad S(r \sin v) = S(r \sin v \cos v) = 0$$

$$S(r \cos v) = -\frac{3}{2}ae; \quad S(r \cos^2 v) = a\left(e^2 + \frac{1}{2}\right); \quad S(r \sin^2 v) = \frac{a}{2}(1 - e^2)$$

und hiermit

$$S(r\sin u) = -\frac{3}{2}ae\sin\omega \qquad S(r\sin^2 u) = \frac{a}{2}[1 - e^2 + 3e^2\sin^2\omega]$$

$$S(r\cos u) = -\frac{3}{2}ae\cos\omega \qquad S(r\cos^2 u) = \frac{a}{2}[1 + 2e^2 - 3e^2\sin^2\omega]$$

$$S(r\sin u\cos u) = \frac{3}{2}ae^2\sin\omega\cos\omega.$$

Daraus folgt sofort

$$S\left(\frac{da}{dt}\right) = S\left(\frac{de}{dt}\right) = 0$$

$$S\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) = -\Delta w;\quad S\left(\frac{di}{dt}\right) = +w\cdot E$$

$$S\left(e\frac{d\pi}{dt}\right) = ew\left[D - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\cdot\Delta\right]$$

und wenn diese Formeln ausführlich hingeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} S\left(e\frac{d\pi}{dt}\right) &= e\left\{w_x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\sin\Omega - w_y\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\cos\Omega + w_z\right\} \\ S\left(\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) &= -w_x\cos i\sin\Omega + w_y\cos i\cos\Omega + w_z\sin i \\ S\left(\frac{di}{dt}\right) &= w_x\cos\Omega + w_y\sin\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Formeln stimmen, wie zu erwarten, vollkommen mit denen des Herrn Anding[1]) überein, die er einfach durch die Transformation der Elemente auf ein gegen das empirische bewegte Inertialsystem abgeleitet hat. Hier erscheinen sie als spezieller Fall allgemeinerer Betrachtungen. Die einfachste Anwendung dieser Formeln zur Ermittlung von w_x w_y w_z hat Herr Anding vorgenommen. Diese war ermöglicht dadurch, daß S. Newcomb[2]) die säkularen Veränderungen der Bahnelemente der vier kleinen Planeten, Merkur, Venus, Erde, Mars sowohl theoretisch als auch empirisch abgeleitet hat.

---

[1]) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. VI_2.

[2]) The Elements of the four inner Planets. Washington 189[illegible]

Die Differenzen der so gefundenen zweierlei Werte werden als mit den obigen S Werten übereinstimmend angenommen werden können, wenn man voraussetzen darf, daß im Übrigen die theoretische Berechnung der Störungen vollständig war. Dies trifft bekanntlich für das Merkurperihel nicht zu und so muß die große Abweichung zwischen dem empirischen und theoretischen Werte der Säkularveränderung dieses Elementes außer Betracht gelassen werden. Tut man dies, so ergeben sich folgende Werte:

$$w_x = 0''00 \pm 0''15; \quad w_y = 0''03 \pm 0''15; \quad w_z = 7''50 \pm 2''30$$

zugleich mit den mittleren Fehlern, welche mit den Angaben Herrn Andings fast vollkommen übereinstimmen.

Wie man auch die Zuverlässigkeit der Newcombschen Zahlen, die sehr vergrößert in das Resultat eingehen, beurteilen mag — auch hierin wird man Herrn Anding beistimmen müssen — sicher ist es, daß das empirische System der Astronomie sich im Jahrhundert um mehrere Bogensekunden um ein Inertialsystem drehen wird. Daß von den 3 Drehkomponenten nur w_z merkbar ist, ist durch die Art der Orientierung des empirischen Systems von selbst erklärt.

§ 5.

Es ist hier der Ort, ein Hilfsmittel zur Sprache zu bringen, auf das seit Laplace oftmals als auf ein besonders taugliches zu ähnlichen Betrachtungen, wie die vorliegenden, hingewiesen worden ist. Nennt man $x\,y\,z$ die Inertialkoordinaten einer der planetarischen Massen, so gelten die 3 Flächensätze:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= c_1 \\ \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= c_2 \\ \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= c_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin die c Konstante sind. Nimmt man ein zweites Koordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ mit demselben Anfang und setzt man

$$\cos(\zeta, x) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \quad \cos(\zeta, y) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},$$
$$\cos(\zeta, z) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

so ist die $\xi\,\eta$ Ebene die Laplacesche unveränderliche Ebene. In Bezug auf sie hat die Konstante der Flächengeschwindigkeiten den größten Wert, den sie erreichen kann, nämlich $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ und in Bezug auf jede darauf senkrechte Ebene ist sie $=$ Null. Aus dieser Bedeutung der unveränderlichen Ebene folgen gewisse Vorteile für die analytische Behandlung von Bewegungsproblemen, wenn man diese Ebene zu einer Koordinatenebene wählt. Da sie gegen das Inertialsystem festliegt, so kann sie, allerdings nur in beschränktem Umfange, zur Orientierung des empirischen Systems gegen ein Inertialsystem benutzt werden. Dazu wird man die zu (1) analogen Ausdrücke für die Koordinaten $x'\,y'\,z'$ im empirischen System zu bilden haben. Mit den Bezeichnungen des letzten Artikels ergibt sich Folgendes: Man setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l|l} \Sigma m\,(y^2 + z^2) = A & \Sigma m\,y\,z = c' \\ \Sigma m\,(z^2 + x^2) = B & \Sigma m\,z\,x = c'' \\ \Sigma m\,(x^2 + y^2) = C & \Sigma m\,x\,y = c''' \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = c'_3 = c_3 + w_x(tc_2 - c'') - w_y(tc_1 + c') + w_z \cdot C \\ \Sigma m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = c'_1 = c_1 + w_x \cdot A + w_y(tc_3 - c''') - w_z \cdot (tc_2 + c'') \\ \Sigma m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = c'_2 = c_2 - w_x(tc_3 + c''') + w_y \cdot B + w_z(tc_1 - c') \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die durch (2) definierten Größen sind mit den Umläufen der Planeten periodisch veränderlich. Man wird auch hier die

periodischen Glieder fortlassen können, da sich voraussichtlich nur die säkulären Glieder, die eben mit der Zeit beliebig groß werden können, als bemerkbar erweisen werden. Da bekanntlich die 3 Flächensätze nicht unabhängig von einander sind, vielmehr rein formal aus zweien der dritte folgt, so kann man aus (3), wie von anfang an klar war, die 3 Rotationskomponenten $w_x\, w_y\, w_z$ nicht getrennt bestimmen. Abgesehen hiervon hat die Verwendung der Flächensätze bei der Orientierung des empirischen Systems noch andere Bedenken. Da die Planetenmassen als Faktoren in den Summen erscheinen, werden die großen Planeten den wesentlichen Anteil an den Summen haben. Tatsächlich erhält man schon eine sehr angenährt richtige Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene, wenn man außer Jupiter und Saturn alle andern Planeten außer Acht läßt. In der Hauptsache werden die linken Seiten von (2) also nur durch die großen Planeten bestimmt und Merkur z. B. hat nur einen kaum bemerkbaren Einfluß. Darin ist auch begründet, warum die Integrale der Flächensätze eine so wenig wertvolle und durchgreifende Prüfung für die Richtigkeit der Planetentheorien abgeben. Da die Genauigkeit in den von den großen Planeten herrührenden Gliedern sich nicht in entsprechendem Grade erreichen läßt, könnte die Bewegung von Merkur und Venus total verfehlt berechnet sein und doch würde dadurch die Lage der unveränderlichen Ebene oder was dasselbe ist, die Größen $c_1\, c_2\, c_3$ sich als konstant erweisen.

Eine Eigentümlichkeit besitzen bekanntlich die Integrale der Flächensätze, die in manchen Fällen von Bedeutung sein kann. Sie gelten nämlich für allerlei Arten innerer Kräfte. Die Konstanten $c_1\, c_2\, c_3$ ändern sich nicht, wenn das Newtonsche Gesetz nicht zutreffen oder wenn plötzlich an seine Stelle ein anderes Gesetz wirksam werden sollte, sie bleiben ungeändert bei Explosionen, Zusammenstößen etc. Auf diese Weise sind sie überhaupt keine Kontrolle für die Planetenbewegungen, die für jeden einzelnen Planeten dem Newtonschen Gesetz gemäß erfolgen und den Beobachtungen entsprechend dargestellt werden sollen.

Die Bedeutung der unveränderlichen Ebene scheint demnach in mechanischer Beziehung eine sehr geringe zu sein und es dürfte sich kaum lohnen, ihre Lage im empirischen System mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Wenn dies aber unternommen wird, dann muß man nicht nur alle Mitglieder des Sonnensystems, also auch die Trabanten, mit einbegreifen, was auch gewöhnlich geschieht, sondern man darf auch nicht versäumen, wie Poinsot[1]) zuerst bemerkt hat, die Rotationen der Sonne und der Planeten zu berücksichtigen. Man überzeugt sich leicht, daß die Rotationsmomente der großen Planeten von demselben Range sind, wie der Anteil des Merkur und daß die Rotation der Sonne die Lage der unveränderlichen Ebene durchaus nicht unmerklich verändert. Tatsächlich sind aber die Summen (1) nur konstant, wenn nicht nur alle Massen im Planetensystem, sondern auch ihre vollen Geschwindigkeitskomponenten eingesetzt werden. Auf diesen Punkt hat Poinsot besonderen Nachdruck gelegt und daran sehr weitgehende Aussichten geknüpft, die mathematisch zwar wohlbegründet sind, sich aber tatsächlich niemals werden realisieren lassen. Bildet man nämlich die Summen (1), so erscheinen links die Massen als Faktoren, ferner die Trägheitsmomente der Planeten in Bezug auf zu den $x\,y\,z$ parallele und durch den Schwerpunkt eines jeden Planeten gehende Achsen, multipliziert mit den Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit. Die Summen dieser Ausdrücke müssen konstant sein und wenn man nun zu verschiedenen Zeitepochen die Koordinaten der Schwerpunkte und ihre Geschwindigkeiten, ferner die Lagen der Rotationsachsen und die Rotationsgeschwindigkeiten um sie bestimmt, so könnte man hieraus sowohl die Massen als auch die Trägheitsmomente ableiten. Diese Aussicht ist allerdings verlockend und sie wurde auch von Poinsot mit großer Wärme besprochen. Daß sie aber trotzdem eine nicht realisierbare Utopie ist, auch abgesehen von der Nichtkoinzidenz des empirischen Systems mit einem

[1]) L. Poinsot, Mémoire sur la théorie et la détermination de l'équateur du système solaire. Addition zu den „Élémens de Statique". Paris 1830.

Inertialsystem, braucht kaum bemerkt zu werden. Die erforderliche Genauigkeit — eine genügende Variation in den Koeffizienten selbst vorausgesetzt — wird niemals zu erreichen sein, selbst wenn sich die praktische Astronomie in ganz ungeahnter Weise entwickeln sollte.

§ 6.

Zum Schluß sollen noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang gemacht werden, in dem die Eigenbewegungen der Fixsterne mit den hier besprochenen Fragen stehen. Ich werde mich indessen auf das Nötigste beschränken, da ich bald Gelegenheit zu finden hoffe, auf einige der zu berührenden Punkte näher einzugehen.

Wählt man den Schwerpunkt des Sonnensystems zum Anfang eines Koordinatensystems ξ, η, ζ, das wir nach den früheren Betrachtungen als ein Inertialsystem ansehen können und ein empirisches System $\xi' \eta' \zeta'$ mit demselben Anfang, welches etwa nach dem Äquator orientiert ist, so ist

$$\begin{aligned} \xi' &= \varrho \cos\delta \sin\alpha \\ \eta' &= \varrho \cos\delta \sin\alpha \\ \zeta' &= \varrho \sin\delta \end{aligned}$$

wo α und δ beobachtete Rektaszension und Deklination, ϱ die Entfernung eines Fixsterns bedeuten. Durch Differentiation ergeben sich die viel benutzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\delta &= -d\xi' \sin\delta\cos\alpha + d\eta' \sin\delta\cos\alpha + d\zeta' \cos\delta \\ \varrho\cos\delta \cdot d\alpha &= -d\xi' \sin\alpha + d\eta' \cos\alpha \\ d\varrho &= -d\xi' \cos\delta\cos\alpha + d\eta' \cos\delta\sin\alpha + d\zeta' \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nimmt man nun ein zweites System $x\, y\, z$, dessen Achsen mit den ξ, η, ζ parallel laufen und dessen Anfang zunächst unbestimmt bleiben mag, so wird:

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b, \quad \zeta = z - c \qquad (2)$$

wo $a\, b\, c$ die Koordinaten des Schwerpunkts des Planetensystems oder mit genügender Annäherung die Sonnenkoordinaten sind.

Man hat nun weiter, indem gegen früher nur r statt r_1 gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi - r\eta' + q\zeta' \\ \eta' &= \eta - p\zeta' + r\xi' \\ \zeta' &= \zeta - q\xi' + p\eta' \end{aligned}$$

Mit Ausnahme vielleicht von einzelnen sehr stark bewegten Sternen wird man $r\,d\eta'$, $q\,d\zeta'$ etc. gegenüber den anderen Gliedern, die durch Differentiation entstehen, für sehr lange Zeiträume vernachlässigen können. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} d\xi' &= dx - da - dr\cdot\eta' + dq\cdot\zeta' \\ d\eta' &= dy \quad db - dp\cdot\zeta' + dr\cdot\xi' \\ d\zeta' &= dz - dc - dq\cdot\xi' + dp\cdot\eta' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Denkt man sich (3) in (1) eingesetzt, so erhält man Gleichungen, von denen ein spezieller Fall bei den so vielfach ausgeführten Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems gewöhnlich benutzt wird. Es sollen nun nur solche dx, dy, dz betrachtet werden, die aus einer Rotation um eine beliebige durch den Anfang gehende Achse mit beliebiger Rotationsgeschwindigkeit entstehen. Demgemäß soll gesetzt werden

$$\begin{aligned} dx &= z w_2 - y w_3 \\ dy &= x w_3 - z w_1 \\ dz &= y w_1 - x w_2 \end{aligned}$$

Dabei sollen die Rotationskomponenten $w_1\, w_2\, w_3$ als beliebige Funktionen des Orts angesehen werden. Dann wäre der allgemeinste Fall, in dem den rechten Seiten der letzten Gleichungen noch etwa die Größen λ, μ, ν hinzuzufügen wären, ebenso leicht zu behandeln, denn man hätte im folgenden nur da, db, dc durch $da - \lambda$, $db - \mu$, $dc - \nu$ zu ersetzen. Doch soll hier davon Abstand genommen werden. Noch ist zu bemerken, daß $w_1\, w_2\, w_3$ Rechtsdrehungen bedeuten, wenn das Koordinatensystem $x\,y\,z$ ein rechtsdrehendes ist.

Führt man noch die Polarkoordinaten A und D desjenigen Punktes ein, nach welchem die Bewegung des Sonnensystems

im Inertialsystem $x\,y\,z$ erfolgt und h die Weglänge dieser Bewegung in einer sehr kleinen Zeit, so wird

$$\begin{aligned} da &= h \cos D \cos A \\ db &= h \cos D \sin A \\ dc &= h \sin D \end{aligned}$$

Setzt man dies in (3) und darauf die Werte (3) in (1) ein, so ergibt sich folgendes. Bezeichnet man:

$$\left.\begin{aligned} h \cos D \cos A + b\,w_3 - c\,w_2 &= X_0 \\ h \cos D \sin A + c\,w_1 - a\,w_3 &= Y_0 \\ h \sin D \qquad + a\,w_2 - b\,w_1 &= Z_0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so findet man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d\delta &= X_0 \sin\delta \cos\alpha + Y_0 \sin\delta \sin\alpha - Z_0 \cos\delta \\ &\quad + (dp + w_1)\,\varrho \sin\alpha - (dq + w_2)\,\varrho \cos\alpha + \mu\,\varrho \\ \varrho \cos\delta \cdot d\alpha &= X_0 \sin\alpha - Y_0 \cos\delta - (dp + w_1)\,\varrho \sin\delta \cos\alpha \\ &\quad - (dq + w_2)\,\varrho \sin\delta \sin\alpha + \varrho \cos\delta \cdot (dr + w_3) \\ d\varrho &= - X_0 \cos\delta \cos\alpha - Y_0 \cos\delta \sin\alpha - Z_0 \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

In diesen allgemeinen Gleichungen ist durch die Beziehung auf das Inertialsystem schon eine Präzessionskorrektion enthalten. Das in der ersten Gleichung hinzugefügte Glied $\mu\varrho$ bedeutet etwaige Korrektionen der zur Ableitung der Eigenbewegungen in δ benutzten Deklinationssysteme, während eine etwaige Verbesserung der Äquinoktien als in $dr + w_3$ enthalten betrachtet werden kann.

Da die $w_1\, w_2\, w_3$ unbekannte Funktionen von α, δ und ϱ sind, so erlaubt I gar keinen Schluß auf den Apex der Sonnenbewegung; auch darf man nicht übersehen, daß die Fixsternentfernung ϱ im allgemeinen unbekannt ist. Was man bisher über die Eigenbewegungen $d\alpha$ und $d\delta$ in Erfahrung gebracht hat — in Bezug auf die spektroskopisch bestimmten $d\varrho$ berechtigt die allzu lückenhafte Erfahrung kaum zu irgend einer Aussage —, zeigt, daß sie für die einzelnen Sterne stark und anscheinend regellos hin- und herschwanken. Allgemeinere Gesetze werden sich demgemäß nur in Mittelwerten für sehr

viele Sterne zeigen können und man wird nur in solchen Mittelwerten eine Abhängigkeit vom Ort erkennen. Die Gleichungen I sind dann so zu verstehen, daß die $w_1\, w_2\, w_3$ diese den Mittelwerten entsprechenden Funktionen bedeuten. Man wird also für jeden Stern den Gleichungen eine Größe Δ hinzufügen müssen, die dem Stern individuell zugehört und als ein Fehler, in der einfachsten Annahme von zufälliger Art, zu behandeln ist.

Die weitere Behandlung von I ist natürlich nur möglich, wenn über die Funktionen w, zum mindesten was ihre Form betrifft, Hypothesen gemacht werden. Diese Hypothesen bestimmen in Verbindung mit der Art der Ausgleichung, der Verteilung der Sterne etc., das Koordinatensystem $x\,y\,z$ Infolge dessen kann man nicht immer behaupten, daß die Resultate für verschiedene Sternklassen z. B. für solche von verschiedenen Helligkeiten, sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, in manchen Fällen wird man eine solche Annahme sogar als sehr unwahrscheinlich erkennen. Hierdurch und noch durch andere Umstände stellen sich einer einwandfreien Interpretation der Resultate über die Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung große, fast unüberwindliche Hindernisse entgegen, worauf hier umsoweniger eingegangen werden soll, als Herr Anding[1]) darüber sehr eingreifende wichtige Untersuchungen angestellt hat.

Gewöhnlich wird nun die Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ gemacht und außerdem $dp = 0$ gesetzt. Dann kann man auch dr und dq als Verbesserung der Präzessionskonstanten m und n betrachten, so daß

$$\Delta m = dr; \quad \Delta n = -dq$$

Diese beiden Größen stellen bekanntlich nur eine Unbekannte dar, wenn die Planetenpräzession und die Korrektion der Äquinoktien als genügend genau bekannt angesehen werden dürfen.

---

1) E. Anding, Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne im Weltraume. München 1901.

Die auf solche Weise spezialisierten Gleichungen I sind außerordentlich oft und zwar mit Benützung sehr verschiedenartigen Materials numerisch verwendet worden. Auch wenn nicht gerade nach diesen unter dem Namen der Airyschen Formeln bekannten Vorschriften gerechnet worden ist, wurden doch fast immer ganz ähnliche Annahmen gemacht, die im Wesentlichen darauf hinauslaufen, daß es Koordinatensystem xyz mit zu Inertialachsen parallelen Achsenrichtungen gibt, für welche sich die Bewegungen dx, dy, dz im Mittel aus einer größeren oder kleineren Anzahl von Sternen genommen, vollständig kompensieren. Auf das rein hypothetische und nicht sehr wahrscheinliche dieser Annahme wurde nachdrücklich von Anding, Kobold,[1]) Stumpe[2]) und mir hingewiesen. Eine Berechtigung zu dieser Annahme läßt sich nur aus dem Erfolge ableiten und dieser Erfolg wird weiter nur dadurch konstatiert, daß die so verschiedenartigen Berechnungen meistens zu nicht gerade abnorm abweichenden Werten für die Koordinaten A und D des Apex geführt haben. Daraus wird man allerdings vielleicht schließen dürfen, daß die gemachte Annahme bis zu einem gewissen Grade die wirklichen Verhältnisse darstellt. Indessen muß andererseits konstatiert werden, daß sich fast alle Ableitungen nur auf die im Mittel uns näheren Fixsterne beziehen und daß andere Annahmen noch nicht verfolgt worden sind. Es ist also nicht zu leugnen, daß sich demnach fast alle vorliegenden Untersuchungen mit großer Einseitigkeit nach einer Richtung nur erstrecken. Außerdem haben sich aber auch auf diesem Wege Ergebnisse eingestellt, die bei der Interpretation der gefundenen Zahlen zur Vorsicht mahnen. Es sei hier nur ein solches vor kurzem gefundenes Ergebnis mitgeteilt. Die Herren Dyson und Thackeray[3]) haben durch Vergleichung des neu reduzierten Groombridge Katalogs mit neueren Greenwicher Beobachtungen Eigenbewegungen ab-

---

[1]) Astron. Nachrichten, No. 3284.

[2]) Astron. Nachrichten, Nr. 3348.

[3]) Monthly notices. LXV.

geleitet und aus ihnen mit den sogenannten Airyschen Formeln den Sonnenapex bestimmt, indem sie den für gleiche Flächen am Himmel gebildeten Mitteln der Eigenbewegungen gleiche Gewichte geben und den innerhalb gewisser Größenklassen liegenden Sternen dieselbe Entfernung zuerteilen. So ergab sich[1])

Sterngröße	Anzahl	A	D
1—4.9	200	244°	+ 15°
5.0—5.9	454	268°	+ 27
6.0—6.9	1003	278°	+ 33
7.0—7.9	1239	280°	+ 38½
8.0—8.9	811	272°	+ 43

Hier stellt sich mit zunehmender Sterngröße eine sehr deutliche und bedeutende Vergrößerung von D dar. Ähnliches hat übrigens schon Stumpe gefunden. Der Umstand, daß der Groombridge Katalog nur Sterne, deren $\delta > 38°$ ist, enthält, wird vielleicht von Einfluß gewesen sein, indessen ist es nicht wahrscheinlich, daß hierdurch alles erklärt wird.

Formell nicht sehr verschieden von der Annahme $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, aber allgemeiner, ist die Annahme, daß die w Konstanten sind. An sich ist es von vornherein sehr wahrscheinlich, daß in den Mittelwerten, als Rest gewissermaßen, eine Rotation übrig bleibt und man wird nur über die eventuelle Bemerkbarkeit dieser Rotation verschiedener Meinung sein können. Die Frage, ob dieses konstante Rotationsglied den Hauptteil des systematischen Verlaufs in den Bewegungen der Fixsterne gegen ein System $x\,y\,z$ wiedergibt, mag hier unerörtert bleiben. Wahrscheinlich ist dies nicht der Fall. Zuerst hat wohl E. Schönfeld[2]) darauf aufmerksam gemacht, daß es sich empfehlen dürfte, auf eine solche Rotation des Fixsternhimmels Rücksicht zu nehmen. Leider hat er sich durch einen Fehlschluß — der übrigens seine Formeln, welche

[1]) Für die hellsten Sterne sind die a. a. O. gegebenen Zahlen durch irgend welche Druck oder Schreibfehler entstellt. Ich habe die Zahlen für $X\,Y\,Z$ als richtig angewiesen.

[2]) Vierteljahrschrift der Astron. Gesellschaft XVII. S. 355 ff.

in den einfacher gestalteten Formeln I inbegriffen sind, nicht beeinträchtigt hat — verleiten lassen, sofort eine Spezialisierung zu empfehlen, die bisher, soviel ich weiß, nicht beanstandet worden ist. Die Vermutung, daß die Bewegungen der Fixsterne irgend eine Beziehung zur Milchstraße zeigen müssen, ist gewiß berechtigt, wenn man auch gegenwärtig positive Angaben in dieser Richtung nicht machen kann. Schönfeld sagt nun weiter: „Die Beziehungen der mittleren Bewegungen (zur Milchstraße) können in mehrfacher Weise gedacht werden. Am nächsten liegt aber die Annahme, daß die Bewegungen in Ebenen erfolgen, deren Neigungen gegen die Milchstraße klein sind und demgemäß in Richtungen, welche nahezu unter sich und der Milchstraße selbst parallel sind. Ohne Annahme einer solchen Rotation in der Ebene der Milchstraße, wie J. Herschel sie nennt, ist es kaum möglich, das Bestehen der sichtbaren Milchstraße zu erklären: dieselbe müßte sich mit fortschreitender Zeit auflösen und es wäre eigentlich ein Zufall, daß wir gerade zu einer Zeit leben, in der dies noch nicht stattgefunden hat.“ Daraus glaubte Schönfeld schließen zu müssen, daß eine etwaige gemeinschaftliche Drehung aller Sterne nur annähernd um eine Achse erfolgen könne, die senkrecht auf der Ebene der Milchstraße stände. Es ist aber nicht einzusehen, wie eine solche gemeinschaftliche Drehung, die also als Rest der Mittelwerte der Bewegungen bestehen bleibt, ein Zerfallen der Milchstraße erzeugen soll. Der ganze Fixsternhimmel, und mit ihm auch die Milchstraße, dreht sich wie ein starrer Körper — das sagen auch die Formeln Schönfelds aus — es könnten nur eventuell parallaktische Verschiebungen, wenn das Sonnensystem an der Rotation nicht Teil nimmt, stattfinden. In jedem Falle ist dieses Argument Schönfelds nicht geeignet, die Wahl der Rotationsachse irgendwie zu beschränken. Wenn nicht ganz andere Gesichtspunkte namhaft gemacht werden, ist jede Wahl gleich wahrscheinlich und zulässig. Leider haben mehrere Rechner, welche also die Formeln I mit konstanten w_1 w_2 w_3 anwandten, nur die Schönfeldschen Annahmen benutzt und weiter verfolgt.

Indessen erlauben die Rechnungen L. Struves[1]), der die usgleichung im allgemeinen Falle bis zu einem gewissen rade durchgeführt hat ohne neue Rechnungen manches in ieser Richtung auszusagen. Die Arbeiten L. Struve gehören berhaupt zu den besten auf diesem Gebiete, weil sie die rundlagen der Rechnung mit Klarheit und Deutlichkeit her- ortreten lassen und auch nicht den Versuch machen, kleine Widersprüche, die an sich ja eigentlich selbstverständlich auf- reten müssen, durch gekünstelte Annahmen wegzuschaffen.

Danach findet er für die Bradleyschen Sterne, wobei er aller- ings für die ϱ gewisse hypothetische Werte angenommen hat, der hier benutzten Bezeichnungsweise:

1. Aus den Rektaszensionen:

$$\begin{array}{l|l} dr + w_3 = -2''.725 & X_0 = -0''.493 \\ dp + w_1 = -0.037 & Y_0 = -4.386 \\ dq + w_2 = -1.368 & \end{array}$$

2. aus den Deklinationen:

$$\begin{array}{l|l} dp + w_1 = +0''.408 & x_0 = +0''.206 \\ dq + w_2 = +1.090 & y_0 = -3.284 \\ & z_0 = +2.033 \end{array}$$

Die Übereinstimmung der doppelt bestimmten Werte ist eine gute. Indessen sind, wie L. Struve in einer zweiten Ab- andlung erwähnt, noch einige Korrektionen anzubringen. Zu- rst erfordert die von ihm benutzte Planetenpräzession $d\lambda$, um e mit den neuesten Werten in Übereinstimmung zu bringen, ie Korrektion $-0''.81$ und eine Verbesserung des Äquinoktiums m Betrage von $+1''.62$, so daß die beobachteten $d\alpha$ die esamtkorrektion $+0''.81$ zu erhalten haben. Dasselbe wird rreicht, wenn man

$$dr + w_3 = -2''.725 + 0''.81 = -1''.92$$

nimmt. Eine Ausgleichung der Rektaszensionen und Dekli-

[1]) L. Struve, Bestimmung der Konstante der Präzession. St. Peters- rg 1887 und in Astron. Nachrichten, Nr. 3729—30.

nationen zusammen hat leider L. Struve nicht im allgemein
Fall ausgeführt. Da es sich hier nur um ungefähre A
Abschätzungen handelt, habe ich mich damit begnügt, d
doppelt bestimmten Werte nach Maßgabe der aus den m
folgenden Gewichte überschlagsweise zu vereinigen. So e
gibt sich

$$\left.\begin{aligned} dp + w_1 &= +\,0''.34 \\ dq + w_2 &= +\,0.87 \\ dr + w_3 &= -\,1''.92 \end{aligned}\right\}$$

Diese Rotationskomponenten beziehen sich auf das m
dem Äquator orientierte Koordinatensystem. In Bezug auf d
Ekliptik, wo also, wie früher die x-Achse nach dem Widd
punkt, die y-Achse nach $+\,90^{0}$ Länge und die z-Achse n
Norden zeigt, findet man, wenn ε die Schiefe bedeutet:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= w_1 + dp = +\,0''.34 \\ \Omega_2 &= (w_2 + dq)\cos\varepsilon + (w_3 + dr)\sin\varepsilon = +\,0''.04 \\ \Omega_3 &= -(w_2 + dq)\sin\varepsilon + (w_3 + dr)\cos\varepsilon = -\,2''.11 \end{aligned}$$

Mehr läßt sich aus den Eigenbewegungen der Bradleysch
Sterne nicht schließen, denn man kann selbstverständlich d
Rotation des Fixsternsystems von der Drehung des Inert
systems gegen das empirische nicht trennen. Nimmt man a
die oben angegebenen Werte für die Drehkomponenten d
Inertialsystems

$$\Omega_x = 0''.00; \quad \Omega_y = +\,0''.03; \quad \Omega_z = +\,7''.50$$

so werden die Drehkomponenten des Fixsternsystems Ω'_x, Ω'_y, Ω'_z:

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= +\,0''.34, \\ \Omega'_y &= +\,0''.01 \end{aligned} \qquad \Omega'_z = -\,9''.61.$$

Man wird wohl kaum behaupten können, daß diese Zahle
den Betrag der Drehung des Inertialsystems $\Omega_z = 7''.50$, w
ihn die säkularen Veränderungen der inneren Planetenbahne
ergaben, besonders wahrscheinlich macht. Denn es ist, trot
der speziellen Annahmen, die gemacht worden sind, immerhi

verdächtig, daß eine Drehung des Fixsternhimmels hervorgeht, deren Achse sehr nahe senkrecht zur Ekliptik steht, die doch in keiner Weise eine Beziehung zum Fixsternsystem zu haben scheint.

Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich nur Ansätze zu Betrachtungen, die zum Teil erst in der Zukunft werden weitergeführt werden können. Namentlich wird, wie schon bemerkt, die Ableitung und Benutzung der Eigenbewegung entfernter Sterne von großer Bedeutung werden. Die Konstanz der Drehkomponenten *w* ist bisher nichts als eine ganz willkürliche Annahme. Andererseits mögen bei den Säkularveränderungen der Planetenbahnen noch rein mechanische Vorgänge vorliegen, deren Einwirkung bisher nicht berücksichtigt worden ist, wie dies ohne Zweifel bei der Bewegung des Merkurperihels der Fall ist. Wir werden nach alle dem wohl mit einiger Sicherheit den Satz aussprechen dürfen, daß sich das im Gebrauch befindliche astronomische empirische Koordinatensystem nicht um mehr als um einige und wahrscheinlich ganz wenige Bogensekunden im Jahrhundert um ein Inertialsystem drehen kann.

Die südbayerische Dreieckskette,

eine neue Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und der Basis von Oberbergheim bei Strassburg.

Von **Dr. M. Schmidt.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

(Mit Tafel I.)

Im Herbst des Jahres 1801 ist unter der Oberleitung des französischen Oberst Bonne und unter Mitwirkung französischer und bayerischer Offiziere und Topographen zwischen München und Aufkirchen bei Erding die Messung einer Grundlinie ausgeführt worden, die zu den längsten jemals gemessenen Grundlinien gehört und den Zwecken einer von der Kurfürstlichen Bayerischen Regierung angeordneten Landestriangulierung diente. Durch ein das ganze Land überspannendes Netz großer Dreiecke wurde zugleich die Grundlage einer auf 22 Blätter in 1:100000 berechneten kartographischen Darstellung des Landes geschaffen, die später durch französische Kartographen bis auf einige unvollendet gebliebene Blätter in Kupferstich ausgearbeitet und unter dem Titel „Carte de la Bavière au 1:100000 17 feuilles en noir et 1 tableau d'assemblage, gravure sur cuivre" unter den Kartenwerken des Service géographique de l'armée française in Paris im Jahre 1810 veröffentlicht wurde.

Diese oberbayerische Grundlinie, deren Messung leider nur einmal erfolgte, hat neue Wichtigkeit und erhöhte Bedeutung bekommen, als im Jahre 1807 eine Grundsteuervermessung in Bayern in Angriff genommen und die Landestriangulierung bis an die erweiterten Grenzen des Königreiches und auf die Rheinpfalz ausgedehnt wurde. In Verbindung mit zwei weiteren, im Jahre 1807 zwischen Erlangen und Nürnberg und im Jahre 1819

im Rheintale bei Speyer gemessenen Grundlinien ist die altbayerische Basis für alle seitdem in Bayern für wissenschaftliche, staatswirtschaftliche und topographische Zwecke ausgeführte Vermessungsarbeiten von grundlegender Bedeutung geworden und hat dabei den strengsten Genauigkeitsforderungen Genüge leisten müssen.

Die auf den Meeresspiegel reduzierte Länge der zwischen den versteinten Endpunkten unmittelbar gemessenen Strecke der Grundlinie ist in dem im Jahre 1873 erschienenen amtlichen Werke „Die bayerische Landesvermessung“ mit Berücksichtigung aller nötigen Verbesserungen auf 21 653,75 m und der durch trigonometrische Berechnung daraus abgeleitete Abstand der beiden Turmspitzen von München und Aufkirchen auf 28 497,10 m festgestellt worden.

Am gleichen Orte finden sich auch Angaben über den Grad der Genauigkeit der in Bayern ausgeführten Basismessungen. Dieselben sind durch Vergleichung je zweier Werte einiger Hauptdreiecksseiten gewonnen worden, die aus verschiedenen Grundlinien berechnet sind. Die Unterschiede sind gering und betragen beispielsweise für die aus der Münchener und Nürnberger Grundlinie abgeleitete Größe der 29,7 km langen Seite St. Johann—Hohenstein 67 mm pro km und bei der 69,4 km langen Seite Hohenstein—Wülzburg 42 mm pro km.

Einen Vergleich der vor mehr als 100 Jahren ausgeführten Messung der altbayerischen Grundlinie mit neueren Basismessungen, bei welchen vollkommenere Apparate und genauere Meßmethoden Verwendung fanden, erhält man mittelst einer in den Jahren 1901 bis 1904 auf dem 48. Breitenparallel in Südbayern hergestellten Hauptdreieckskette. (Tafel I.)

Dieselbe schließt sich im Westen an die im Jahre 18[illegible] von E. Hammer bearbeitete „Triangulierung zur Verbindung des rheinischen Netzes mit dem bayerischen Hauptdreiecksnetz“ an und erstreckt sich in östlicher Richtung bis in die Gegend von Salzburg, woselbst sie mit den durch das K. und K. Militärgeographische Institut in Wien gemessenen Dreiecken verbunden ist.

Durch die beiden, den südlichen Teil von Oberbayern, Schwaben und Württemberg durchziehenden Dreiecksketten wird auf dem kürzesten Wege eine Verbindung der altbayerischen Grundlinie bei München mit der von der K. preußischen Landesaufnahme in der Gegend von Straßburg bei Oberbergheim gemessenen Basis hergestellt.

Die neue südbayerische Dreieckskette ist mit ausgiebiger Benützung älterer Hauptdreieckspunkte der ursprünglichen bayerischen Landestriangulierung entworfen. Von den zu Anfang des XIX. Jahrhunderts auf den jetzt wiederbenützten Punkten ausgeführten Winkelmessungen, die in dem Werke „Die bayerische Landesvermessung" veröffentlicht sind, konnten jedoch nur jene der Stationen Stauffersberg, Altomünster und Aufkirchen als den heutigen Genauigkeitsforderungen entsprechend angesehen und in die neue Dreieckskette übernommen werden. Die meisten übrigen Winkel sind durch direkte Messungen neu bestimmt worden.

Da ferner von einigen Anschlußpunkten der neuen Kette an die Nachbartriangulierungen gute Winkelmessungen aus den Jahren 1901 bis 1903 und für den Anschluß des astronomischen Netzes in Schwaben solche aus den Jahren 1890 bis 1894 bereits vorlagen, so konnten die noch weiter erforderlichen Winkelmessungen in der neuen Kette im Laufe des Jahres 1904 auf allen Punkten Erledigung finden bis auf die Station Mitbach, woselbst die Messungen erst im Sommer 1905 zur Ausführung gelangten.

Durch dankenswertes Entgegenkommen des K. Bayerischen Katasterbureaus waren zur Ausführung der Winkelbeobachtungen die Herren Katastergeometer Wölfel und Netzsch nebst den erforderlichen Gehilfen der Erdmessungskommission zur Verfügung gestellt worden, während von österreichischer Seite in den Anschlußdreiecken 10 bis 15 die Beobachtungen durch Herrn Hauptmann Andres des K. und K. Militärgeographischen Instituts in Wien ausgeführt wurden. Die erforderlichen Meßinstrumente sind aus den Beständen der K. B. Erdmessungskommission und des geodätischen Instituts der K. Technischen

Hochschule in München entnommen worden. Insbesondere der verwendete Mikroskoptheodolit mit 23 cm Kreisdurchm[illegible] aus der Werkstätte von Hildebrand in Freiberg Eigentum [illegible] geodätischen Instituts.

Das bei den Winkelmessungen angewendete Beobachtun[illegible] verfahren bestand darin, daß die einzelnen Dreieckswi[illegible] jedesmal in sechs verschiedenen Kreisständen aus je 8 [illegible] 12 Doppeleinstellungen jeder Richtung bestimmt wurden.

Über den bei den Winkelmessungen erreichten Genau[illegible] keitsgrad ist folgendes zu bemerken.

Der mittlere Winkelfehler berechnet sich aus den Dr[illegible] eckswidersprüchen Δ nach der internationalen Formel

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{3n}}$$

aus den in der Hauptkette, sowie für die Basis- und Azim[illegible] anschlüsse und für den österreichischen Anschluß in Betra[illegible] kommenden 22 Dreiecken zu

$$m = \pm 0\overset{''}{.}455.$$

Stellt man dagegen die Dreieckswidersprüche in drei na[illegible] der Verschiedenheit der Art der Winkelbeobachtungen gebild[illegible] Gruppen zusammen, so erhält man:

a) aus den Dreiecken 1 bis 9 der Hauptkette und [illegible] Anschlußdreiecken 1[a], 5[a] und 6[a], in welchen 14 aus der Land[illegible] vermessung übernommene Winkel nach dem Repetitionsv[illegible] fahren, die übrigen 22 Winkel aber mit Doppeleinstellung[illegible] in beiden Fernrohrlagen in sechs verschiedenen Kreisstän[illegible] beobachtet sind: $m_1 = + 0\overset{''}{.}357,$

b) für die sechs österreichischen Anschlußdreiecke 10 bis 1[illegible] in welchen die Winkel zur Hälfte von bayerischer Seite, z[illegible] Hälfte von Seite Österreichs gemessen sind:

$$m_2 = + 0{,}432,$$

c) für die das astronomische Viereck in Schwaben bilde[illegible] den vier Dreiecke, deren Winkel der Mehrzahl nach aus Azimu[illegible] differenzen berechnet sind:

$$m_3 = + 0{,}691.$$

Was die Widersprüche in den Seitenanschlüssen anlangt, so findet sich, wenn man zu dem S. 349 der bayerischen Landesvermessung in bayerischen Ruten angegebenen Wert des Log. Sinus der Basisseite München—Aufkirchen die Reduktion von Ruten- auf Metermaß und das Additament von 14,4 Einheiten der siebenten Logarithmenstelle hinzufügt

$$\text{Log. } M\,A = 4{,}454\,8006.7.$$

Hieraus ergibt sich für den Anschluß an die österreichischen Dreiecke bei Salzburg im Dreieck 9 für die Seite Hochgern—Asten

$$\text{Log. } H\,A = 4{,}619\,6316.2.$$

Nach einer Mitteilung des K. und K. Militärgeographischen Instituts in Wien vom 26. November 1904 beträgt der entsprechende, österreichischerseits bestimmte Wert:

$$\text{Log. } H\,A = 4{,}619\,6344.7.$$

Die Anschlußdifferenz in dieser Seite ist somit $-28{,}5.10^{-7}$ bezw. 0,274 m, d. i. 6,6 mm pro km oder relativ 1 : 152 000.

Für die Seite Hochgern—Rettenstein findet sich nach der bayerischen Messung im Dreieck 15

$$\text{Log. } H\,R = 4{,}693\,2188.7.$$

Nach der österreichischen Angabe ist

$$\text{Log. } H\,R = 4{,}693\,2205.6.$$

Als Anschlußdifferenz in dieser Seite hat man somit $-16{,}9.10^{-7}$ bezw. 0,190 m, d. i. 3,8 mm pro km oder relativ 1 : 260 000.

Der Anschluß an die im Jahre 1892 von Hammer bearbeitete württembergische Triangulierung wird durch die Dreiecksseite Aenger—Roggenburg vermittelt.

Da jedoch die von Hammer berechnete Länge dieser Seite sich auf die über 500 km entfernte Grundlinie des rheinischen Dreiecksnetzes bei Bonn bezieht, ist es offenbar vorzuziehen, die Länge der Seite Aenger—Roggenburg aus der mit ihr nahezu auf dem gleichen Parallelkreis gelegenen und nur 200 km entfernten Basis von Oberbergheim bei Straßburg herzuleiten.

Die Verbindung der vorerwähnten Vergleichsseite mit der zuletzt genannten Grundlinie ergibt sich durch Vermittelung der Seite Donon—Straßburg des rheinischen Netzes. Der Logarithmus dieser Seite ist im „Rheinischen Netz" S. 127 und „Lotabweichungen" Heft II, S. 37 aus der alten Bonner Basis berechnet zu

Log. Do.-Str. = 4,642 6742.5.

In „Hauptdreiecke" Bd. XI, S. 89 findet sich für diese Seite, berechnet aus der Oberbergheimer Basis:

Log. Do.-Str. = 4,642 6766.9.

Zur Reduktion auf das internationale Meter ist der erste Logarithmus um $+ 38.10^{-7}$, der letztere um $+ 58.10^{-7}$ zu verbessern.

Man hat daher die verbesserten Logarithmen der Seite Donon—Straßburg:

Log. Do.-Str. = 4,642 6780.5 (aus der alten Bonner Basis)
Log. Do.-Str. = 4,642 6824.9 (aus der Oberbergheimer Basis)

mit der Differenz $44,4.10^{-7}$.

Um diesen Betrag sind die aus dem rheinischen Netz berechneten und auf das internationale Meter reduzierten Seitenlogarithmen der Hammerschen Triangulation zu vergrößern.

Man hat also für den Logarithmus der Seite Roggenburg—Aenger die Verbesserung $(+ 38,0 + 44,4)\, 10^{-7} = + 82,4.10^{-7}$ und erhält

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8256.6 (Hammers Triang. S. 89)
hiezu die Verbesserung = + 82,4

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8339.0 (verbesserter Wert).

Wogegen sich aus der südbayerischen Dreieckskette mit der altbayerischen Grundlinie findet:

Log. Ae.-Rog. (Th) = 4,793 8332.5.

Die Anschlußdifferenz beträgt somit $- 6,5.10^{-7}$ bezw. 0,093 m oder 1,5 mm pro km, d. i. relativ 1 : 670000.

Ein zweiter Vergleich zwischen der alten Bonner Basis und jener von Oberbergheim ergibt sich nach Dr. Kühnen (Verhandl., Brüssel 1892, S. 533) durch die Seite Ballon—Donon (rhein. Netz, S. 127), deren Logarithmus reduziert auf das internationale Meter 4,833 7669 ist.

Berechnet man diese Seite aus dem Dreieck Ballon-Donon-Bressoir der preußischen Landestriangulierung mit den „Hauptdreiecke" XI, S. 204 im Jahre 1902 publizierten Elementen, so erhält man

$$\text{Log. Ba.-Do.} = 4{,}833\,7711$$

und die Differenz + 42 gegen den aus dem rheinischen Netz berechneten Wert. Somit ist für die Seite Aenger—Roggenburg die Verbesserung $(+ 38 + 42).10^{-7} = + 80.10^{-7}$ und der verbesserte Logarithmus der Hammerschen Triangulierung

$$\text{Log. Ae.-Rog.} = 4{,}793\,8336{,}6.$$

Der entsprechende, aus der altbayerischen Basis berechnete Wert ist

$$\text{Log. Ae.-Rog.} = 4{,}793\,8332{,}5.$$

Die logarithm. Anschlußdifferenz zwischen der südbayerischen Kette und der württembergischen Triangulierung beträgt somit, wenn man dieser die Basis von Oberbergheim zu Grunde legt, $-4{,}1.10^{-7}$ bezw. 0,059 m oder 0,9 mm pro km, d. i. relativ 1 : 1054 000.

Diese überraschend gute Übereinstimmung ist wohl zum Teil einem günstigen Zufall zuzuschreiben. Gleichwohl beweist dieselbe im Zusammenhalt mit dem befriedigenden Anschluß an die österreichischen Dreiecke, deren Seitenlängen bereits auf das internationale Meter reduziert sind, daß die zu Beginn des letzten Jahrhunderts ausgeführte Abgleichung der in Bayern verwendeten Basisapparate nach dem Pariser-Platinmeter, dessen Länge mit der des internationalen Meters übereinstimmt, mit der größten Genauigkeit ausgeführt worden ist. Die aus den bayerischen Basismessungen abgeleiteten geodätischen Längen verdienen daher in metronomischer Beziehung volles Vertrauen.

Südbayerische Dreieckskette.

Zusammenstellung der Dreieckswinkel und Seitenlogarithmen.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel gemessen	Dreieckswinkel reduz.	Zahl der Repet. bezw. Doppelmessungen	Beobachtungsnachweis	Seitenlogarithmen aus der altbayerischen Basis berechnet
1	Roggenburg	53° 00′ 39.″6	36.″63	62 R.	Bayer. L. 187, 331	4,810 2330.1
	Peißenberg	50 16 40.1	37.13	69 R.	„ „ 179, 329	4,798 8332.5
	Aenger	76 42 49.2	46.24	110 R.	„ „ 94/95, 310	4,896 0419.3
	$E = 9.''88 \quad \Delta = +0.''98$	180 00 08.9	0.00		„ „ 454, 459	
1[a]	Roggenburg	62° 50′ 25.″43	24.″70	48 D.	W. 1901	4,746 4164.6
	Aenger	20 04 57.83	57.10	84 D.	W. 1903	4,332 9213.8
	Kirchheim	97 04 38.92	38.20	54 D.	W. 1903	4,798 8332.5
	$E = 3.''01 \quad \Delta = -0.''83$	180 00 02.18	0.00			
2	Peißenberg	30° 38′ 39.″0	36.″30	108 R.	Bayer. L. 179, 329/330	4,610 2345.7
	Roggenburg	69 31 53.8	51.10	92 R.	„ „ 186, 331	4,874 6004.1
	Stauffersberg	79 49 35.3	32.60	45 R.	„ „ 194, 333	4,896 0419.3
	$E = 7.''60 \quad \Delta = +0.''50$	180 00 08.1	0.00			
3	Peißenberg	32° 33′ 28.″58	25.″90	116 R.	Bayer. L. 180, 329/330	4,608 3440.3
	Stauffersberg	63 59 50.30	47.63	105 R.	„ „ 193, 333	4,831 0952.2
	Altomünster	83 26 49.14	46.47	53 R.	„ „ 99, 311	4,874 6004.1
	$E = 6.''91 \quad \Delta = +1.''11$	180 00 08.02	0.00			
4	Peißenberg	32° 22′ 56.″43	54.″42	153 R.	Bayer. L. 176, 329	4,560 0688.5
	Altomünster	56 01 49.91	47.90	127 R.	„ „ 98, 311	4,749 9894.2
	München	91 35 19.69	17.68	46 D.	N. 1904	4,831 0952.2
	$E = 5.''16 \quad \Delta = +0.''87$	180 00 06.03	0.00			

5	Peißenberg	49°57′55.″39	52.″56	47 D.	N. 1904	4,766 9413.5
	München	82 36 57.11	54.28	48 D.	N. 1904	4,879 2952.2
	Wendelstein	47 25 15.99	13.16	60 D.	N. 1904	4,749 9894.2
	$E = 8.''24$ $\Delta = +0.''25$	180 00 08.49	0.00			
5ª	München, Frauenturm	73°00′31.″45	31.″16	112 D.	N. 1904	4,761 6389.6
	München, Sternwarte	104 30 42.25	41.97		A. G. A. III. S. 218, 198	4,766 9413.5
	Wendelstein, Pfeiler	2 28 47.16	46.87	48 D.	N. 1904	3,417 1610.0
	$E = 0.''36$ $\Delta = +0.''50$	180 00 00.86	0.00			
6	Wendelstein	35°26′31.″28	29.″85	46 D.	N. 1904	4,532 7465.0
	München	60 39 58.80	57.37	49 D.	N. 1904	4,709 8194.4
	Mitbach	83 53 34.22	32.78	49 D.	N. 1905	4,766 9413.5
	$E = 4.''39$ $\Delta = -0.''09$	180 00 04.30	0.00			
6ª	München	36°01′14.″50	13.″85	88 R.	Bayer. L. 168	4,302 6330.2
	Aufkirchen	87 22 51.89	51.24	52 R.	" " 103	4,532 7465.0
	Mitbach	56 35 55.56	54.91	82 R.	" " 167	4,454 8006.7
	$E = 1.''44$ $\Delta = +0.''51$	180 00 01.95	0.00			
7	Wendelstein	30°24′00.″39	59.″28	48 D.	N. 1904	4,423 2259.5
	Mitbach	71 22 15.89	14.78	48 D.	N. 1905	4,695 6766.2
	Oberhof	78 13 47.06	45.94	44 D.	N. 1904	4,709 8194.4
	$E = 3.''25$ $\Delta = +0.''09$	180 00 03.34	0.00			
8	Wendelstein	50°00′05.″19	04.″02	30 D.	N. 1904	4,585 8547.4
	Oberhof	49 26 08.70	07.53	48 D.	N. 1904	4,582 2206.1
	Hochgern	80 33 49.63	48.45	48 D.	N. 1904	4,695 6766.2
	$E = 3.''67$ $\Delta = -0.''15$	180 00 03.52	0.00			
9	Hochgern	39°03′01.″92	01.″17	56 D.	N. 1904	4,430 7280.5
	Oberhof	76 43 47.98	47.23	48 D.	N. 1904	4,619 6316.2
	Asten	64 13 12.35	11.60	50 D.	N. 1904	4,585 8547.4
	$E = 2.''55$ $\Delta = -0.''30$	180 00 02.25	0.00			

Österreichische Dreiecksberechnung, mitgeteilt vom K. und K. Militärgeographischen Institut.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel gemessen	Dreieckswinkel reduz.	Zahl der Repet. bezw. Doppelmessungen	Beobachtungsnachweis	Seitenlogarithmen nach österreichischer Angabe
10	Hochgern	103° 00′ 11.″61	10.″45	86 D.	W. 1903	4,791 5403.0
	Asten	36 00 45.14	43.98	64 D.	W. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	40 59 06.72	05.57	64 D.	A. 1903	4.619 6344.8
	$E = 3.''84$ $\Delta = -0.''37$	180 00 03.47	0.00			
11	Asten	42° 11′ 42.″73	41.″09	96 D.	W. 1903	4,656 3491.3
	Schafberg	66 28 55.63	52.45	86 D.	A. 1903	4,791 5403.0
	Watzmann	71 19 29.17	26.46	64 D.	A. 1903	4,805 7123.6
	$E = 6.''73$ $\Delta = +0.''80$	180 00 07.53	0.00			
12	Hochgern	65° 27′ 02.″64	00.″65	72 D.	W. 1903	4,805 7123.4
	Asten	78 12 27.87	25.25	96 D.	W. 1903	4,837 5966.9
	Schafberg	36 20 36.03	34.10	86 D.	A. 1903	4,619 6344.6
	$E = 6.''61$ $\Delta = -0.''07$	180 00 06,54	0,00			
13	Hochgern	37° 33′ 08.″97	07.″97	72 D.	W. 1903	4,656 3491.3
	Schafberg	30 08 19.60	17.07	86 D.	A. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	112 18 35.89	34.96	112 D.	A. 1903	4,837 5966.9
	$E = 3.''97$ $\Delta = +0.''49$	180 00 04.46	0.00			
14	Rettenstein	42° 18′ 26.″39	25.″10	136 D.	A. 1903	4,572 1644.3
	Watzmann	62 48 26.52	25.23	32 D.	A. 1903	4,693 2205.6
	Hochgern	74 53 10.95	09.67	80 D.	N. 1904	4,728 7963.9
	$E = 4.''51$ $\Delta = -0.''64$	180 00 03.86	0.00			
15	Wendelstein	70° 34′ 59.″16	58.″21	48 D.	N. 1904	4,693 2188.7
	Hochgern	62 29 46.23	45.28	48 D.	N. 1904	4,666 5633.0
	Rettenstein	46 55 17.45	16.51	78 D.	A. 1903	4,582 2206.1
	$E = 4.''23$ $\Delta = -1.''39$	180 00 02.84	0.00			Aus der altbayer. Basis berechnet.

						Basis berechnet
1b	Aenger Kirchheim Peißenberg $E = 7''60$ $\Delta = -0''45$	56°37′55″91 69 26 09.82 53 56 01.42 180 00 07.15	53″53 07.44 59.03 0,00		Ö. 1893 A. G. A. V. 89, V. 98 Ö. 1893 A. G. A. V. 176, V. 177 Ö. 1890 A.G.A.V.112,V.113,IV.219 W. 1902	4,760 5940.5 4,810 2330.1 4,746 4175.5
1c	Aenger Peißenberg Grünten $E = 3''20$ $\Delta = +1''67$	64°49′14″30 19 30 36.36 95 40 14.21 180 00 04.87	12″68 34.74 12.58 0.00		Ö. 1893 A. G. A. V. 98, V. 104 W. 1902 Ö. 1893 A. G. A. V. 114, V. 113 IV. 145	4,769 0004.4 4,336 0674.2 4,810 2330.1
1d	Aenger Kirchheim Grünten $E = 2''61$ $\Delta = +1''60$	121°27′10″21 15 24 49.19 43 08 04.81 180 00 04.21	08″81 47.79 03.40 0.00		Ö. 1893 A. G. A. V. 89, V. 104 Ö. 1894 A. G. A. V. 176, V. 178 Ö. 1889 A. G. A. V. 113/114, IV. 164	4,842 5319.7 4,336 0675.8 4,746 4175.5
1e	Grünten Kirchheim Peißenberg $E = 8''20$ $\Delta = -0''39$	52°32′09″40 54 01 20.63 73 26 37.78 180 00 07.81	06″80 18.03 35.17 0.00		Ö. 1889 A.G. A. IV. 145/164, V. 113 Ö. 1894 A. G. A. V. 177 Ö. 1890 A.G. A. IV. 202/219, V. 112	4,760 5941.0 4,769 0004.4 4,842 5319.4

Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.

Von **Edmund Landau.**

(*Eingelaufen 3. Februar.*)

Einleitung.

Man verdankt Herrn Nielsen eine Anzahl interessanter Arbeiten über Fakultätenreihen, d. h. Reihen von der Form

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ komplexe Konstanten sind und x eine komplexe Variable bezeichnet.[1]) Herr Nielsen hat seine Untersuchungen im dritten Teile des kürzlich erschienenen Werkes „Handbuch der Theorie der Gammafunktion" [2]) im Zusammenhang dargestellt.

Die wichtigste Grundlage der Theorie der Fakultätenreihen besteht im folgenden

Satz I: Wenn $\Omega(x)$ für einen Wert $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ für jedes $x = x_1$, welches die Ungleichheitsbedingung

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

erfüllt.

---

[1]) Eine Reihe von der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ würde dasselbe bedeuten; es ist jedoch zweckmäßig, die Schreibweise (1) anzuwenden.

[2]) Leipzig (Teubner), 1906, S. 237 ff.

Hierbei handelt es sich natürlich nur um solche Wert von x, welche von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind, da sonst die Glieder der Reihe sinnlos sind.

Der Satz I läßt sich offenbar auch folgendermaßen aussprechen:

Der Konvergenzbereich einer Fakultätenreihe besteht aus einer Halbebene, welche links durch eine Parallele zur Achse des Imaginären begrenzt ist.

Mit anderen Worten: zu jeder Fakultätenreihe gehört eine bestimmte reelle Zahl λ derart, daß (abgesehen von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$) die Reihe für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert, für $\Re(x) < \lambda$ divergiert. Das Verhalten für $\Re(x) = \lambda$ bleibt ebenso unbestimmt wie das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreise.

Hierbei sind offenbar die beiden extremen Fälle $\lambda = \infty$ und $\lambda = -\infty$ auch möglich, in welchen der Konvergenzbereich nicht vorhanden bezw. gleich der ganzen x-Ebene ist.

Ein Beweis des wichtigen Satzes I ist zuerst von Herrn Nielsen[1]) veröffentlicht worden; derselbe stützt sich auf gewisse Integraldarstellungen der Fakultätenreihen und ist recht kompliziert. Auch erscheint mir Herrn Nielsens Beweisführung nicht einwandfrei.[2]) Ich werde die vorliegende Arbeit damit beginnen, daß ich einen direkten und sehr einfachen Beweis des Satzes mitteilen werde. Ich benutze diese Gelegenheit, um Herrn Jensens Verdienste in dieser Frage besonders hervorzuheben. Herr Nielsen zitiert von dessen Publikationen nur eine aus dem Jahre 1891,[3]) in welcher Herr Jensen den Satz I ohne Beweis

[1]) „Recherches sur les séries de factorielles", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 19, 1902, S. 416–429; „Les séries de factorielles et les opérations fondamentales", Mathematische Annalen Bd. 59, 1904, S. 356–359; „Handbuch etc.", S. 239–245.

[2]) Schon die von ihm (l. c., S. 420, bezw. S. 357, bezw. S. 241–24.) mit λ und λ' bezeichneten Zahlen sind dort so definiert, daß sie nur unter einschränkenden Annahmen über die Koeffizienten der gegebenen Fakultätenreihe existieren.

[3]) „Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling", Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B, S. 6.

ausspricht. Ich füge folgende zwei Zitate hinzu. Herr Jensen hat schon im Jahre 1881 den Satz I ohne Beweis angegeben;[1]) er hat ferner in einer sehr wichtigen Arbeit[2]) aus dem Jahre 1884 den Satz I und verschiedene Analoga für andere Reihentypen ohne Beweis ausgesprochen, und er hat dort nur für ein verwandtes Problem, nämlich die Frage nach dem Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe, den Beweis ausgeführt. Ich habe schon bei einer anderen Gelegenheit[3]) einmal die Bedeutung dieser Jensenschen Arbeit hervorgehoben und dort dessen Priorität für den Satz erwähnt, daß das Konvergenzgebiet einer Dirichletschen Reihe eine Halbebene ist. Dieser Satz war erst zehn Jahre später dadurch allgemein bekannt geworden, daß Herr Cahen[4]) ihn unabhängig wiederentdeckt hat.

Im § 1 des Folgenden werde ich auf direktem Wege außer dem Satz I die anderen bekannten Sätze beweisen, welche die Grundlage der Theorie der Fakultätenreihen bilden. Im § 2 begründe ich einen eigentümlichen Zusammenhang zwischen einer Fakultätenreihe und einer zugehörigen Dirichletschen Reihe in Bezug auf ihre gleichzeitige Konvergenz. Bei dieser Gelegenheit wird sich eine Darstellung der Abszisse λ der Grenzgeraden einer Fakultätenreihe ergeben. In § 3 dehne ich jenen Zusammenhang zweier zugehöriger Reihen auf den analytischen Charakter der durch sie definierten Funktionen aus. In § 4 beweise ich einen Satz über das Verhalten der durch eine Fakultätenreihe definierten analytischen Funktion auf der Grenzgeraden. Zu allen im vorangehenden behandelten Sätzen beweise ich kurz in § 5 die Analoga für Binomialkoeffizientenreihen, d. h. Reihen von der Form

---

[1]) Tidsskrift for Mathematik, Ser. 4, Bd. 5, S. 130, Aufgabe 451.

[2]) „Om Raekkers Konvergens", ebenda, Ser. 5, Bd. 2, S. 70—72.

[3]) „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903, S. 65.

[4]) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 11, 1894, S. 85.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n};$$

Herr Nielsen, der auch über diese Reihen mehrere interessante Untersuchungen publiziert hat,[1]) war hier nicht bis zum Beweise des Analogons zum Satze I, also der Existenz der Konvergenzhalbebene, gelangt, obgleich ein solcher bereits auf ganz einfachem Wege von Herrn Bendixson[2]) geführt war. In § 6 behandle ich kurz zwei allgemeinere, schon von Herrn Jensen[3]) erwähnte Klassen von Reihen, nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\dots(x+\gamma_n)}$$

und

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n),$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ eine Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Größen ist, für welche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[4]) Für die Reihen (2) hatte bereits Herr Bendixson[5]) die von Herrn Jensen ausgesprochene Existenz der Konvergenzhalbebene, sowie die gleichmäßige Konvergenz in der Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene bewiesen; doch ist der in § 6 des Folgenden hierfür gegebene Beweis etwas einfacher. und

---

[1]) Literatur s. „Handbuch etc.“, S. 124 ff. und 225 ff.

[2]) „Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss“, Acta mathematica, Bd. 9, 1887, S. 15—20. Herr Nielsen schreibt mir in einer nachträglichen Note auf S. 325 seines Buches irrtümlich diesen Satz zu.

[3]) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 71—72.

[4]) Es ist nicht allgemeiner, von einer Folge reeller, monoton ins Unendliche wachsender Größen zu sprechen, für welche die über alle (mit etwaiger Ausnahme von 0) erstreckte Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ divergiert.

[5]) l. c., S. 15—23.

ich beweise auch neue Sätze über diese Reihen. In § 7 behandle ich einige Eigenschaften der Integrale von der Gestalt

$$\int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-s}\, dt,$$

welche mit den Fakultätenreihen eng verwandt sind; diese Integrale sind schon mehrfach untersucht worden, und Herr Pincherle[1]) hat ihrer Theorie eine umfassende Darstellung gewidmet, zu welcher ich einige Bemerkungen und Zusätze mache.

§ 1.

Herr Dedekind[2]) hat folgenden Konvergenzsatz bewiesen und Herr Jensen[3]) hat ihn wiedergefunden:

Hilfssatz 1: Wenn $b_0, b_1, \ldots$ und $c_0, c_1, \ldots$ zwei Folgen komplexer Größen sind, und wenn die beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergieren, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n. \tag{3}$$

Beweis: Beide Autoren beweisen diesen Satz mit Hilfe des Abelschen Kunstgriffes der partiellen Summation folgendermaßen:

[1]) „Sur les fonctions déterminantes", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 22, 1905, S. 9—68.

[2]) Vgl. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 2. Aufl., 1871, S. 373. Für reelle Werte der Größen b_n, c_n war der Satz schon von du Bois-Reymond („Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen", Antrittsprogramm, Freiburg 1870, S. 10) bewiesen worden.

[3]) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 69.

Wenn

$$\sum_{n=0}^{t} b_n = B_t, \; B_{-1} = 0$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} (B_n - B_{n-1}) c_n$$

$$(4) \qquad = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1}.$$

Nach Voraussetzung konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |,$$

also auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1}),$$

so daß

$$\lim_{t=\infty} c_{t+1}$$

existiert; ferner existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} B_t,$$

so daß insbesondere für alle n

$$B_n < B$$

ist, wo B eine von n unabhängige Konstante bezeichnet. Weg

$$B_n (c_n - c_{n+1}) < B (c_n - c_{n+1})$$

ist also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (c_n - c_{n+1})$$

konvergent; auf der rechten Seite von (4) nähern sich al
beide Glieder für $t = \infty$ einem Grenzwert; damit ist die Kon
vergenz der Reihe (3), also der Hilfssatz 1 bewiesen.

Herr Dedekind[1]) beweist mit Hilfe der Transformationsformel (4) auch folgenden

Hilfssatz 2: Es sei erstens

$$\left| \sum_{n=0}^{t} b_n \right| = | B_t |$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ unterhalb einer endlichen Schranke B gelegen; es sei zweitens

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0,$$

und es sei drittens die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |$$

konvergent. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n. \tag{3}$$

Beweis: Wie oben ergibt sich wegen

$$| B_n (c_n - c_{n+1}) | \leq B | c_n - c_{n+1} |,$$

daß das erste Glied auf der rechten Seite von (4) sich für $t = \infty$ einem Grenzwerte nähert, und wegen der beiden ersten Voraussetzungen ist

$$\lim_{t=\infty} B_t c_{t+1} = 0,$$

so daß aus (4) die Konvergenz der Reihe (3) folgt.

Jeder der beiden Hilfssätze 1 und 2 führt nun leicht zum

Satz I:[2]) Wenn eine Fakultätenreihe

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

---

[1]) l. c., S. 371. Für Reihen mit reellen Gliedern ist der Hilfssatz 2 auch schon von du Bois-Reymond (l. c., S. 10) bewiesen worden.

[2]) S. S. 151; x_0 und x_1 sollen weder Null noch ganzzahlig negativ sein.

für $x = x_0$ konvergiert und wenn

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

ist, so konvergiert die Reihe für $x = x_1$.

Wenn man den Beweis auf Grund des Hilfssatzes 2 führt — was hier geschehen soll —, so braucht man nicht die Konvergenz von $\Omega(x_0)$ vorauszusetzen; sondern es genügt, anzunehmen, daß für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|\sum_{n=0}^{t} \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}\right| < B$$

ist.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}$$

gesetzt. Dann ist nach Voraussetzung für alle t

$$\left|\sum_{n=0}^{t} b_n\right| < B.$$

Ferner ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} - \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n+1)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n+1)}$$

$$= \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}\left(1 - \frac{x_0+n+1}{x_1+n+1}\right)$$

$$(5) \qquad = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \cdot \frac{x_1 - x_0}{x_1+n+1}.$$

Bekanntlich ist für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene x

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x)$$

eine endliche, von Null verschiedene Zahl; also erhält man, indem man die Gleichung (6) für x_0 und x_1 ansetzt und dividiert,

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_0(x_0+1)\dots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\dots(x_1+n)} n^{x_1-x_0} = \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)},$$

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\dots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\dots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right|.$$

Aus (7) folgt zunächst wegen $\Re(x_1 - x_0) > 0$, daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n| = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist, womit die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Ferner folgt aus (5) und (7), daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n - c_{n+1}| \, n^{1+\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0|$$

ist, also von einer gewissen Stelle an

$$|c_n - c_{n+1}| < 2 \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0| \, \frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}};$$

hieraus ergiebt sich die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|,$$

so daß auch die dritte Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Derselbe liefert also die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x_1(x_1+1)\dots(x_1+n)} = \Omega(x_1)$$

und damit den Satz I.

Aus Satz I folgt, wie schon in der Einleitung angegeben, die von Herrn Jensen entdeckte Tatsache:

Wenn eine Fakultätenreihe gegeben ist, so sind nur folgende drei Fälle möglich:[1])

[1]) Hierbei ist nur von den Zahlen die Rede, welche von $0, -1, -2, \dots$ verschieden sind.

1. Sie konvergiert überall.
2. Sie konvergiert nirgends.
3. Es gibt eine reelle Zahl λ, so daß die Reihe für $\Re(x) >$ [...] konvergiert, für $\Re(x) < \lambda$ divergiert.

Was das Verhalten der Reihe auf der „Grenzgeraden" od[er] „Konvergenzgeraden" $\Re(x) = \lambda$ betrifft, so gibt es Reihe[n], welche dort überall konvergieren, solche, die dort nirgends un[d] solche, die weder nirgends, noch überall auf dieser Gerade[n] konvergieren. Beispiele dieser Möglichkeiten werden weit[er] unten[1]) angegeben werden.

Hilfssatz 3:[2]) Es seien $b_0, b_1, \ldots$ Konstanten, $c_0, c_1, \ldots$ Funktionen einer komplexen Variabeln x, welche i[n] einem gewissen Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär sind; es sei erstens für alle $t = 0, 1, 2 \ldots$

$$\left|\sum_{n=1}^{t} b_n\right| = |B_t| < B;$$

zweitens konvergiere in $\mathfrak{G}$ c_n gleichmäßig gegen 0; drittens sei in $\mathfrak{G}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n - c_{n+1}$$

gleichmäßig konvergent. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n$$

gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ konvergent.

Beweis: Aus der Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1}$$

[1]) S. S. 172—173.

[2]) Dieser Hilfssatz ist von Herrn Cahen auf S. 79 seiner oben auf S. 153, Anm. 4) zitierten Arbeit bewiesen worden. Herr Cahen stützt auf ihn den Nachweis seines Satzes, daß eine Dirichletsche Reihe in ihrem Konvergenzbereiche eine analytische Funktion darstellt.

folgt wegen

$$|B_n(c_n - c_{n+1})| \leq B|c_n - c_{n+1}|,$$
$$|B_l c_{l+1}| \leq B|c_{l+1}|$$

ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Satz II: Eine Fakultätenreihe ist in einer gewissen Umgebung jeder (von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenen) Stelle im Innern ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergent.

Es genügt offenbar zu beweisen: wenn $\Omega(x)$ für x_0 konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ gleichmäßig für alle $x = u + vi$, welche die Ungleichungen erfüllen

$$x_0 + \gamma_1 \leq u \leq x_0 + \gamma_2, \ -\gamma_3 \leq v \leq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei positive Größen bezeichnen ($\gamma_1 < \gamma_2$), die so klein gewählt sind, daß das obige Rechteck keinen der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ im Innern oder auf dem Rande enthält. In der Tat läßt sich jede (von $0, -1, \ldots$ verschiedene) Stelle der Konvergenzhalbebene in ein solches Rechteck $\mathfrak{S}$ einschließen.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\,a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt. Dann handelt es sich auf Grund des Hilfssatzes 3 lediglich darum, nachzuweisen, daß in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist, und daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{S}$ gleichmäßig konvergiert.

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der drei Zahlen $|x_0|$, $|x_0 + \gamma_1| + \gamma_3$ und $|x_0 + \gamma_2| + \gamma_3$ gewählt wird, so ist in $\mathfrak{S}$ überall

$$|x| = |u + vi| \leq |u| + |v| < \gamma,$$

ebenso

$$|x_0| < \gamma.$$

Es sei [illegible]rner β so gewählt, daß in $\mathfrak{G}$

$$\left|\prod_{\nu=0}^{2\gamma}\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < \beta \tag{8}$$

ist. [illegible] für $|y| \leqq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y+\vartheta|y|^2} \quad (|\vartheta| \leqq 1)$$

[illegible]ält man für $\nu > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{x_0+\nu}{x+\nu} = \frac{1+\frac{x_0}{\nu}}{[illegible]} = e^{\frac{x_0}{\nu}+\vartheta_1\frac{|x_0|^2}{\nu^2}-\frac{x}{\nu}-\vartheta_2\frac{|x|^2}{\nu^2}},\text{[2]}$$

$$\left|\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| \leqq e^{[illegible]\frac{-x_0)}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}} \leqq e^{-\frac{\gamma_1}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}},$$

also für $n > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\left|\prod_{\nu=2\gamma+1}^{n}\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < e^{-\gamma_1\sum\limits_{\nu=2\gamma+1}^{n}\frac{1}{\nu}+2\gamma^2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt, daß für alle n von einer gewissen S[telle] an und alle x in $\mathfrak{G}$

$$c_n = \left|\prod_{\nu=0}^{n}\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| < e^{-\frac{\gamma_1}{2}\log n} = \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}} \tag{10}$$

ist. Dies liefert zunächst, daß in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist. In Verbindung mit der Identität

$$c_n - c_{n+1} = c_n \left|\frac{x - x_0}{x + n + 1}\right|$$

ergibt sich ferner aus (10), daß für alle n von einer gewis[sen] Stelle an und alle x in $\mathfrak{G}$

[1] Denn $\left|-y + \log(1+y)\right| = \left|-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots\right|$
$< \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y|^3}{2} + \frac{|y|^4}{2} + \dots = \frac{|y|^2}{2(1-|y|)} < |y|^2.$

[2] Hierin ist $|\vartheta_1| < 1$, $|\vartheta_2| < 1$.

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}} \frac{2\gamma}{\frac{n}{2}} = \frac{4\gamma}{n^{1+\frac{\gamma_1}{2}}}$$

ist, so daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. Damit ist der Satz II bewiesen.

Nun besagt ein bekannter Satz von Weierstraß:[1] Wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... analytische Funktionen sind, welche in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ der x-Ebene regulär sind, und wenn die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

in einer gewissen Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert, so stellt diese Reihe in $\mathfrak{G}$ eine analytische Funktion $f(x)$ dar; ferner ist die durch k-maliges gliedweises Differentiieren ($k = 1, 2, \ldots$) gebildete Reihe

[1] „Zur Funktionenlehre", Monatsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 723—726; Abhandlungen zur Funktionenlehre, 1886, S. 73—78; Werke, Bd. 2, 1895, S. 205—209. Herr Morera folgerte im Jahre 1886 („Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa", Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Ser. 2, Bd. 19, S. 306 und „Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite", Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, Bd. 21, S. 894 bis 897) diesen Satz aus der von ihm entdeckten Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Herr Painlevé führte im Jahre 1887 („Sur les lignes singulières des fonctions analytiques", Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Bd. 2, S. 11—12) den Nachweis des Weierstraßschen Satzes mit Hilfe des Cauchyschen Satzes. Es ist jedenfalls überflüssig, daß Herr Cahen (l. c., S. 85—86) in der Theorie der Dirichletschen Reihen nach dem Beweise der gleichmäßigen Konvergenz in einer Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene noch besonders beweist, daß die durch gliedweises Differentiieren entstehenden Reihen konvergieren. Weierstraß, Herr Morera und Herr Painlevé bemerken übrigens auch, daß die Reihe (11) in einer gewissen Umgebung jeder Stelle des gegebenen Gebietes gleichmäßig konvergiert.

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

in ⓢ konvergent und $= f^{(k)}(x)$.

Aus diesem Satz folgt in Verbindung mit Satz II d

I. Eine Fakultätenreihe stellt in ihrer
nzhalbebene eine mit eventueller Auss
Punkte 0, -1, -2, ... reguläre analyt
ktion dar und darf dort beliebig oft glied
; w

Die in ... Kon... lbebene gelegenen Punkte 0
-2, ... sind, wie ... zusehen ist, Pole erster Or
oder reguläre Stellen. De.. wenn $x = -m$ $(m > 0)$ e
cher Wert ist, so ist

$$(12) \quad x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x\cdot}\right.$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{(x+m+1)(x+m+2)\ldots(x+n)}$$

falls

$$n - m - 1 = k,\ x + m + 1 = y,\ n!\,a_n = k!\,b_k$$

gesetzt wird, von neuem eine Fakultätenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)},$$

stellt also eine für $y = 1$ reguläre analytische Funktion
so daß nach (12) $(x+m)\,\Omega(x)$ für $x = -m$ regulär is

In ihrer Konvergenzhalbebene braucht eine Fakult
reihe nicht absolut zu konvergieren. Es gilt der von I
Nielsen[1]) bereits auf dem natürlichsten Wege bewiesene

Satz IV. Das Gebiet der absoluten Konvergenz
Fakultätenreihe ist — falls die Reihe weder übe
noch nirgends absolut konvergiert — eine H
ebene, welche links durch eine Gerade $\Re(x) = \mu$

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Handbuch etc.", S. 238.

grenzt ist, mit oder ohne Einschluß der ganzen Geraden $\Re(x) = \mu$ selbst.

Die Menge der Punkte, in welchen $\Omega(x)$ absolut konvergiert, hat also die Form $\Re(x) > \mu$ oder $\Re(x) \geqq \mu$.[1])

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,|a_n|}{|x_0|\,|x_0+1|\ldots|x_0+n|}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,|a_n|}{|x_1|\,|x_1+1|\ldots|x_1+n|}$$

folgt, falls

$$\Re(x_1) \geqq \Re(x_0)$$

ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| \tag{7}$$

und des bekannten Satzes: Wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergiert und

$$\lim_{n=\infty} c_n$$

existiert,[2]) so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n.$$

In der Tat ergibt sich für

$$b_n = \frac{n!\,|a_n|}{|x_0|\,|x_0+1|\ldots|x_0+n|}, \quad c_n = \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right|$$

nach (7), daß

$$\lim_{n=\infty} c_n = \begin{cases} \left|\dfrac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)}\right| & \text{für } \Re(x_1) = \Re(x_0) \\ 0 & \text{für } \Re(x_1) > \Re(x_0) \end{cases}$$

ist.

[1]) Hierbei sind natürlich die Punkte 0, — 1, — 2, ... auszuschließen.

[2]) Es genügt, daß alle $|c_n| < c$ sind.

Für jede Fakultätenreihe gibt es also, wenn man die beiden Sätze I und IV zusammennimmt, zwei charakteristische Zahlen λ und μ derart, daß $\lambda < \mu$ ist und (abgesehen von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$) die Reihe

für $\Re(x) < \lambda$ divergiert,
für $\lambda < \Re(x) < \mu$ bedingt konvergiert,
für $\Re(x) > \mu$ absolut konvergiert.

Hierbei kann es sich allerdings ereignen, daß $\lambda = \mu$ ist, d. h. der Streifen bedingter Konvergenz nicht vorhanden ist; ferner müssen für die Zahlen λ und μ auch die extremen Werte $-\infty$ und $+\infty$ zugelassen werden.

Es gilt noch der von Herrn Nielsen[1]) bewiesene

Satz V: Wenn eine Fakultätenreihe für x_0 konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0) + 1$ ist, so ist die Reihe für x_1 absolut konvergent.

Hierbei wird x_1 von $0, -1, \ldots$ verschieden angenommen. Aus diesem Satz folgt, daß für endliche λ, μ stets

$$\lambda < \mu < \lambda + 1$$

ist, ferner, daß für $\lambda = -\infty$ auch $\mu = -\infty$ ist und daß für $\mu = +\infty$ auch $\lambda = +\infty$ ist.

Beweis: Wie Herr Nielsen wohl bemerkt hat, folgt die Behauptung, auch wenn man an Stelle der Konvergenz von $\Omega(x_0)$ nur voraussetzt, daß für alle n

$$(13) \qquad \left| \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)} \right| < A$$

ist, unmittelbar aus (7); denn alle Glieder von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, |a_n|}{|x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)|}$$

liegen nach (7) und (13) von einem gewissen n an unterhalb

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Les séries etc.", S. 358; „Handbuch etc.", S. 238.

$$2A\left|\frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)}\right|\frac{1}{n^{\Re(x_1)-\Re(x_0)}}.$$

Herr Nielsen hat nicht entschieden, ob die Differenz $\mu-\lambda$ wirklich zwischen 0 und 1 (mit Ausschluß der Grenzen) gelegen sein kann. Auf Grund der Betrachtungen von § 2 wird es leicht[1]) sein, diese Frage — durch Konstruktion eines passenden Beispiels — in bejahendem Sinne zu beantworten.

§ 2.

Das Konvergenzgebiet einer Fakultätenreihe

$$(1)\qquad \Omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

ist nach Satz I in demselben Sinne eine Halbebene wie das einer Dirichletschen Reihe

$$(14)\qquad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

oder einer allgemeineren Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-\gamma_n x}$$

(wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge reeller Größen bezeichnen) auf Grund des von Herrn Jensen[2]) gegebenen Beweises.

Wenn man zu einer gegebenen Fakultätenreihe (1) die zugehörige Dirichletsche Reihe (14) mit denselben Koeffizienten a_n $(n\geqq 1)$ betrachtet, so gilt der merkwürdige

Satz VI: Die Konvergenzhalbebenen der beiden Reihen $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ stimmen überein, und, was noch mehr besagt,[3]) für jedes (von $0, -1, \ldots$ verschiedene)

[1]) S. S. 171, Nr. 3.

[2]) l. c., S. 70.

[3]) Es ist nämlich nicht nur die charakteristische Zahl λ für beide Reihen dieselbe, sondern es konvergieren bezw. divergieren auch in jedem Punkt der Geraden $\Re(x)=\lambda$ beide Reihen gleichzeitig.

x konvergieren beide Reihen oder divergieren be[...] Reihen gleichzeitig.

Beweis: 1. Es sei x eine (von 0, $-1, \ldots$ verschied[...]) Zahl, für welche $\Psi(x)$ konvergiert, und es werde für $n \geq$ [...]

$$b_n = \frac{a_n}{n^x}, \quad c_n = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt; ich behaupte, daß die Voraussetzungen des Hilfssatz[es] erfüllt sind, d. h. daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergiert. Es ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \frac{(n+1)!\,(n+1)^x}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}$$

$$= \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \left(1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1}\right).$$

Da nach (6)

$$(15) \quad \lim_{n=\infty} |c_n| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \right| = |\Gamma(x)|$$

ist, so genügt es, zu zeigen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right|$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich daraus, daß für alle n, welche > 1 und $> x+1$ sind,

$$1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x+1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x-1}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x+1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x+1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \ldots$$

also für alle $n \geqq 1$

$$\left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right| < \frac{\gamma}{n^2},$$

γ eine von n unabhängige Größe bezeichnet. Nach dem
ssatz 1 ist also die Reihe

$$\frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n = \Omega(x)$$

vergent.

2. Es sei $\Omega(x)$ konvergent und es werde für $n \geqq 1$

$$b_n = \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \quad c_n = \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n!\, n^x}$$

etzt. Dann ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} = - \frac{1}{c_n c_{n+1}} (c_n - c_{n+1}),$$

daß wegen (15) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |$$

vergiert, da die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |$$

ben gezeigt wurde. Daher ist nach dem Hilfssatz 1 die
ichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n$$

vergent.

Der bewiesene Satz VI scheint bei oberflächlicher Betrach-
g schon von Herrn Kluyver[1]) ausgesprochen zu sein. Wie

[1]) „Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteiten-
s“, Nieuw archief voor wiskunde, Ser. 2, Bd. 4, 1899, S. 74.

indessen aus Herrn Kluyvers Begründung hervorgeht, mei[illegible]
nur den leichter beweisbaren

Satz VII: Die Punkte absoluter Konvergenz sind [illegible]
die beiden Reihen

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

und

$$(14) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

dieselben.

Beweis: Dies folgt ohne weiteres aus

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x)$$

nach dem auf S. 165 angewendeten bekannten Konvergenz[illegible]

Für Fakultätenreihen wie für Dirichletsche Reihen[1]) [illegible]
man zur Bestimmung der Konvergenzhalbebene nur die Gr[illegible]
stelle der Konvergenz für reelle x zu bestimmen: da dies [illegible]
dem einfacheren Bau der Dirichletschen Reihen oft für d[illegible]
leichter ist, sind die Sätze VI und VII von großem Nut[illegible]
für die Konstruktion spezieller Fakultätenreihen mit vor-
schriebenen Konvergenzeigenschaften.

Folgende Beispiele veranschaulichen die schon in § [illegible]
für λ und μ unterschiedenen Fälle und zeigen, daß jeder d[illegible]
selben vorkommen kann.

[1]) Der Jensensche Satz von der Existenz der Konvergenzhalbe[illegible]
einer Dirichletschen Reihe $\Psi(x)$ folgt natürlich seinerseits a[illegible]
Sätzen I und VI. Aber sein direkter Beweis ist ganz einfach un[illegible]
ruht bloß auf dem Hilfssatz 1 und der für $\Re(x) > 0$ gültigen Ungleic[illegible]

$$\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = x \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} < \frac{x}{n^{\Re(x)+1}}$$

oder statt dieser, was auch ausreicht, auf der Ungleichung

$$\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}\right] = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left[\frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots\right] < \frac{a}{n^{\Re(x)+1}}$$

[2]) S. S. 166.

1. Es ist $\lambda = -\infty$, $\mu = -\infty$ für $a_n = \frac{1}{n!}$. In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, n^x}$$

für jedes reelle x absolut konvergent.

2. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda$ für $a_n = 1$.[1] In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

für $x \leq 1$ divergent, für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = 1$, $\mu = 1$ ist.

3. Es ist λ endlich und $\lambda < \mu < \lambda + 1$ für die Fakultätenreihe, deren Koeffizienten folgendermaßen definiert sind:

für ungerade nichtquadratische n ist $a_n = 1$,
für gerade nichtquadratische n ist $a_n = -1$,
für ungerade quadratische n ist $a_n = 2$,
für gerade quadratische n ist $a_n = 0$.

In der Tat ist erstens die Reihe

$$(16) \quad 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

für $x \leq 0$ divergent, für $0 < x \leq 1$ bedingt konvergent, für $x > 1$ absolut konvergent; zweitens ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{16^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$$

für $x \leq \frac{1}{2}$ divergent, für $x > \frac{1}{2}$ absolut konvergent. Die durch Addition beider Reihen entstehende Reihe

$$2 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} - \frac{1}{8^x} + \frac{2}{9^x} - \frac{1}{10^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

ist daher für $x \leq \frac{1}{2}$ divergent, für $\frac{1}{2} < x \leq 1$ bedingt kon-

[1] Für Reihen mit positiven Koeffizienten ist natürlich stets $\mu = \lambda$.

vergent und für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, also $\mu = \lambda + \frac{1}{2}$ ist.

4. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda + 1$ für $a_n = (-1)^{n+1}$; denn für die Reihe (16) ist $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

5. Es ist $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ für $a_n = n!$ In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^x}$$

für jedes reelle x divergent.

Folgende Beispiele zeigen unter Anwendung des Satzes VI, daß für das Verhalten einer Fakultätenreihe auf der Grenzgeraden die verschiedenen denkbaren Fälle[1]) möglich sind.

1. $\Omega(x)$ konvergiert in keinem Punkte der Grenzgeraden für $a_n = 1$. In der Tat ist bekanntlich[2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+vi}}$$

für jedes reelle v divergent.

2. $\Omega(x)$ konvergiert in allen Punkten der Grenzgeraden für

$$a_n = \frac{1}{\log^2 n} \quad (n > 2).$$

In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log^2 n}$$

für $x < 1$ divergent, für $x = 1 + vi$ (absolut) konvergent.

3. $\Omega(x)$ konvergiert weder in allen Punkten der Grenzgeraden noch in keinem Punkte derselben, falls

[1]) S. S. 160.

[2]) Literatur s. in meiner Arbeit „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper etc.", S. 105—107.

$$a_n = 1 \text{ für Primzahlen,}$$
$$a_n = 0 \text{ für zusammengesetzte } n$$

ist. In der Tat ist die über alle Primzahlen (in wachsender Reihenfolge) erstreckte Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+vi}}$$

bekanntlich[1]) für $v = 0$ divergent, für alle anderen reellen v konvergent. Es gibt natürlich einfachere Beispiele; ich wählte das vorliegende, da es an sich von Interesse erscheint; zu den nicht zahlreichen, mit der Verteilung der Primzahlen zusammenhängenden Reihen, deren bedingte Konvergenz man beweisen kann, gehört nämlich jetzt z. B. die Reihe

$$\Omega(1+i) = \frac{2!}{(1+i)(2+i)(3+i)} + \frac{3!}{(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)}$$
$$+ \frac{5!}{(1+i)\ldots(6+i)} + \ldots + \frac{p!}{(1+i)\ldots(p+1+i)} + \ldots$$

Das folgende Beispiel zeigt endlich, daß — im Gegensatz zu einer früher von Herrn Nielsen[2]) gemachten Bemerkung — aus der Konvergenz einer Fakultätenreihe für $x_0 = u_0 + v_0 i$ nicht die absolute Konvergenz in allen Punkten folgt, deren Abstand von der Geraden $\Re(x) = u_0$ „nicht kleiner als 1" ist. Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^x \log n}$$

ist für $x = 1$ konvergent und konvergiert trotzdem für $x = 2$ nur bedingt, nicht absolut. Absolute Konvergenz ist also — durch

---

[1]) Literatur s. ebenda, S. 108—109.

[2]) „Recherches etc.", S. 429; in seiner Arbeit „sur la multiplication de deux séries de factorielles" (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 13_1, 1904, S. 71) spricht Herr Nielsen gleichfalls noch (mit vermeintlichem Beweis) den Satz aus: „Wenn $\Omega(x)$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x+1)$ absolut."

den Satz V — nur für $\Re(x-x_0) > 1$, nicht für $\Re(x-x_0) \geq 1$ gesichert.

Die durch Satz VI gelieferte Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe gestattet, die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Fakultätenreihe (und damit auch die Abszisse μ der Grenzgeraden ihrer absoluten Konvergenz) in ähnlicher Weise mit Hilfe eines limes superior in geschlossener Form durch die Koeffizienten auszudrücken, wie Cauchy und Herr Hadamard es für Potenzreihen getan haben. Diese Darstellung folgt unmittelbar aus dem von Herrn Cahen[1]) bewiesenen Satz:

Wenn die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{17}$$

> 0 ist,[2]) so ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\log t}. \tag{18}$$

Folgendes ist der Cahensche Beweis der wichtigen Formel (18)[3]) in unwesentlich abgeänderter Gestalt.

1. Es ist nachzuweisen: wenn $\varkappa$ den Ausdruck auf der rechten Seite von (18) bezeichnet, wenn $\varkappa$ endlich und $\delta > 0$ ist, so ist die Reihe (17) für $x = \varkappa + \delta$ konvergent. Es werde

[1]) l. c., S. 89 und 102.

[2]) Durch eine lineare Transformation der Variablen $x = x' - c$ läßt sich dies stets erreichen, falls die Grenzgerade überhaupt im Endlichen gelegen ist.

[3]) Für die allgemeineren Dirichletschen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ beweist Herr Cahen (für $\lambda > 0$) analog die Formel

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\lambda_t}.$$

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt. Dann ist wegen

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log |A_t|}{\log t} = \varkappa$$

von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

$$|A_t| < t^{\varkappa + \frac{\delta}{2}};$$

also ist wegen

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{A_n - A_{n-1}}{n^x}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) - \frac{A_{\varrho-1}}{\varrho^x} + \frac{A_\sigma}{(\sigma+1)^x}$$

für $x = \varkappa + \delta$

$$\left| \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^{\varkappa+\delta}} \right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} n^{\varkappa+\frac{\delta}{2}} \frac{a}{n^{1+\varkappa+\delta}} + \frac{a(\varrho-1)^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{\varrho^{\varkappa+\delta}} + \frac{a \cdot \sigma^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{(\sigma+1)^{\varkappa+\delta}},$$

wo a von ϱ und σ unabhängig ist: hierin hat wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

die rechte Seite für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ den Grenzwert 0, so daß, wie behauptet, die Reihe (17) für $x = \varkappa + \delta$ konvergiert.

2. Es ist zu zeigen: wenn die Reihe (17) für ein reelles $x > 0$ konvergiert und $\delta > 0$ ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < x + \delta,$$

d. h.

$$|A_t| < t^{x+\delta}.$$

In der Tat ist, falls

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^s} = B_t,\ B_{-1} = 0$$

gesetzt wird,

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^s} n^s = \sum_{n=1}^{t} (B_n - B_{n-1}) n^s$$

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n (n^s - (n+1)^s) + B_t (t+1)^s,$$

also, da $|B_t|$ für alle t unterhalb einer Schranke B gelegen ist

$$|A_t| < B \sum_{n=1}^{t} ((n+1)^s - n^s) + B(t+1)^s < 2B(t+1)^s,$$

also von einer gewissen Stelle an

$$|A_t| < t^{s+\delta}.$$

Damit erhalte ich also für Fakultätenreihen den

Satz VIII: Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe >0 ist, ist

$$(18) \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\log t};$$

falls die Abszisse μ ihrer Grenzgeraden absoluter Konvergenz >0 ist, ist

$$(19) \qquad \mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}.$$ [1]

(Offenbar folgt aus dem vorigen Beweise, daß diese Formeln auch in den Fällen $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ richtig sind.)

Beispielsweise ist für die auf S. 171, Nr. 3 angegebene Fakultätenreihe

[1] Ohne Benutzung des entsprechenden Cahenschen Satzes über Dirichletsche Reihen läßt sich der Satz VIII direkt auf dem Wege beweisen, der im § 6 für den Satz VIII* angewendet werden wird.

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = \frac{1+(-1)^{t+1}}{2} + [\sqrt{t}],$$

)

$$\lim_{t=\infty} \frac{\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\sqrt{t}} = 1$$

l a fortiori

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

ner

$$\sum_{n=1}^{t} |a_n| = t + [\sqrt{t}],$$

o

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{t} |a_n|}{t} = 1,$$

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \lim_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = 1.$$

f Grund des Satzes VIII lassen sich leicht Beispiele bilden, welchen $\mu - \lambda$ jeden zwischen 0 und 1 gelegenen Wert hat.

Ich muß bei dieser Gelegenheit erwähnen, daß Herr cherle[1]) die Zahl μ auch mit einem limes superior in Verdung gebracht hat; allerdings ist er nicht bis zur genauen ichung (19) gelangt, sondern er hat nur die leicht beweisen Ungleichungen

$$k \leqq \mu \leqq k + 1$$

unden, wo

---

[1]) „Sulle serie di fattoriali", Rendiconti della R. Accademia dei cei, Ser. 5, Bd. 11_1, 1902, S. 140—141.

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t}$$

gesetzt ist. Herr Pincherle bewies nämlich, daß $\Omega(x)$ für $\Re(x) < k$ divergiert, für $\Re(x) > k + 1$ absolut konvergiert; daraus folgen die obigen Ungleichungen und, wenn λ eingeführt wird, die Ungleichungen

$$k \leqq \lambda \leqq \mu \leqq k + 1.$$

Dagegen begeht Herr Pincherle einen Irrtum,[1]) indem er meint, die Gleichung

$$\mu = k + 1$$

bewiesen zu haben. Dieselbe braucht gar nicht erfüllt zu sein, wie folgendes einfache Beispiel zeigt: es sei $a_n = 1$ für quadratische n, $a_n = 0$ für nichtquadratische n; dann ist offenbar

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} = 0,$$

und die durch den Satz VIII bestimmte Abszisse der Grenzgeraden absoluter Konvergenz

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \limsup_{t=\infty} \frac{\log [\sqrt{t}]}{\log t} = \frac{1}{2}.$$

§ 3.

Die Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe reicht noch tiefer als bloß bis zu der in Satz VI festgestellten Tatsache der gemeinsamen Konvergenzhalbebene und der gleichzeitigen Konvergenz bezw. Divergenz in allen Randpunkten. Es gilt nämlich in Bezug auf das analytische Verhalten der durch die Reihen definierten Funktionen der

---

[1]) l. c., S. 143–144, „Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali", ebenda, Bd. 12_2, 1903, S. 340, und „Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche", Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. 2, Bd. 8, 1904, S. 13.

Satz IX: Jede (von 0, -1, ... verschiedene) Stelle der Konvergenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ der Reihen

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

und

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{14}$$

ist für beide (in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten) Funktionen regulär oder für beide singulär.

Es braucht natürlich keinen auf der Grenzgeraden gelegenen singulären Punkt zu geben.

Dem Beweise des Satzes IX schicke ich folgenden Hilfssatz aus der Theorie der Gammafunktion voraus:

Hilfssatz 4: Es sei für jedes komplexe x und jedes ganzzahlige $n \geq 1$ eine Funktion $\varphi(x, n)$ durch die Gleichung

$$\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = 1 - \frac{x + x^2}{2n} + \frac{\varphi(x, n)}{n^2} \tag{20}$$ [1]

definiert. Wenn $\mathfrak{G}$ ein im Endlichen gelegenes Gebiet der x-Ebene ist, ist $|\varphi(x, n)|$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \ldots$ unterhalb einer endlichen (von x und n unabhängigen) Schranke A gelegen.

Erster (direkter) Beweis des Hilfssatzes 4: Es ist, falls C die Eulersche Konstante bezeichnet,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\nu}{\nu} e^{-\frac{x}{\nu}} \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

$$\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x) x(x+1)\ldots(x+n)} = e^{x\left(C + \log n - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)} \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}}. \tag{21}$$

[1] Die linke Seite von (20) stellt für jedes n eine ganze transzendente Funktion von x dar, $\varphi(x, n)$ also gleichfalls.

Eine Konstante c sei so gewählt, daß für alle x in $\mathfrak{G}$

$$|x| < c$$

ist. Da für $|y| \leqq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y - \frac{1}{2} y^2 + \vartheta |y|^3} \qquad (|\vartheta|$$

ist,[1]) so ergibt sich für $\nu > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \vartheta \frac{|x|^3}{\nu^3}},$$

also für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(22) \quad \prod_{\nu = n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2} \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \vartheta_1 c^3 \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3}} \qquad (|\vartheta_1|$$

Nun ist

$$(23) \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^2} - \frac{\vartheta_2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{\vartheta_2}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_2$$

und

$$(24) \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} < \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2n^2};$$

aus (22), (23) und (24) ergibt sich für $n > 2c$ und alle x

$$(25) \quad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2n} + \vartheta_3 (c^2 + c^3) \frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_3|$$

Ferner ist bekanntlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{\vartheta_4}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_4 <$$

[1]) Denn

$$\left| y - \frac{1}{2} y^2 - \log(1+y) \right| = \left| \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \right| < \frac{1}{2} (|y|^3 + |y|^4 + \cdots$$

$$= \frac{|y|^3}{2(1 - |y|)} < |y|^3.$$

also

$$e^{x\left(C+\log n-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)}=e^{-\frac{x}{2n}+\frac{\vartheta_5 c}{n^2}} \qquad (|\vartheta_5|<1). \tag{26}$$

Aus (21), (25) und (26) folgt für alle $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\ldots(x+n)}=e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\vartheta_6(c+c^2+c^3)\frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_6|<1).$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\ldots(x+n)}=e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\frac{\eta}{n^2}},$$

wo $|\eta|$ für alle $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daraus folgt

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\ldots(x+n)}=1-\frac{x+x^2}{2n}+\frac{\varphi(x,n)}{n^2}, \tag{20}$$

wo $|\varphi(x,n)|$ für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Für die endlich vielen $n \leq 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ liegt das durch (20) bestimmte $\varphi(x,n)$ gleichfalls unterhalb einer endlichen Schranke, womit der Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Zweiter Beweis des Hilfssatzes 4: Aus bekannten Eigenschaften der Gammafunktion läßt sich der Hilfssatz auf vielfache Arten als Korollar herleiten. Ich gehe z. B. von dem Satze[1]) von Stieltjes aus: „für nicht negative $y=|y|e^{\omega i}$ ist

$$\log\Gamma(y)=\left(y-\frac{1}{2}\right)\log y-y+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12y}+R(y), \tag{27}$$

wo

$$|R(y)|<\frac{1}{360\,|y|^3\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4}$$

ist". Nach (27) ist für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > c$[2])

[1]) Literatur s. Nielsen, „Handbuch etc.", S. 208.

[2]) c bezeichnet eine Zahl, welche größer als die absoluten Beträge aller x in $\mathfrak{G}$ ist; alsdann ist sicher $x+n$ nicht negativ.

$$\log \Gamma(x+n) = \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) - x - n + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_1}{n^2},$$

wo η_1 (desgl. in der Folge $\eta_2, \eta_3, \ldots$) eine Größe bezeichnet, die für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > c$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Außerdem ist nach dem schon von Stirling bewiesenen Spezialfall $y = n$ der Formel (27)

$$\log n! = \log n + \log \Gamma(n)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + \frac{\eta_2}{n^2},$$

folglich

$$\log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = \log \frac{n!\, e^{x \log n}}{(x+n)\,\Gamma(x+n)}$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + x\log n - \log(x+n)$$
$$- \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) + x + n - \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta}{n}$$
$$= x - \left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_3}{n^3}$$
$$= x - \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{\eta_4}{n^3}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n} + \frac{\eta_5}{n^2}$$
$$= x - x - \frac{x(2x+1)}{2n} + \frac{x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2} = -\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2}.$$

$$\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = e^{-\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2}} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta(x,n)}{n^2},$$

wo $\eta(x,n)$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und $n > c$, also auch für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n \geqq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

Beweis des Satzes IX: Wenn man die Gleichung (20) t $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \ldots$ summiert, so gibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

$$= \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^x} - \frac{(x+x^2)\,a_n}{2\,n^{x+1}} + \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}} \right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \Psi(x)$$

d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x+1}} = \Psi(x+1)$$

r $\Re(x) > \lambda$ konvergieren, so ist

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \Psi(x) - \frac{x+x^2}{2}\Psi(x+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}}. \tag{8}$$

Hierin ist

$$\frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} - \frac{x+x^2}{2}\Psi(x+1)$$

r alle Punkte der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also gewiß für $(x) = \lambda$ regulär. Ferner ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}}$$

jedem endlichen im Innern der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$ legenen Gebiete $\mathfrak{G}$[1]) gleichmäßig konvergent; denn in $\mathfrak{G}$ nach dem Hilfssatz 4

[1]) Es sollen also alle Punkte von $\mathfrak{G}$ den zwei Bedingungen $x) \geqq \lambda - 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ und $|x| < c$ genügen.

$$|\varphi(x, n)| < A,$$

$$\left|\frac{\varphi(x, n)\, a_n}{n^{x+2}}\right| \leq \frac{A\,|a_n|}{n^{\Re(x)+2}} \leq \frac{A\,|a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}},$$

und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}}$$

konvergiert bekanntlich.[1] Die Gleichung (28) lehrt also, daß die für $\Re(x) > \lambda$ durch die Differenz

$$\Omega(x) - \Gamma(x)\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

definierte analytische Funktion in der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also insbesondere auf der Geraden $\Re(x) = \lambda$ regulär ist, mit etwaigem Ausschluß der Punkte $0, -1, \ldots$, welche Pole erster Ordnung oder reguläre Punkte sind. Folglich ist jeder Punkt $\lambda + vi$ (mit etwaigem Ausschluß von λ, falls $\lambda = 0, -1, \ldots$ ist) für beide durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten Funktionen regulär oder für beide singulär, womit der Satz IX bewiesen ist.[2]

Die Analogie zwischen beiden Funktionen läßt sich aber noch weiter verfolgen. Beide Beweismethoden des Hilfssatzes 4 zeigen, daß für jedes ganzzahlige positive k eine Gleichung

$$(29)\quad \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = F_0(x) + \frac{F_1(x)}{n} + \cdots + \frac{F_k(x)}{n^k} + \frac{\varphi(x, n)}{n^{k+1}}$$

besteht, wo

$$F_0(x) = 1,\; F_1(x) = -\frac{x + x^2}{2},\; F_2(x), \ldots, F_k(x)$$

[1] Nach den Sätzen V und VII oder nach dem (vgl. Cahen, l. c., S. 92) direkt leicht beweisbaren Satze, daß die Breite des Streifens bedingter Konvergenz bei einer Dirichletschen Reihe < 1 ist.

[2] Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ singulär ist, so ist er es auch für $\Omega(x)$.

ganze rationale Funktionen von x sind und wo für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \ldots$

$$|\varphi(x, n)| < A$$

ist.

In der Tat folgt dies z. B. nach der ersten Methode aus der Gleichung (21), wenn man für $\nu > 2c$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\nu^3} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\nu^{k+1}} + \vartheta \frac{|x|^{k+2}}{\nu^{k+2}}}$$

setzt, wo $|\vartheta| < 1$ ist, und die Relationen berücksichtigt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{C_1}{n} + \cdots + \frac{C_k}{n^k} + \frac{\vartheta_1 C_{k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_1| \leq 1),$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^l} = \frac{A_{l,l-1}}{n^{l-1}} + \frac{A_{l,l}}{n^l} + \cdots + \frac{A_{l,k}}{n^k} + \frac{\vartheta_2 A_{l,k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_2| \leq 1),$$

wo die C und die A gewisse von n unabhängige Konstanten sind und l eine der Zahlen $2, 3, \ldots, k+2$ bezeichnet. So ergibt sich zunächst eine Gleichung

$$(30) \quad \log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1) \ldots (x+n)} = \frac{G_1(x)}{n} + \cdots + \frac{G_k(x)}{n^k} + \frac{\eta}{n^{k+1}},$$

wo $G_1(x), \ldots, G_k(x)$ ganze rationale Funktionen sind und für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > 2c$

$$|\eta| < B$$

ist; aus (30) folgt das Bestehen von (29).

Es ist leicht einzusehen, daß in (30)

$$(31) \qquad G_\nu(x) = \frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu+1)} \varphi_{\nu+1}(x+1)$$

ist, wo $\varphi_\nu(x)$ das sogenannte Bernoullische Polynom ν^{ten} Grades

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu - \frac{\nu}{2} x^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} B_1 x^{\nu-2} - \binom{\nu}{4} B_2 x^{\nu-4} + \ldots ^{1)}$$

---

[1]) Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als der Exponent > 0 ist.

ist (in welchem $B_1, B_2, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bezeichnen). In der Tat ist für ganzzahlige positive x bekanntlich

$$\varphi_\nu(x) = \nu(1^{\nu-1} + 2^{\nu-1} + \cdots + (x-1)^{\nu-1}),$$

also für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\log \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \log \frac{n!\, n^x}{(x+n)!}$$

$$= \log \frac{n \cdot n \cdots n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)} = -\sum_{\varrho=1}^{x} \log\left(1 + \frac{\varrho}{n}\right)$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{x} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varrho^\nu}{\nu\, n^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu\, n^\nu} \sum_{\varrho=1}^{x} \varrho^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{n^\nu} \frac{\varphi_{\nu+1}(x+1)}{\nu(\nu+1)}.$$

Damit ist (31) für ganzzahlige positive x, also für alle x bewiesen. Übrigens läßt sich dieser Zusammenhang der semikonvergenten Entwickelung (30) mit den Bernoullischen Funktionen auch aus den bekannten Formeln des Herrn Sonin[1] ablesen.

Was die Polynome $F_k(x)$ betrifft, so hängen sie eng mit den sogenannten Stirlingschen Polynomen k^{ten} Grades $\psi_k(x)$ zusammen, deren Theorie von Herrn Nielsen sehr übersichtlich im fünften Kapitel seines Handbuches dargestellt worden ist. Wenn die Ausdrücke $\mathfrak{C}_n^k$ durch die für ganzzahlige positive x und $n > x$ gültige Potenzreihe

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{C}_{x+1}^k}{n^{x+1+k}}, \text{[2]}$$

definiert sind, so ist

$$\mathfrak{C}_{x+1}^0 = 1$$

$$\mathfrak{C}_{x+1}^k = (-1)^{k+1} x(x+1)\ldots(x+k)\,\psi_{k-1}(-x-1) \quad (k > 0).\text{[3]}$$

[1] „Bernoullische Polynome und ihre Anwendungen" (russisch), Warschauer Universitätsnachrichten, 1888; „Sur les polynômes de Bernoulli", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 116, 1896, S. 137.

[2] Es ist dies die Gleichung (9) auf S. 68 des Handbuchs, wenn in dieser n statt x, $x+1$ statt n, k statt s geschrieben wird.

[3] l. c., S. 74, (16).

Da nun für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{n!\,n^x}{(x+n)!} = \frac{n^{x+1}}{n(n+1)\ldots(n+x)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{C}_{x+1}^k}{n^k}$$

ist, so ist für ganzzahlige $x > 0$, also allgemein die in (29) auftretende Funktion

$$F_k(x) = -x(x+1)\ldots(x+k)\psi_{k-1}(-x-1) \quad (k > 0).$$

Für meinen Zweck kommt es nur darauf an, daß die $F_k(x)$ in (29) überhaupt ganze rationale Funktionen sind. Die Relation (29) ergibt, wenn man mit $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \ldots$ summiert, für $\Re(x) > \lambda$

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + F_0(x)\Psi(x) + F_1(x)\Psi(x+1) \\ &+ \cdots + F_k(x)\,\Psi(x+k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+k+1}}; \end{aligned}$$

hierin ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+k+1}}$$

für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(x) > \lambda - k$ gleichmäßig konvergent. Falls also z. B. die durch $\Psi(x)$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist, so lehrt die Gleichung (32), daß die durch $\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)}$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist. Falls $\Psi(x)$ eine ganze transzendente Funktion definiert, definiert also $\Omega(x)$ eine in der ganzen Ebene existierende eindeutige analytische Funktion, welche keine anderen singulären Punkte haben kann als Pole erster Ordnung in $0, -1, -2, \ldots$ Ein Beispiel hierfür liefern die beiden wohlbekannten Funktionen, welche den Werten

$$a_n = (-1)^n$$

entsprechen und für $\Re(x) > 0$ durch die Reihen

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1 + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} - \cdots,$$

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

definiert sind. In der Tat ist bekanntlich einerseits die durch

$$\Psi(x) = -\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots\right) \qquad (\Re(x) > 1)$$

definierte Funktion

$$-\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\zeta(x)$$

eine ganze transzendente Funktion, und andererseits ist[1])

$$\Omega(x) = \int_0^1 \frac{z^{x-1}}{2-z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{x+n},$$

wo der letztere Summenausdruck eine bis auf die Pole erster Ordnung $0, -1, \ldots$ in der ganzen Ebene reguläre Funktion darstellt.

§ 4.

Auf S. 179 ist schon bemerkt worden, daß auf der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe kein singulärer Punkt der durch sie definierten analytischen Funktion zu liegen braucht. Diese Tatsache war bereits von Herrn Pincherle[2]) beachtet worden. Um so mehr Interesse beansprucht der

Satz X: Wenn alle Koeffizienten einer Fakultätenreihe mit endlicher Grenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ von einer gewissen Stelle an reell und > 0 sind, so ist der Punkt $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Erster (direkter) Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda > 0$ angenommen werden; denn anderenfalls braucht man statt

[1]) Vgl. z. B. Nielsen, „Handbuch etc.“, S. 246.

[2]) S. die auf S. 178, Anm. 1 zuletzt genannte Arbeit.

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

nur die Fakultätenreihe

$$(12) \qquad \begin{aligned} x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right) \\ = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)}, \end{aligned}$$

wo m eine ganze Zahl $> -1-\lambda$ ist, als Funktion von $x+m+1 = y$ zu betrachten und auf die Reihe

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)}$$

mit der Grenzgeraden $\Re(y) = \lambda + m + 1 > 0$ den Satz anzuwenden. Auf Grund von (12) kann man auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gleich von Anfang an, also für alle $n \geq 0$ die Ungleichung

$$a_n \geq 0$$

erfüllt ist.

Da die Reihe (1) nach Satz III in der Konvergenzhalbebene beliebig oft gliedweise differentiiert werden darf, ergibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\Omega'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \left(-\frac{1}{x^2(x+1)\ldots(x+n)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{x(x+1)^2\ldots(x+n)} - \cdots - \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)^2}\right),$$

$$\Omega''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \left(\frac{2}{x^3(x+1)\ldots(x+n)} + \frac{1}{x^2(x+1)^2\ldots(x+n)} + \cdots\right)$$

u. s. f. Man sieht, daß in $\Omega^{(k)}(x)$ für reelle $x > \lambda$ die Glieder das Vorzeichen $(-1)^k$ oder 0 haben, je nachdem $a_n > 0$ oder $= 0$ ist; jedenfalls treten in $(-1)^k\, \Omega^{(k)}(x)$ keine negativen Glieder auf. Wäre nun $x = \lambda$ eine reguläre Stelle der Funktion, so würde die in der Umgebung von $x = \lambda + 1$ gültige Potenzreihe

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!} (x-\lambda-1)^k \tag{33}$$

einen Konvergenzradius $r > 1$ haben. Es sei p so gewählt, d

$$p > 0, \quad p < \lambda, \quad p < r - 1$$

ist; wegen $p < r - 1$ würde die Reihe auf der rechten S
von (33) für $x = \lambda - p$ konvergieren; diese Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!} (1+p)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n (-1)^k \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}$$

ist eine Doppelreihe, deren Glieder sämtlich $\geqq 0$ sind. Da
konvergiert auch die durch Vertauschung der Summationsfol
entstehende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}. \tag{34}$$

Nun ist für jedes n, wenn die rationale Funktion von x

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = f(x)$$

gesetzt wird, für $|x - \lambda - 1| < \lambda + 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

also speziell für $x = \lambda - p$

$$\frac{1}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

so daß die mit (34) identische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \Omega(\lambda-p)$$

konvergieren würde, gegen die Voraussetzung, daß $\Re(x) = \lambda$ die Konvergenzgerade von $\Omega(x)$ ist.

Zweiter Beweis: Der Satz X ergibt sich unmittelbar, wenn ich meinen kürzlich publizierten[1]) analogen Satz als bekannt voraussetze: der reelle Punkt der Konvergenzgeraden einer Dirichletschen Reihe mit reellen, nicht negativen Koeffizienten ist eine singuläre Stelle der Funktion. Wenn dieser Satz mit dem Satz IX verbunden wird, so ergibt sich daraus ohne weiteres der zu beweisende Satz; denn $x = \lambda$ ist eine singuläre Stelle der durch die zugehörige Dirichletsche Reihe definierten Funktion.

Ich will noch bemerken, daß im Falle der Divergenz von $\Omega(\lambda)$ der Satz X leichter zu beweisen ist. Wenn alle $a_n \geqq 0$ angenommen werden und $\lambda > 0$ ist, könnte $\Omega(\lambda)$ nur gegen $+\infty$ divergieren, und es ist nicht schwer, analog zu einer bekannten Eigenschaft der Potenzreihen zu beweisen, daß alsdann bei Annäherung von rechts

$$\lim_{x=\lambda} \Omega(x) = +\infty$$

ist, also λ keine reguläre Stelle der Funktion sein kann. Aber die obigen beiden Beweise gelten auch im Falle der Konvergenz von $\Omega(\lambda)$.

Eine letzte Anwendung des Satzes IX will ich zu dem Zwecke machen, eine Fakultätenreihe zu konstruieren, welche über ihre Grenzgerade nicht fortsetzbar ist. Hierzu genügt es offenbar nach Satz IX, eine Dirichletsche Reihe mit dieser Eigenschaft anzugeben; aber in der Literatur habe ich noch kein solches Beispiel erwähnt gefunden. Es läßt sich analog der durch Herrn Lerch bekannten nicht fortsetzbaren Potenzreihe

$$x + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2^k}$$

leicht eine Dirichletsche Reihe der verlangten Art bilden; ich behaupte nämlich, daß die Dirichletsche Reihe

---

[1]) „Über einen Satz von Tschebyschef", Mathematische Annalen, Bd. 61, 1905, S. 536.

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{16^x} + \frac{1}{256^x} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{2^k})^x}$$

über ihre Grenzgerade $\Re(x) = 0$ nicht fortsetzbar ist. Hierzu ist es hinreichend, nachzuweisen, daß alle Punkte $\frac{1}{\log 2}\frac{l\pi}{2^m}i$ (l ganz, $m \geq 0$ ganz) singulär sind, da diese auf der Grenzgeraden dicht verteilt liegen. Und hierfür reicht es hin, zu zeigen, daß für jeden solchen Punkt vi, wenn $x = vi + x'$ gesetzt wird, die entstehende Dirichletsche Reihe in x' (mit der Konvergenzgeraden $\Re(x') = 0$) von einer gewissen Stelle an positive Koeffizienten hat. Dies ist der Fall; denn das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{1}{2^{2^k(vi+x')}} = \frac{e^{-\frac{1}{\log 2}\frac{l\pi}{2^m}2^k \log 2 \cdot i}}{(2^{2^k})^{x'}},$$

und der Exponent von e ist für alle $k \geqq m+1$ ein Multiplum von $2\pi i$.

§ 5.

Über Binomialkoeffizientenreihen

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)^{1)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n}$$

lassen sich durchweg die analogen Eigenschaften zu denen der Fakultätenreihen mit den in §§ 1—4 angewandten Mitteln beweisen. Herr Nielsen behandelt die Reihen $W(x)$ auf S. 125—127 seines Handbuches, gelangt jedoch dort nicht zu dem Satz, welcher dem Satz I entspricht, sondern beweist nur die Analoga zu den Sätzen IV und V über absolute Konvergenz. Tatsächlich findet man genau wie in den §§ 1—4 mit den näher anzugebenden Abänderungen in den Beweisen die 10 Sätze, welche den Sätzen I bis X entsprechen und mit I' bis X' numeriert sein mögen.

[1]) Unter dem ersten Gliede wird a_0 verstanden.

Zunächst gilt der bereits 1884 von Herrn Jensen[1]) ohne Ausführung des Beweises publizierte

Satz I': Wenn $W(x_0)$ konvergiert und x_0 von 1, 2, ... verschieden ist, so konvergiert $W(x_1)$ für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$.

Der Beweis verläuft ganz wie der des Satzes I; nur ist hier

$$b_n = a_n \frac{(x_0-1)\ldots(x_0-n)}{n!}, \; c_n = \frac{(x_1-1)\ldots(x_1-n)}{(x_0-1)\ldots(x_0-n)} = \frac{(-x_1+1)\ldots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\ldots(-x_0+n)}$$

zu setzen und die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} |c_n| n^{\Re(x_1-x_0)} = \lim_{n=\infty} \left|\frac{(-x_1+1)\ldots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\ldots(-x_0+n)}\right| n^{\Re(x_1-x_0)}$$

$$(35) \qquad = \frac{|x_0\Gamma(-x_0)|}{|x_1\Gamma(-x_1)|}\text{[2])}$$

nebst

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{-x_0 + n + 1}$$

zu verwenden.

Aus Satz I' folgt die Existenz der Konvergenzhalbebene im Sinne von S. 159—160; nur sind hier die außerhalb derselben etwa gelegenen Punkte 1, 2, ... den Konvergenzpunkten zuzuzählen.

Satz II' lautet wie Satz II und wird ebenso bewiesen. Er besagt, daß eine Binomialkoeffizientenreihe in einer gewissen Umgebung jeder Stelle in ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergiert. Dies gilt auch von den in der Konvergenzhalbebene gelegenen ganzen positiven Zahlen $x = m$, da die Reihe

$$\frac{1}{(x-1)\ldots(x-m)}\left(W(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\right)$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{(x-m-1)\ldots(x-n)}{n!}$$

[1]) l. c., S. 71—72.

[2]) Für $x_0 = 0$ bezw. $x_1 = 0$ ist unter dem Zähler bezw. Nenner der rechten Seite von (35) der Wert 1 zu verstehen.

wieder eine Binomialkoeffizientenreihe mit der Variablen $x-m$ und der Konvergenzhalbebene $\Re(y) > \lambda - m$ darstellt.

Aus Satz II' folgt unmittelbar der Satz III', nach welc die Reihe $W(x)$ in ihrer Konvergenzhalbebene eine reg Funktion darstellt und beliebig oft gliedweise differenti werden kann.

Satz IV' ergibt sich wie Satz IV; er besagt, daß Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene (mit o ohne Einschluß der Grenzgeraden) ist.

Die Sätze I', II', III', IV' sind schon von Herrn Bendixso bewiesen worden, da sie in seinen entsprechenden Sätzen[1] al die Reihen von der Gestalt (2) enthalten sind.

Satz V', nach welchem die Breite des Streifens beding Konvergenz ≤ 1 ist, ergibt sich wie Satz V.

Satz VI' lautet: In jedem (von 1, 2, ... verschiedene Punkte sind die Binomialkoeffizientenreihe

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}$$

und die Dirichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}$$

gleichzeitig konvergent oder gleichzeitig diverg

Dieser Satz wird wie Satz VI bewiesen, wenn man im ersten Teil des Beweises berücksichtigt, daß für

$$c_n = \frac{(-1)^n (x-1)\ldots(x-n) n^x}{n!}$$

$$(36) \qquad c_n - c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{(x-n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{n+1}\right)$$

[1]) l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2]) S. § 6 des Folgenden.

Denn der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (36) für $n \geqq 2$ in die Reihe entwickelbar

$$1 + \frac{-1 + \frac{x-1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$1 + \left(-1 + \frac{x-1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \cdots$$

ıalog verläuft der Beweis des zweiten Teiles im Anschluß . S. 169.

Ohne Mühe ergibt sich Satz VII′, nach welchem die Punkte ›soluter Konvergenz für $W(x)$ und $\Psi(x)$ (abgesehen von $1, 2, \ldots$) eselben sind.

Aus Satz VI′ folgt[1]) der

atz VIII′: Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden von $W(x)$ nicht negativ ist, so ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\log t};$$

falls die Abszisse μ der Grenzgeraden absoluter Konvergenz > 0 ist, so ist

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}.$$

Herr Pincherle[2]) ist auch hier[3]) der irrtümlichen Ansicht, sei

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} + 1 = k + 1.$$

---

[1]) Der Satz VIII′ läßt sich auch direkt durch die Schlüsse beısen, welche auf S. 203 ff. für den Satz VIII″ angewendet werden.

[2]) l. c. (s. S. 177, Anm. 1), S. 419.

[3]) Vgl. S. 178.

und er nennt die Halbebene $\Re(x) > k + 1$ den (
Konvergenzbereich von $W(x)$.

Ferner gilt der Satz IX', nach welchem jeder (vo
verschiedene) Punkt der Grenzgeraden für $W(x)$
beidemal regulär oder beidemal singulär ist. Dies
der Relation, welche sich aus (20) durch Vertauschu
mit $-x$ ergibt und

$$\frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n n!}{(x-1)\ldots(x-n)}\,\frac{1}{n^x} = 1 + \frac{x-x^2}{2n} + \ldots$$

lautet; denn dies liefert

$$\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} = \frac{1}{-x\cdot\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\,\frac{1}{1+\frac{x-x^2}{2n}+\ldots}$$

$$= \frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\left(1 - \frac{x-x^2}{2n} + \frac{\varphi_2(x,n)}{n^2}\right),$$

wo $|\varphi_2(x,n)|$ in jedem endlichen, die Punkte 1, 2
[illegible] und auf dem Rande nicht enthaltenden Gebi
bleibt unter einer endlichen, von x und n unabhängigen Schra
Für $\Re(x) > \lambda$ ist also

$$W(x) = a_0 + \frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\Psi(x) + \frac{1-x}{2\,\Gamma(-x)}\,\Psi(x \ldots$$

$$- \frac{1}{x\,\Gamma(-x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_2(x,n)\,a_n}{n^{x+2}},$$

was die Behauptung enthält, wenn man die Überlegu
S. 183–184 anstellt.[1])

Satz X' endlich besagt, daß der reelle Punkt λ
der Grenzgeraden von $W(x)$ singulär ist, falls $(-1$
einer gewissen Stelle an > 0 ist und λ keine posit
Zahl ist. Dies folgt ohne weiteres aus Satz IX' un
auf S. 181 zitierten Eigenschaft der Dirichletschen Rei

[1]) Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ regulär ist, so ist er es auc

ganzzahliges $\lambda > 0$ gilt der Satz nicht, wie das einfache Beispiel der Binomialkoeffizientenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x-1}{n} = 1 - (x-1) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!} - \cdots$$

mit der Grenzgeraden $\Re(x) = 1$ zeigt, welche in ihrer Konvergenzhalbebene die ganze transzendente Funktion 0 darstellt.

§ 6.

Es mögen nun kurz die verallgemeinerten Fakultätenreihen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}$$

und die verallgemeinerten Binomialkoeffizientenreihen

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)$$

behandelt werden; hierin sollen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ positive, monoton ins Unendliche wachsende Größen bezeichnen, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[1])

Aus dieser Annahme folgt leicht, daß nach Annahme einer positiven Größe δ für alle hinreichend großen n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \tag{37}$$

ist. Denn für alle $\nu \geq \nu_0$ ist

$$\gamma_\nu > \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2\gamma_\nu},$$

[1]) Man kann auch andere lohnende Annahmen über die γ_n machen. Herr Jensen hat solche Fälle a. a. O. (S. 72) noch besonders erwähnt, und Herr Bendixson hat einige derselben (l. c.) behandelt.

also für alle $n \geq \nu_0$

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \leq \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2},$$

und für alle hinreichend großen n ist hierin

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

so daß (37) erfüllt ist.

Es gilt nun zunächst der

Satz I': Wenn $F(x)$, bezw. $G(x)$, für $x = x_0$ konverg[iert] und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist, so konvergiert $F(x_1)$, b[ezw.] $G(x_1)$. (Hierbei werden für $F(x)$ die Stellen $-\gamma_n$, [für] $G(x)$ die Stellen γ_n von der Betrachtung aus[ge]schlossen.)

Beweis: 1. Für $F(x)$ werde

$$b_n = \frac{A_n}{(x_0+\gamma_1)\dots(x_0+\gamma_n)}, \quad c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\dots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\dots(x_1+\gamma_n)}$$

gesetzt, so daß

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_{n+1}}$$

ist. Nach dem Hilfssatz 1 handelt es sich lediglich u[m den] Nachweis der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|;$$

also genügt es a fortiori, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{c_n}{\gamma_n}\right|$$

zu beweisen. Es ist

$$\Re \log\left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = \Re\left(-\frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu} + \frac{\eta_1}{(x_1 + \gamma_\nu)^2}\right),$$

wo $|\eta_1|$[1]) für alle ν unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Daher ist

$$\Re \log\left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = -\frac{\Re(x_1 - x_0)}{\gamma_\nu} + \frac{\eta_2}{\gamma_\nu^2},$$

$$|c_n| = \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{x_0 + \gamma_\nu}{x_1 + \gamma_\nu}\right| = \prod_{\nu=1}^{n} \left|1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right| = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \Re \log\left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right)}$$

$$(38) \qquad = e^{-\Re(x_1 - x_0)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} + \eta_3 \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu^2}}.$$

Nach (37) ist für alle hinreichend großen n

$$\eta_3 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{1}{2}\Re(x_1 - x_0)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu},$$

also

$$(39) \qquad |c_n| < e^{-\frac{1}{2}\Re(x_1 - x_0)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}},$$

und es reicht für unseren Zweck aus, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{-\frac{1}{2}\Re(x_1 - x_0)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}$$

konvergiert, oder, falls

$$\frac{1}{2}\Re(x_1 - x_0)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} = \beta_n$$

gesetzt wird, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta_{n-1})\, e^{-\beta_n}$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich aus

[1]) Desgl. in der Folge $|\eta_2|$ für alle ν und $|\eta_3|$ für alle n.

$$(\beta_n - \beta_{n-1})\, e^{-\beta_n} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n^2} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n \beta_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{\beta_n}$$

2. Wird

$$b_n = A_n (x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n),$$

$$c_n = \frac{(x_1 - \gamma_1) \ldots (x_1 - \gamma_n)}{(x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n)} = \frac{(-x_1 + \gamma_1) \ldots (-x_1 + \gamma_n)}{(-x_0 + \gamma_1) \ldots (-x_0 + \gamma_n)}$$

gesetzt, so ist wegen $\Re(-x_0) > \Re(-x_1)$ der Nachweis des Satzes I* für $G(x)$ analog dem obigen Nachweise für $F(x)$.

Für die Reihen $G(x)$ hat Herr Bendixson[1] den Satz und ebenso die bezüglichen Teile der Sätze II*, III*, IV* schon bewiesen, wenn auch unnötigerweise unter Heranziehung der Weierstraßschen ganzen transzendenten Funktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_n}\right) e^{\sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{1}{\nu} \left(\frac{x}{\gamma_n}\right)^\nu},$$

welche die γ_n zu Nullstellen besitzt.

Aus Satz I* folgt die Existenz einer Konvergenzhalbebene.

Satz II*. In einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene konvergiert $F(x)$ bezw. $G(x)$ gleichmäßig.[2]

Beweis: Es genügt (vgl. den Beweis des Satzes II) für $F(x)$ zu zeigen: Wenn die Reihe in x_0 konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches der Halbebene $\Re(x) > \Re(x_0) + p$ angehört (wo p eine positive Größe bezeichnet) und keinen der Punkte $-\gamma_n$ enthält, auch nicht auf dem Rande). In der Tat bezeichnet in

$$\Re \log\left(1 - \frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu}\right) = \Re\left(-\frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu} + \frac{\eta}{(x + \gamma_\nu)^2}\right)$$

η eine für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle ν dem absoluten Betrage nach

[1] l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2] Für $F(x)$ sind hierbei die Stellen $-\gamma_n$ auszuschließen.

›rhalb einer endlichen Schranke gelegene Größe. Die For-
n auf S. 199 ergeben offenbar, wenn x statt x_1 gesetzt wird,
für

$$c_n = \frac{(x_0 + \gamma_1) \dots (x_0 + \gamma_n)}{(x + \gamma_1) \dots (x + \gamma_n)}$$

alle hinreichend großen n

$$| c_n | < e^{-\frac{1}{2} p \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}$$

welches x in $\mathfrak{G}$ auch gewählt sei. Hieraus folgt die
chmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{| c_n |}{\gamma_n},$$

› von

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n | \left| \frac{x - x_0}{x + \gamma_{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |$$

$\mathfrak{G}$. Der Hilfssatz 3 ergibt also für $F(x)$ — und ganz
nso für $G(x)$ — den Satz II*.

Aus Satz II* folgt Satz III*, nach welchem $F(x)$ und $G(x)$
ihrer Konvergenzhalbebene (nach etwaigem Ausschluß der
nkte $-\gamma_n$ für $F(x)$) reguläre analytische Funktionen dar-
llen und beliebig oft gliedweise differentiiert werden dürfen.

Aus der in (39) enthaltenen Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{(x_0 + \gamma_1) \dots (x_0 + \gamma_n)}{(x_1 + \gamma_1) \dots (x_1 + \gamma_n)} \right| = 0 \qquad (\Re(x_1 - x_0) > 0)$$

gt der Satz IV*, nach welchem für $F(x)$ und $G(x)$ auch
s Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene ist.

Satz V hat kein Analogon, nach welchem die Breite des
reifens bedingter Konvergenz stets unterhalb einer endlichen
hranke gelegen oder auch nur endlich wäre. Vielmehr lautet
r entsprechende

Satz V': Wenn λ und μ die Abszissen der Grenzgeraden bedingter und absoluter Konvergenz von $F(x)$ (bezw. $G(x)$) sind und

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log t}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} = \tau$$

endlich ist, so ist

$$\mu - \lambda \leq \tau.^{1)}$$

Beweis: Es sei $F(x_0)$ (bezw. $G(x_0)$) konvergent und

$$\Re(x_1) - \Re(x_0) = \tau + 3p, \quad p > 0.$$

Dann ist zu zeigen, daß $F(x_1)$ (bezw. $G(x_1)$) absolut konvergent. Der Quotient der allgemeinen Glieder für x_1 und x_0 ist

$$c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\ldots(x_1+\gamma_n)}, \text{ bezw. } c_n = \frac{(-x_1+\gamma_1)\ldots(-x_1+\gamma_n)}{(-x_0+\gamma_1)\ldots(-x_0+\gamma_n)}$$

und es genügt, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

nachzuweisen. Nach (37) und (38) ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-(\tau+3p)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} + p\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} = e^{-(\tau+2p)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}};$$

nach der Definition von τ ist für alle hinreichend großen n

$$\frac{\log n}{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} < \tau + p;$$

also ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-\frac{\tau+2p}{\tau+p}\log n} = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{\tau+p}}},$$

woraus die Behauptung folgt.

1) Für $\gamma_n = n$ ist $\tau = 1$; wenn $\tau = \infty$ ist, ist der Satz trivial.

Es hat kein erhebliches Interesse, die analogen Unter-
:hungen zu den Sätzen VI, VII und IX auszuführen, da die
n Vergleich heranzuziehende Reihe im allgemeinen keine
richletsche wäre.

Dagegen erscheint es wohl von Bedeutung, daß sich die
»szissen λ und μ der Grenzgeraden für die betrachteten
ihen im Sinne des Satzes VIII durch einen geschlossenen
ısdruck darstellen lassen.

Es mögen die Reihen $F(x)$ und $G(x)$ in der Form

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)},$$

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\ldots\gamma_n}$$

»schrieben werden, was nur eine Änderung der Bezeichnung
t. Dann gilt der

Satz VIII': Falls $\lambda \geq 0$ ist, ist für $F(x)$

$$\text{)}) \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}},$$

für $G(x)$

$$\text{1)} \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}};$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist für $F(x)$ und $G(x)$

$$\text{2)} \qquad \mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}.$$

Beweis: Es brauchen offenbar nur die Formeln (40) und
ł1) für λ bewiesen zu werden; denn alsdann folgt der Wert
ł2) von μ durch ihre Anwendung auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n| \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1 \ldots \gamma_n},$$

welche für reelle x nur absolut, nicht bedingt konvergieren können, da ihre Glieder von einer gewissen Stelle an durchweg ≥ 0 oder durchweg ≤ 0 sind.

Es möge zunächst die Gleichung (40) bewiesen werden:

1. Wenn

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} = \varkappa$$

endlich und $\delta > 0$ ist, so ist zu zeigen, daß (falls $\varkappa + \delta$ mit keinem $-\gamma_n$ zusammenfällt) $F(\varkappa + \delta)$ konvergiert. Es ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

also, wenn

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt wird,

$$|A_t| < e^{\left(\varkappa + \frac{\delta}{2}\right) \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}. \tag{43}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_n}\right)} = e^{-\sum_{\nu=1}^{n} \log\left(1 + \frac{\varkappa + \delta}{\gamma_\nu}\right)}$$

$$= e^{-(\varkappa + \delta) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \eta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2}},$$

also, da für alle hinreichend großen n nach (37)

$$\eta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}$$

ist, von einer gewissen Stelle an

$$(44) \quad \left| \frac{1}{\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_n}\right)} \right| < e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}.$$

Nun ist

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n \gamma_1 \cdots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\cdots(x+\gamma_n)} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{A_n - A_{n-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)} \cdot \frac{x}{x+\gamma_{n+1}}$$

$$- \frac{A_{\varrho-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\gamma_\varrho}\right)} + \frac{A_\sigma}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\gamma_{\sigma+1}}\right)}.$$

Für alle hinreichend großen ϱ und $\sigma \geqq \varrho$ ist also nach (43) und (44)

$$\left| \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n \gamma_1 \cdots \gamma_n}{(\varkappa+\delta+\gamma_1)\cdots(\varkappa+\delta+\gamma_n)} \right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} \cdot \frac{2(\varkappa+\delta)}{\gamma_{n+1}}$$

$$+ e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}} e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho}\frac{1}{\gamma_\nu}} + e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}} e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma+1}\frac{1}{\gamma_\nu}}$$

$$= 2(\varkappa+\delta)\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_{n+1}} e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} + e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_\varrho}} + e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_{\sigma+1}}}.$$

Die drei Glieder dieses Ausdruckes haben für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ den Grenzwert 0 (ersteres nach den Feststellungen von S. 199 bis 200), so daß die Konvergenz von $F(\varkappa+\delta)$ bewiesen ist.

2. Es ist zu zeigen: wenn $x > 0$ ist, $F(x)$ konvergiert und δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}} < x + \delta,$$

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n\gamma_1\dots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\dots(x+\gamma_n)} = B_t,\quad B_{-1}=0$$

dann ist

$$A_t = \quad t_n = \quad \frac{\dots\gamma_n}{\dots(x+\gamma_n)}\,\frac{(x+\gamma_1)\dots(x+\gamma_n)}{\gamma_1\dots\gamma_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{t}(B_n - B_{n-1})\left(1+ \quad\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n\left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(\quad+\frac{x}{\gamma_n}\right)-\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)\right\}$$

$$+ B_t\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right).$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} B_n = F(x) - a_0$$

existiert, ist für alle n

$$|B_n| < B,$$

also

$$|A_t| < B\sum_{n=1}^{t}\left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)-\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)\right\}$$

$$+ B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)$$

$$= 2B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right) - B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)$$

$$< 2Be^{x\left(\frac{1}{\gamma_1}+\dots+\frac{1}{\gamma_{t+1}}\right)},$$

also für alle hinreichend großen t

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Der Beweis des Satzes VIII' für die Reihen $G(x)$, also der
mel (41) ist genau derselbe, wenn man im ersten Teile von
Formel

$$a_n \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\dots\gamma_n} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma}(A_n - A_{n-1})\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

geht, wo

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(-1)^n a_n$$

, und im zweiten Teile von

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(B_n - B_{n-1})\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)},$$

$$B_t = \sum_{n=1}^{t} a_n \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\dots\gamma_n},\quad B_{-1} = 0$$

Da das Produkt

$$\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

gegebenem positiven x ($\neq \gamma_1, \gamma_2 \dots$) von einem gewissen Index
konstantes Vorzeichen besitzt und dem absoluten Betrage
ch abnimmt, so folgt die Behauptung im zweiten Teil mit
wesentlicher Abänderung aus

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n \left(\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)}\right)$$
$$+ \frac{B_t}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)}$$

mit Hilfe der Ungleichung

$$|A_i| < c + 2B \frac{1}{\left|\left(1 - \frac{x}{\gamma_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\gamma_{i+1}}\right)\right|}.$$

Endlich gilt für Reihen $F(x)$ bezw. $G(x)$ ein den früheren Sätzen X und X' entsprechender Satz X'', nach welchem im Falle $a_n \geqq 0$ bezw. $(-1)^n a_n \geqq 0$ (für alle n von einer gewissen Stelle an) der reelle Punkt λ der Grenzgeraden eine singuläre Stelle der Funktion ist. (Für $G(x)$ wird hierbei λ von allen γ verschieden angenommen.)

In der Tat ist für die Reihen $F(x)$ der erste (direkte) Beweis des Satzes X wörtlich anwendbar, und für die Reihen $G(x)$ ergibt sich ebenso — da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda < 0$ angenommen werden kann — der Beweis auf Grund der Tatsache, daß aus

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{(\gamma_1 - x) \ldots (\gamma_n - x)}{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$$

durch gliedweises Differentiieren für $G^{(k)}(x)$ eine Reihe entsteht, in welcher der mit $(-1)^n a_n$ multiplizierte Ausdruck für $x = 0$ (und überhaupt für alle x zwischen λ und γ_1) Null oder das Vorzeichen $(-1)^k$ besitzt.

§ 7.

Herr Pincherle[1]) hat in einer kürzlich erschienenen ausführlichen Arbeit die Integrale

$$(45) \qquad \int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$$

behandelt, wo $a > 0$ ist und $\varphi(t)$ eine für $0 < t < a$ stetige reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen t bezeichnet. Einige der von ihm bewiesenen Eigenschaften dieser Integrale entsprechen den Sätzen I, II, III, IV über Fakultäten-

[1]) l. c. (s. S. 155, Anm. 1).

reihen; seine Beweise sind — mit einer nachher anzugebenden Ausnahme — denkbarst einfach und so kurz, daß ich sie zunächst wiederholen will, um alsdann diejenigen neuen Eigenschaften hinzuzufügen, welche den Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen entsprechen.

Durch die Substitution

$$t = \frac{a}{\tau}$$

geht das Integral

$$\int_{\delta}^{a} \varphi(t)\, t^{x-1}\, d\,t,$$

wo $0 < \delta < a$ ist, in

$$-\int_{\frac{a}{\delta}}^{1} \varphi\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{a^{x-1}}{\tau^{x-1}} \frac{d\,\tau}{\tau^2} = a^{x-1} \int_{1}^{\frac{a}{\delta}} \frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau}\, \tau^{-x}\, d\,\tau$$

über, wo

$$\frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau} = \psi(\tau)$$

eine für $\tau \geqq 1$ stetige Funktion von τ bezeichnet. Also ist die Theorie der Integrale (45) identisch mit der Theorie der Integrale

$$\int_{1}^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, d\,t,$$

und ich will alle Betrachtungen für diese Schreibweise der Integrale anstellen, auf die auch Herr Pincherle Bezug nimmt.

Es ist ihm nicht entgangen, daß die Funktion $\varphi(t)$ bezw. $\psi(t)$ nicht stetig zu sein braucht. Ich mache demgemäß folgende allgemeinere Annahme: $\psi(t)$ ist für alle endlichen reellen $t \geqq 1$ eindeutig definiert, in jedem endlichen Intervalle $t = (1 \ldots \omega)$ hat $|\psi(t)|$ eine endliche obere Grenze, und $\psi(t)$ ist über jedes solche Intervall integrierbar. Alsdann zerfallen alle komplexen $x = u + v\,i$ in zwei Klassen:

1. Die durch das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, d\,t$$

für jedes $\omega > 1$ definierte Funktion[1]) von ω besitzt für $\omega =$ [illegible]
einen Grenzwert.

2. Dies ist nicht der Fall.

Im ersteren Falle nennt man das Integral

$$\mathfrak{Z}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

konvergent.

Dann gilt der

Satz I‴: Wenn $\mathfrak{Z}(x_0)$ konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ [illegible]
so konvergiert $\mathfrak{Z}(x_1)$.

Dieser Satz ist zuerst von Herrn Pincherle[2]) bewie[illegible]
worden. Die Herren Phragmén,[3]) Franel[4]) und Lerch,[5]) de[illegible]
Herr Pincherle[6]) die Entdeckung des Satzes zuschreibt, sprech[illegible]
tatsächlich nur von denjenigen $x_1 = x_0 + p$, wo $p > 0$ [illegible]
Allerdings ist der Nachweis für $\Re(p) > 0$ ganz analog.[7]) F[illegible]
gendes ist für den Satz I‴ der Lerch-Pincherlesche

---

[1]) In der Tat ist das Produkt zweier integrierbarer Funkt[illegible]
bekanntlich integrierbar; wenn $\psi(t) = \psi_1(t) + i\,\psi_2(t)$ ist (wo $\psi_1(t)$ [illegible]
$\psi_2(t)$ reell sind), so existieren die beiden eigentlichen reellen Integr[illegible]

$$\int_1^\omega (\psi_1(t)\cos(v\log t) + \psi_2(t)\sin(v\log t))\, t^{-u}\, dt,$$

$$\int_1^\omega (-\psi_1(t)\sin(v\log t) + \psi_2(t)\cos(v\log t))\, t^{-u}\, dt.$$

[2]) l. c., S. 14.

[3]) „Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^x F(ax)\, e^{-[illegible]}$ [illegible]
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sc[illegible]
Paris, Bd. 132, 1901, S. 1396.

[4]) Die entsprechende Mitteilung Herrn Franels ist von Herrn H[illegible]
auf S. 364–365 seiner Arbeit publiziert: „Sur quelques appl[illegible]
géométriques des séries de Fourier". Annales scientifiques de [illegible]
normale supérieure, Ser. 3, Bd. 19, 1902.

[5]) „Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Ab[illegible]
Acta mathematica, Bd. 27, 1903, S. 345.

[6]) l. c., S. 13.

[7]) Die von Herrn Nielsen in seiner Arbeit „Elementare Herleitun[illegible]
einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion" (Monatshefte f[illegible]
Mathematik und Physik, Bd. 15, 1904, S. 316) gegebene Begründung f[illegible]
die Sätze I‴ und II‴ des Textes ist unzureichend. Seine auf S. [illegible]

Beweis: Wenn

$$\int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega),$$

so daß insbesondere $|\Psi(\omega)|$ für alle $\omega \geq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke A gelegen ist. Es besteht nun die Gleichung

$$(46)\quad \int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt = \Psi(\omega)\, \omega^{-x_1+x_0} + (x_1 - x_0) \int_1^\omega \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Wegen $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega)\, \omega^{-x_1+x_0} = 0;$$

wegen

$$|\Psi(t)| < A$$

konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt;$$

also folgt aus (46) die behauptete Konvergenz des Integrals

$$\Im(x_1) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt$$

und zugleich die Relation

---

des „Handbuches" gemachte Angabe, Herr Pincherle habe die Konvergenz des Integrales für $\Re(x_1) \geq \Re(x_0)$ nachgewiesen, ist nicht richtig; Herr Pincherle spricht — mit Recht — nur von der Konvergenz für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$, und für $\Re(x_1) = \Re(x_0)$ braucht das Integral nicht zu konvergieren. Endlich schreibt Herr Nielsen a. a. O. (S. 325) irrtümlich mir die Priorität der Bemerkung zu, daß der Satz I''' auch ohne Voraussetzung der Stetigkeit von $\psi(t)$ gilt.

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt = (x_1 - x_0) \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Aus Satz I‴ folgt für das Integral $\mathfrak{J}(x)$ die Existenz
Konvergenzhalbebene, deren Abszisse λ natürlich auch
oder $+\infty$ sein kann.

Satz II‴: In jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches in
halb der Konvergenzhalbebene liegt, ist das Inte
$\mathfrak{J}(x)$ gleichmäßig konvergent.

Beweis (nach Herrn Pincherle): Nach Voraussetzung
es zwei positive Konstanten p und q, so daß für alle x i

$$\Re(x) \geq \lambda + 2p, \quad |x| < q$$

ist. Es sei

$$x_0 = \lambda + p,$$

$$\int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega).$$

Dann folgt wegen

$$|\Psi(\omega)| < A$$

aus

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt = \Psi(\omega_1)\, \omega_1^{-x+x_0} - \Psi(\omega_0)\, \omega_0^{-x+x_0}$$

$$+ (x - x_0) \int_{\omega_0}^{\omega_1} \Psi(t)\, t^{-x+x_0-1}\, dt$$

die Ungleichung

$$\left| \int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt \right| < \frac{A}{\omega_1^p} + \frac{A}{\omega_0^p} + (q + \lambda + p)\, A \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{dt}{t^p},$$

deren rechte Seite gegen Null konvergiert, falls ω_0 und ω_1
Unendliche rücken. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz II‴ führt zum

Satz III‴: $\mathfrak{J}(x)$ stellt in seiner Konvergenzhalbebe
eine reguläre analytische Funktion von x dar u
darf in jener Halbebene beliebig oft unter d
Integralzeichen differentiiert werden.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}(x)$ eine analytische Funktion von x ist, beweist Herr Pincherle unnötigerweise zuerst, daß das durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehende Integral für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert und zwar in einer gewissen Umgebung jeder Stelle gleichmäßig; er wendet dann einen Satz von Scheeffer[1]) an, nach welchem daraus der analytische Charakter von $\mathfrak{Z}(x)$ folgt. Jener Nachweis der Konvergenz (und zumal der gleichmäßigen Konvergenz) ist jedoch überflüssig, da statt des Scheefferschen Satzes ein viel weittragenderer Satz von Herrn de la Vallée Poussin[2]) zur Verfügung steht; ich mache hier zu Herrn Pincherles Beweisführung die analoge Bemerkung wie auf S. 163, Anm. 1 gegenüber Herrn Cahen, und es erscheint mir prinzipiell wichtig, diese Dinge zu erwähnen, obgleich im vorliegenden Fall die Untersuchung des durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehenden Integrals keine Mühe macht.

Der Satz von Herrn de la Vallée Poussin[3]) lautet:

Es sei n eine Zahl, welche unstetig oder stetig ins Unendliche wächst, $f(x, n)$ für jedes in Betracht kommende n eine in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x. Es existiere für alle x in $\mathfrak{G}$ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} f(x, n) = f(x),$$

und zwar konvergiere $f(x, n)$ für alle x in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

---

[1]) „Über einige bestimmte Integrale, betrachtet als Funktionen eines komplexen Parameters", Habilitationsschrift, München, 1883, S. 5–6.

[2]) „Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 17, Teil 2, 1893, S. 324–325.

[3]) Herr de la Vallée Poussin beweist ihn durch Anwendung der — von ihm wiedergefundenen — Moreraschen Umkehrung des Cauchyschen Satzes. Für den Fall, daß n alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, stellen 1. und 2. den auf S. 163–164 erwähnten Weierstraßschen Satz dar.

1. Dann ist $f(x)$ in $\mathfrak{G}$ eine reguläre analytisch[e] Funktion von x.

2. Es ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$ in $\mathfrak{G}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^k f(x,n)}{d x^k} = \frac{d^k f(x)}{d x^k}.$$

3. Bei gegebenem k konvergiert $\frac{d^k f(x,n)}{d x^k}$ geg[en] $f^{(k)}(x)$ für jedes innerhalb $\mathfrak{G}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{G}'$ gleic[h]mäßig.

Durch Anwendung von 1. und 2. ergibt sich folgen[der] Beweis des Satzes III''': Es werde

$$f(x,n) = \int_1^n \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

gesetzt, wo n alle positiven Werte ≥ 1 durchläuft; $\mathfrak{G}$ sei [ein] beliebiges, in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ gelegenes, zusamm[en]hängendes Gebiet. Nach Satz II''' konvergiert $f(x,n)$ in [$\mathfrak{G}$] gleichmäßig gegen $\mathfrak{Z}(x)$; ferner ist $f(x,n)$ bei konstantem [n] eine in $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x; denn[1]) es i[st] die gliedweise Integration der unendlichen Reihe

$$\psi(t)\, t^{-x} = \psi(t) - \psi(t) \log t \cdot x + \frac{\psi(t) \log^2 t}{2!} x^2 - \cdots$$

über das Intervall $(1 \ldots n)$ erlaubt, und die hierdurch [ent]stehende Reihe stellt sogar eine ganze transzendente Funkt[ion] von x dar. Nach 1. ist also

$$\lim_{n=\infty} f(x,n) = \mathfrak{Z}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

in $\mathfrak{G}$, also überhaupt für $\Re(x) > \lambda$ eine reguläre analytis[che] Funktion; nach 2. ist in $\mathfrak{G}$, also für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{d^k \mathfrak{Z}(x)}{d x^k} = \int_1^\infty \psi(t)\,(-\log t)^k\, t^{-x}\, dt,$$

womit der Satz III''' bewiesen ist.

---

[1]) Man braucht hierzu nicht einmal die von Herrn de la Vall[ée] Poussin aus seinem Satze gezogenen allgemeinen Folgerungen über Inte[-] grale mit einem komplexen Parameter.

Aus

$$|\psi(t) t^{-x_1}| = |\psi(t) t^{-x_0}| \frac{1}{t^{\Re(x_1 - x_0)}}$$

gibt sich ohne weiteres der

tz IV''': Der Bereich absoluter Konvergenz von

$$\vartheta(x) = \int_1^\infty \psi(t) t^{-x} dt$$

ist eine Halbebene $\Re(x) > \mu$ mit eventuellem Einschluß des Randes.

Diesen bekannten Sätzen füge ich nun die Analoga zu n Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen hinzu.

Die Bestimmung der Abszissen λ und μ der Grenzgeraden dingter und unbedingter Konvergenz ergibt sich durch den

tz VIII''': Falls $\lambda \geqq 0$ ist, ist

$$\lambda = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t) dt \right|}{\log \omega}; \tag{47}$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist

$$\mu = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \int_1^\omega |\psi(t)| dt}{\log \omega}. \tag{48}$$

Beweis: Es braucht nur die Formel (47) bewiesen zu erden; denn aus ihr ergibt sich (48) durch Anwendung auf s Integral $\int_1^\infty |\psi(t)| t^{-x} dt$.

1. Es werde

$$\limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t) dt \right|}{\log \omega} = \varkappa$$

setzt, und es sei $\varkappa$ endlich, $\delta > 0$; dann soll die Konvernz von

$$\vartheta(\varkappa + \delta) = \int_1^\infty \psi(t) t^{-\varkappa - \delta} dt$$

werden. Wenn

$$\int_1^\omega \psi(t)\,dt = \Phi(\omega)$$

gesetzt wird, ist

$$(49)\quad \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}dt = \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} + (\varkappa+\delta)\int_1^\omega \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}$$

Von einer gewissen Stelle an ist

$$|\,\Phi(\omega)\,| < \omega^{\varkappa+\frac{\delta}{2}};$$

daher ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} = 0,$$

und das Integral

$$\int_1^\infty \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,dt$$

ist (sogar absolut) konvergent, da von einer gewissen Stell

$$|\,\Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,| < t^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}\,t^{-\varkappa-\delta-1} = \frac{1}{t^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

ist; nach (49) existiert also, wie behauptet,

$$\lim_{\omega=\infty} \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}\,dt = \mathfrak{Z}(\varkappa+\delta).$$

2. Es sei $x > 0$ und $\mathfrak{Z}(x)$ konvergent, $\delta > 0$; dann ist zu zeigen, daß von einer gewissen Stelle an

$$|\,\Phi(\omega)\,| < \omega^{x+\delta}$$

ist. Falls

$$\int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\,dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, ergibt sich

$$\Phi(\omega) = \int_1^\omega \psi(t)\,dt = \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\cdot t^x\,dt = \Psi(\omega)\,\omega^x - x\int_1^\omega \Psi(t)\,t^{x-1}$$

also wegen

$$|\Psi(\omega)| < B \qquad (\text{für alle } \omega \geqq 1)$$

$$|\Phi(\omega)| < B\omega^{\varepsilon} + B\varepsilon\int_1^{\omega} t^{\varepsilon-1}\,dt = B\omega^{\varepsilon} + B(\omega^{\varepsilon}-1) < 2B\omega^{\varepsilon},$$

lglich von einer gewissen Stelle an

$$|\Phi(\omega)| < \omega^{\varepsilon+\delta},$$

omit der Satz VIII''' bewiesen ist.

Endlich gilt der — von mir bereits publizierte[1]) —

atz X''': Wenn für alle t von einer gewissen Stelle an ($t \geqq a$)

$$\psi(t) \geqq 0$$

ist und das Integral

$$\vartheta(x) = \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

eine im Endlichen gelegene Konvergenzgerade[2]) $\Re(x) = \lambda$ besitzt, so ist $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch das Integral $\vartheta(x)$ definierten analytischen Funktion.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $= 1$ angenommen werden, da

$$\int_1^{a} \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

ine ganze transzendente Funktion von x ist. Nach Satz III''' t nun, mindestens für $|x - \lambda - 1| < 1$,

$$\vartheta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!}\, \vartheta^{(k)}(\lambda+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1-x)^k}{k!} \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \log^k t\, dt.$$

Väre $x = \lambda$ eine reguläre Stelle, so wäre der Konvergenzadius r dieser Potenzreihe > 1. Es sei p so gewählt, daß

$$p > 0,\ 1 + p < r$$

[1]) l. c. (s. S. 191, Anm. 1), S. 548.

[2]) Natürlich muß hier $\mu = \lambda$ sein.

ist. Dann wäre die Potenzreihe für $x = \lambda - p$ konvergent. Da alle Elemente in

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \log^k t\, dt$$

> 0 sind, ist die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt; es konvergiert also das Integral

$$\int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \log^k t\, dt = \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1}\, e^{(1+p)\log t}\, dt$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda+p}\, dt = \mathfrak{Z}(\lambda - p),$$

gegen die Voraussetzung, daß λ die Abszisse der Grenzgeraden von $\mathfrak{Z}(x)$ ist. Daher ist, wie behauptet, $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 3. März 1906.

1. Herr R. Hertwig hält einen Vortrag über: „Weitere Untersuchungen über die Ursachen der Geschlechtsbestimmung bei den Fröschen.“ Derselbe wird anderweitig zur Veröffentlichung gelangen.

Herr Hertwig macht darin weitere Mitteilungen über die Untersuchungen, welche er über die Entwicklung des Urogenitalsystems bei Fröschen und Kröten angestellt hat, unter besonderer Berücksichtigung der Veränderungen, welche durch Überreife der Eier hervorgerufen werden.

2. Herr L. Burmester referiert: „Über eine Theorie der geometrisch-optischen Gestalttäuschungen.“

Diese merkwürdigen Gestalttäuschungen, die man seit nahe 300 Jahren vereinzelt beobachtet hat, aber noch nicht mit Erfolg untersucht wurden, sind dadurch charakterisiert, daß an einem monokular betrachteten, körperlichen Gebilde das Fernere näher und das Nähere ferner erscheint, daß somit das Vertiefte erhaben und das Erhabene vertieft gesehen wird. Den Beobachtungen zufolge stehen Objektgebilde und entsprechendes Truggebilde in involutorischer reliefperspektiver Beziehung. Denn die Verbindungsgeraden der entsprechenden Objektpunkte und Trugpunkte gehen durch den Gesichtspunkt, den Drehpunkt des beobachtenden Auges; die entsprechenden Objektgeraden und Truggeraden sowie die entsprechenden Objektebenen und Trugebenen schneiden sich in einer Neutralebene. Ferner gehen die Truggeraden, welche parallelen Objektgeraden entsprechen,

durch einen zugehörigen Trugfluchtpunkt; und alle Trugfluchtpunkte befinden sich in einer zur Neutralebene parallelen Ebene, die den Abstand des Gesichtspunktes von der Neutralebene halbiert. Demnach kann das subjektive Truggebilde, welches einem beobachteten Objektgebilde entspricht, im voraus konstruiert, also auch als körperliches Gebilde hergestellt und mit dem wahrgenommenen subjektiven Truggebilde sukzessiv verglichen werden, um die Theorie zu bestätigen. Umgekehrt erscheint infolge der involutorischen Beziehung das körperlich hergestellte Truggebilde, wenn es an die Stelle des erschienenen subjektiven Truggebildes gesetzt wird, durch die Gestalttäuschung wieder in der Gestalt des von seiner Stelle weggenommenen ursprünglichen Objektgebildes.

Ein wichtiges Kennzeichen des erschienenen Truggebildes ist, daß bei ruhendem Gesichtspunkt einer Drehung des Objektgebildes eine entgegengesetzte Drehung des Truggebildes mit gestaltlicher Veränderung entspricht, daß bei ruhendem Objektgebilde und bewegtem Gesichtspunkt das Truggebilde in seltsamer Bewegung und gestaltlicher Veränderung erscheint. Diese Bewegungsvorgänge und diese gestaltlichen Veränderungen werden durch die Theorie erklärt und durch die Beobachtungen auch bestätigt. Die Gestalttäuschungen und die damit zusammenhängenden mannigfaltigen Erscheinungen wurden an einigen, aus weißem Karton hergestellten, monokular betrachteten Objektgebilden demonstriert: z. B. an einem einfachen, schräg gesehenen rechteckigen Blatt, welches an einem Stab befestigt ist, an einem geknickten rechteckigen Blatt, an einem Hohlwürfel und Vollwürfel sowie an einer kleinen Treppe, die alle durch die Gestalttäuschungen umgestülpt in veränderter Gestalt und veränderter Beleuchtung erscheinen; ferner an Hohlformen von Reliefs und Masken, die besonders leicht erhaben gesehen werden.

Die Abhandlung über diese Theorie der geometrisch-optischen Gestalttäuschungen wird in der „Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“ erscheinen.

3. Herr ALFR. PRINGSHEIM legt eine Arbeit von Herrn FRITZ HARTOGS vor: „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen.“

Durch Übertragung der Cauchyschen Randintegral-Darstellung auf Funktionen von zwei oder mehreren Veränderlichen gewinnt der Verfasser verschiedene in der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen keinerlei Analogon besitzende Theoreme, welche gestatten, aus dem regulären Verhalten solcher Funktionen in gewissen beschränkten Bereichen die Regularität in merklich erweitertem Umfange zu erschließen und bestimmte Aussagen über die eventuelle Verteilung singulärer Stellen zu machen.

Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von **F. Hartogs.**

(*Eingelaufen 3. März.*)

Ist eine analytische Funktion $f(x)$ für alle dem Bereiche B der x-Ebene (einschl. Begrenzung) angehörenden Werte der komplexen Veränderlichen x eindeutig und regulär, so gilt nach Cauchy für alle x, welche inneren Punkten dieses Bereiches entsprechen, die Beziehung:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - x}\, d\xi,$$

das Integral erstreckt über die (im gehörigen Sinne zu durchlaufende) vollständige Begrenzung C des Bereiches B.

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel erhält man für analytische Funktionen $f(x, y)$ zweier unabhängiger komplexer Veränderlichen x und y unter geeigneten Voraussetzungen die analoge Beziehung:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \int_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}\, d\xi\, d\eta,$$

bei welcher x einen inneren Punkt des Bereiches B der x-Ebene, y einen solchen des Bereiches B' der y-Ebene bedeutet, und ξ die vollständige Begrenzung C des Bereiches B, η diejenige C' des Bereiches B' durchläuft.

Wie nun eine genauere Untersuchung zeigt, ist es, um die Gültigkeit dieser Formel nachzuweisen, gar nicht nötig zu

wissen, daß $f(x, y)$ im vollen Gebiete (B, B') regulär sei; vielmehr genügt es zu diesem Zwecke schon, wenn von $f(x, y)$ nur feststeht, daß es sich in einem gewissen Teilgebiete desselben regulär verhalte. Da aber andererseits der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung — unter der Voraussetzung, daß wenigstens jeder Punkt (ξ, η) des Integrationsgebietes jenem Teilgebiete angehöre, — allemal eine im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y darstellt, so ergeben sich auf diese Weise ganz unmittelbar einige bemerkenswerte Sätze, auf welche, wie es scheint, die Aufmerksamkeit bisher noch nicht gelenkt worden ist.[1])

Bedeutet Γ eine irgendwie definierte Gesamtheit von Wertsystemen (x, y), so sagen wir im folgenden, der Funktionszweig (oder auch kurz die Funktion) $f(x, y)$ verhalte sich „im Gebiete Γ eindeutig und regulär", wenn es möglich ist, jedem Punkte $x = x'$, $y = y'$ von Γ ein so kleines Kreisgebiet $|x - x'| < \varrho$, $|y - y'| < \varrho'$ zuzuordnen, daß die von x und y abhängige Größe $f(x, y)$

1. für jede Stelle (x, y), welche einem oder mehreren dieser Kreisgebiete angehört, noch eindeutig erklärt sei,

2. innerhalb jedes einzelnen Kreisgebietes mit einer nach ganzen positiven Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$ fortschreitenden und daselbst absolut konvergierenden Reihe dem Werte nach übereinstimme.

Stellt Γ speziell eine abgeschlossene Punktmenge dar, so ist es, wie leicht zu zeigen, dann auch stets möglich, die Wahl der Größen ϱ und ϱ' so zu treffen, daß keine einzige von ihnen kleiner sei als eine gewisse feste positive Größe a.

Das Analoge gilt für den Fall beliebig vieler Veränderlichen.

---

[1]) Die betreffenden Sätze hat der Verfasser zum Teil schon in seiner Inaugural-Dissertation (München 1903) auf anderem Wege hergeleitet. (S. daselbst Kap. VI.)

1.

Es sei in der x-Ebene ein beliebiger Bereich B[1]), desgleichen in der y-Ebene ein beliebiger Bereich B' vorgelegt. Die Randkurven dieser Bereiche mögen mit C bezw. C' bezeichnet werden, und es stelle $y = y_0$ irgend einen festen, dem Bereiche B' angehörenden Punkt dar. Wir wollen alsdann annehmen, es stehe von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y lediglich fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört.

Es gibt alsdann zunächst, da B eine abgeschlossene Punktmenge darstellt, eine positive Größe k derart, daß $f(x, y)$ auch noch an allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und y der Bedingung $|y - y_0| < k$ genügt, eindeutig und regulär ist; die Gesamtheit aller inneren Punkte y von B', für welche zugleich $|y - y_0| < k$ gilt, heiße K.

---

[1]) Unter einem „Bereich B“ der x-Ebene werde im folgenden stets eine abgeschlossene Punktmenge von der Beschaffenheit verstanden, daß a) jeder Punkt x derselben entweder selbst ein innerer Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkte x ebenfalls zu B gehören) oder doch als Häufungsstelle von inneren Punkten erscheint, und daß b) je zwei innere Punkte von B stets durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz aus inneren Punkten von B besteht. Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte von B (also derjenigen Punkte von B, welche nicht zugleich innere sind) möge die „Begrenzung“ oder die „Randkurve“ C des Bereiches B heißen; sie stellt ebenfalls eine abgeschlossene Punktmenge dar. In der entsprechenden Weise mögen B' und C' in der y-Ebene erklärt sein. Endlich möge ein „Bereich $\mathfrak{B}$“ der 4-dimensionalen xy-Mannigfaltigkeit in Bezug auf die letztere die analogen Eigenschaften besitzen wie ein Bereich B in Bezug auf die 2-dimensionale x-Mannigfaltigkeit.

...endlichen Wert. Des
...$= y_1$ irgend ein festes der-
...$\frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}$ durch eine nach
...$x - x_1$ und $y - y_1$ fortschreitende
...Koeffizienten von x und y
...bei geeigneter Beschränkung der
...und $y - y_1$ **absolut**, sowie in
...kommenden Wertsysteme ξ, η
...Diese sämtlichen Eigenschaften
...dann noch bestehen, wenn man die-
...Anordnung ihrer Terme möglich ist,
...Reihe auffaßt. Durch gliedweise
...erhält man dann in der Tat die
...Integrals nach positiven ganzen Potenzen
...und zwar konvergiert die so sich er-
...einfach unendlich gedachte) Reihe sicher-
...man noch die obere Schranke für die ab-
...$x - x_1$ und $y - y_1$ beliebig wenig ver-
...kann somit, wenn man will, auch wieder
...gente **Doppelreihe** aufgefaßt werden.
...aber hervor, daß der betrachtete Ausdruck
...(x, y) bezw. ihre analytische Fortsetzung auch
...des vollen Gebietes (B, B') darstellen muß;
...**sich also notwendig auch noch in der**
...**jedes im Innern des Gebietes (B, B') ge-**
...**Punktes (x, y) regulär.**

...man jede spezielle Annahme bezüglich der Begren-
...Bereiche B und B' fallen, so kann man in folgender
...Ziele gelangen. Aus den Voraussetzungen folgt
...die Existenz einer positiven, von Null verschiedenen
...von der Beschaffenheit, daß, sobald $x = x'$, $y = y'$
...eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet,
...$y)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ ein-
...definiert und regulär ist. Die x-Ebene werde nun auf
...eine Weise in kongruente Quadrate von der Seitenlänge

Wird nun der Einfachheit halber fürs erste vorausgesetzt, daß die Begrenzung C des Bereiches B und ebenso diejenige C' des Bereiches B' durch je eine endliche Anzahl von stetigen rektifizierbaren Kurven gebildet werde, so hat man, solange y auf das Gebiet K beschränkt bleibt und x einen inneren Punkt des Bereiches B bedeutet:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi,$$

das Integral über die vollständige Begrenzung C des Bereiches B erstreckt. Des weiteren ist aber, wenn ξ irgend einen Punkt von C bezeichnet und y seine bisherige Bedeutung beibehält:

$$f(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta - y} d\eta,$$

das Integral erstreckt über die Begrenzung von B'. Somit ergibt sich:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C d\xi \int_{C'} \frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)} d\eta.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, welcher hiernach im ganzen Innern des Gebietes (B, K) mit $f(x, y)$ übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.[1] Infolge der bezüglich $f(x, y)$ geltenden Voraussetzungen nämlich ist die Größe unter dem doppelten Integralzeichen, solange x einen inneren Punkt von B, y einen solchen von B' bezeichnet, eine im ganzen Integrationsgebiete stetige Funktion der Integrationsveränderlichen ξ, η, und daher besitzt das Doppelintegral auch noch für alle diese Werte von

[1] Ein direkter Nachweis hierfür ergibt sich auch aus gewissen allgemeinen Sätzen über Integrale von Funktionen, welche zugleich analytische Funktionen eines oder mehrerer Parameter sind. (Vgl. für den einfachsten Fall Enzykl. d. math. Wiss. II B 1, Nr. 6, p. 22 sowie die Anfangsbemerkung in Nr 43.)

x und y jedenfalls einen wohlbestimmten endlichen Wert. Des weiteren kann aber, wenn $x = x_1$, $y = y_1$ irgend ein festes derartiges Wertepaar bedeutet, $\frac{f(\xi, \eta)}{(\xi - x)(\eta - y)}$ durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$ fortschreitende Doppelreihe ersetzt werden, deren Koeffizienten von x und y unabhängig sind, und welche bei geeigneter Beschränkung der absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ absolut, sowie in Bezug auf alle in Betracht kommenden Wertsysteme ξ, η gleichmäßig konvergiert. Diese sämtlichen Eigenschaften der Reihe bleiben auch dann noch bestehen, wenn man dieselbe, was bei passender Anordnung ihrer Terme möglich ist, als einfach unendliche Reihe auffaßt. Durch gliedweise Integration dieser letzteren erhält man dann in der Tat die Entwicklung des Doppelintegrals nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_1$ und $y - y_1$, und zwar konvergiert die so sich ergebende (zunächst als einfach unendlich gedachte) Reihe sicherlich absolut, wenn man noch die obere Schranke für die absoluten Beträge von $x - x_1$ und $y - y_1$ beliebig wenig verkleinert; die Reihe kann somit, wenn man will, auch wieder als absolut konvergente Doppelreihe aufgefaßt werden.

Hieraus geht aber hervor, daß der betrachtete Ausdruck die Funktion $f(x, y)$ bezw. ihre analytische Fortsetzung auch noch im Innern des vollen Gebietes (B, B') darstellen muß; $f(x, y)$ verhält sich also notwendig auch noch in der Umgebung jedes im Innern des Gebietes (B, B') gelegenen Punktes (x, y) regulär.

Läßt man jede spezielle Annahme bezüglich der Begrenzung der Bereiche B und B' fallen, so kann man in folgender Weise zum Ziele gelangen. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst die Existenz einer positiven, von Null verschiedenen Größe a von der Beschaffenheit, daß, sobald $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ eindeutig definiert und regulär ist. Die x-Ebene werde nun auf irgend eine Weise in kongruente Quadrate von der Seitenlänge

$\frac{1}{3}a$ eingeteilt, und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B enthalten, überdeckte Gebiet (einschl. Begrenzung) mit B_1 bezeichnet. Jeder Punkt von B ist alsdann innerer Punkt von B_1, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_1, speziell also jeder Begrenzungspunkt von B_1 ist von einem gewissen Punkte des Bereiches B und daher auch von einem gewissen Punkte der Begrenzung C desselben um weniger als $\frac{1}{2}a$ entfernt. Auf die nämliche Weise möge aus dem Bereich B' der y-Ebene der erweiterte Bereich B_1' gebildet werden. Offenbar ist es alsdann, ohne daß die Voraussetzungen ihre Gültigkeit verlieren, gestattet, in denselben die Bereiche B und B' durchweg durch B_1 bezw. B_1' zu ersetzen. Nach dem oben Bewiesenen verhält sich somit der betrachtete Funktionszweig $f(x, y)$ im Innern des Gebietes (B_1, B_1'), also sicher im vollen Gebiete (B, B') regulär.

Wir können demnach den folgenden Satz aussprechen:

Es sei C die Begrenzung eines beliebigen Bereiches B der x-Ebene und $y = y_0$ irgend ein dem Bereiche B' der y-Ebene angehöriger Punkt. Verhält sich alsdann der Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus allen unter a) und b) genannten Punkten besteht, so verhält sich die Fortsetzung[1]) desselben auch noch im vollen Gebiete (B, B') eindeutig und regulär.

Ein zweiter Beweis für diesen Satz, bei welchem nur einfache Integrale auftreten, möge hier noch angedeutet werden.

Es werde die oben benutzte Einteilung der x-Ebene in Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{3}a$ wieder aufgenommen und das von allen denjenigen Quadraten, welche im Innern oder längs der Begrenzung irgend einen Punkt von B_1 aufweisen,

[1]) Dabei handelt es sich selbstredend nur um solche Fortsetzungen, welche man erhält, ohne daß x den Bereich B und y den Bereich B' verläßt.

überdeckte Gebiet (inkl. Begrenzung) mit B_2 bezeichnet. Der Bereich B_2 enthält dann den Bereich B_1 in seinem Innern, und jeder nicht zu B gehörige Punkt von B_2 ist von einem gewissen Punkte von B und daher auch von einem gewissen Punkte von C um weniger als a entfernt. Der nicht zu B_1 gehörige Teil von B_2 möge (einschl. seiner Begrenzung) mit S bezeichnet werden. $f(x, y)$ verhält sich alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär und es gilt somit:

$$(1) \quad 2\pi i f(x, y) = \int\limits_{(S)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi = \int\limits_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi - \int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y irgend einen Punkt von B' bezeichnet, und die Integrale jedesmal über die vollständige Begrenzung des in Parenthese angegebenen Gebietes zu erstrecken sind.

Andererseits verhält sich $f(x, y)$ im Gebiete $(B_2, |y - y_0| < a)$ eindeutig und regulär, und es gilt somit, solange $|y - y_0| < a$ ist,

$$\int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi = 0$$

für jeden nicht zu B_1 gehörigen Wert von x. Da aber für jeden solchen Wert von x dieses Integral eine im Bereiche B' durchweg reguläre analytische Funktion von y darstellt, so verschwindet es auch für *jedes* dem Bereiche B' angehörige y, und die rechte Seite der Gleichung (1) reduziert sich somit stets auf ihr erstes Glied. Dieses, welches demnach im Gebiete (S, B') mit $2\pi i f(x, y)$ dem Werte nach übereinstimmt, stellt aber eine im Innern des ganzen Gebietes (B_2, B'_1), speziell also im vollen Gebiete (B, B') eindeutige und reguläre analytische Funktion von x und y dar.

2.

Über die Verteilung der singulären Stellen bei den analytischen Funktionen zweier Veränderlichen sagt der soeben bewiesene Satz folgendes aus:

Es sei C die Randkurve irgend eines Bereiches B der x-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist als-

dann der Punkt $x=0$, $y=0$ für einen gewissen Zweig $f(x,y)$ einer analytischen Funktion von x und y eine singuläre Stelle, während dieser Zweig sich eindeutig und regulär verhält an jeder Stelle $(x,0)$, für welche x auf C liegt, so gibt es eine Zahl $l>0$ derart, daß zu **jedem** Punkte $y=y_0$ des Kreises $|y|<l$ eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Zweiges existiert, für welche x_0 dem Bereiche B angehört.

Infolge der über $f(x,y)$ gemachten Voraussetzungen existiert nämlich jedenfalls eine positive Größe l von der Beschaffenheit, daß $f(x,y)$ noch im Gebiete $(C, |y|<l)$ eindeutig und regulär ist. Die so bestimmte Größe l genügt aber dann zugleich den Anforderungen des Satzes. Ist nämlich $y=y_0$ irgend ein der Bedingung $|y_0|<l$ genügender Wert, und verhielte sich entgegen der Behauptung $f(x,y)$ in der Umgebung einer jeden Stelle (x, y_0) regulär, für welche x dem Bereiche B angehört, so müßte nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x,y)$ auch im vollen Bereiche $(B, |y|<l)$ eindeutig und regulär sein, während ja der Punkt $x=0$, $y=0$ für $f(x,y)$ eine singuläre Stelle sein sollte.

Durch Spezialisierung ergibt sich aus obigem Satze der folgende:

Ist der Punkt $x=0$, $y=0$ eine singuläre Stelle für den Funktionszweig $f(x,y)$, gibt es jedoch in einer gewissen Nachbarschaft dieses Punktes für $f(x,y)$ keine weitere singuläre Stelle, deren y-Koordinate Null ist, oder gibt es wenigstens innerhalb jedes beliebig kleinen Kreises um $x=0$ noch Bereiche B, welche den Punkt $x=0$ enthalten, und deren Randpunkte mit $y=0$ sämtlich reguläre Stellen für $f(x,y)$ ergeben, so läßt sich zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl k stets eine zweite l derart angeben, daß zu **jedem** Punkte $y=y_0$ des Kreises $|y|<l$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0) jenes Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung $|x_0|<k$ genügt.

3.

Ist ein beliebiger Bereich B der x-Ebene sowie ein beliebiger Bereich B' der y-Ebene vorgelegt und steht von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion fest, daß er sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches aus allen Begrenzungsstellen des Bereiches $\mathsf{B} = (B, B')$ besteht (d. h. sowohl aus allen Stellen (x, y), für welche x der Randkurve von B und y dem Bereiche B' als auch aus allen denjenigen, für welche x dem Bereiche B und y der Randkurve von B' angehört), so ist nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze $f(x, y)$ notwendig auch im vollen Bereiche B eindeutig und regulär. Dieser Satz läßt sich nun auf völlig beliebige Bereiche B[1]) der xy-Mannigfaltigkeit übertragen; doch werden wir uns hierbei auf die Betrachtung eindeutiger analytischer Funktionen beschränken. Der Satz lautet alsdann:

Liegt ein beliebiger Bereich B der xy-Mannigfaltigkeit vor und steht von der eindeutigen analytischen Funktion $f(x, y)$ fest, daß sie sich an jeder Begrenzungsstelle (x, y) des Bereiches B regulär verhalte, so verhält sie sich auch im vollen Bereiche B regulär.

Beweis. Da die Begrenzung von B eine abgeschlossene Menge von Punkten (x, y) darstellt, so läßt sich zunächst wiederum eine positive Größe a angeben, so beschaffen, daß wenn (x', y') irgend eine Begrenzungsstelle von B bedeutet, $f(x, y)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a$, $|y - y'| < a$ regulär ist.

Die Gesamtheit der y-Koordinaten aller Punkte von B bildet offenbar einen Bereich B' der y-Ebene. Ist $y = y_0$ ein Randpunkt von B' (oder auch ein beliebiger Punkt von B', welcher von einem Randpunkte um weniger als a entfernt ist), so ist $f(x, y)$ sicher in der Umgebung jeder dem Bereiche B angehörenden Stelle (x, y) regulär, deren y-Koordinate gleich y_0 ist. Wüßte man, daß das nämliche auch von jedem be-

[1]) Siehe p. 225, Fußnote [1]).

liebigen Punkte $y = y_0$ des Bereiches B' gilt, so wäre damit die Behauptung erwiesen. Die gegenteilige Annahme führt aber in der Tat auf einen Widerspruch. Gäbe es nämlich auch Punkte $y = y_1$ von B', für welche jene Aussage nicht zuträfe, so müßten speziell auch zwei Punkte $y = y_0$ und $y = y_1$ des Bereiches B' nachweisbar sein, von denen der erste, y_0, jene Bedingung erfüllt, der andere, y_1, hingegen nicht, und deren Entfernung voneinander zugleich kleiner ist als $\frac{1}{2}a$. Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß — entgegen der soeben gemachten Annahme — $f(x, y)$ dann auch in der Umgebung einer jeden dem Bereiche **B** angehörenden Stelle regulär sein muß, deren y-Koordinate gleich y_1 ist.

Ist (x_1, y_1) eine beliebige solche Stelle, so unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem der Punkt (x_1, y_0) erstens ein Begrenzungspunkt von **B**, zweitens ein innerer Punkt von **B** ist, oder drittens dem Bereiche **B** überhaupt nicht angehört.

Im ersten Falle ist $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_0| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im dritten Falle gibt es, da zwar der Punkt (x_1, y_1) dem Bereiche **B** angehört, der Punkt (x_1, y_0) hingegen nicht, auf der geradlinigen Verbindungsstrecke der Punkte y_0 und y_1 mindestens einen Zwischenpunkt y_2 derart, daß (x_1, y_2) ein Begrenzungspunkt von **B** ist. Dann verhält sich $f(x, y)$ im Gebiete $|x - x_1| < a$, $|y - y_2| < a$ durchweg regulär, also speziell auch in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

Im zweiten Falle endlich bedeute X die Gesamtheit aller Stellen x, für welche (x, y_0) ein innerer Punkt von **B** ist; die Gesamtheit aller derjenigen Punkte von X, welche mit dem (gleichfalls zu X gehörenden) Punkte x_1 durch eine aus einer endlichen Anzahl von Geraden zusammengesetzte, aus lauter Punkten von X bestehende Linie verbunden werden können, bilden nebst ihren Häufungsstellen alsdann einen Bereich B der x-Ebene und zwar von folgender Beschaffenheit: Ist x irgend ein Punkt von B, so gehört der Punkt (x, y_0) dem Bereiche **B** an; ist speziell x ein Punkt der Randkurve C von B,

so ist der Punkt (x, y_0) (da er nicht innerer Punkt von B sein kann) sicher ein Begrenzungspunkt von B. Demnach ist $f(x, y)$ in dem ganzen Gebiete regulär, welches besteht: a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Kurve C, y dem Bereiche $|y - y_0| \leq \frac{2}{3} a$ angehört; b) aus allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereiche B angehört. Nach dem Satze von Nr. 1 ist infolgedessen $f(x, y)$ auch im vollen Gebiete $(B, |y - y_0| < \frac{2}{3} a)$ regulär, also speziell in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1).

4.

Der in Nr. 1 bewiesene Satz läßt noch nach einer anderen Richtung hin eine Verallgemeinerung zu. Die bei der Voraussetzung desselben unter b) definierte Gesamtheit von Stellen (x, y_0) kann nämlich ersetzt werden durch eine anderweitige Gesamtheit, bei welcher die y-Koordinate nicht mehr ungeändert bleibt, sondern ihren Wert gleichzeitig mit x ändert (ohne jedoch den Bereich B' jemals zu verlassen). Allerdings kann man sich schon an den einfachsten Beispielen von Singularitäten unmittelbar davon überzeugen, daß diese Abhängigkeit keineswegs völlig willkürlicher Natur sein (etwa Unstetigkeiten aufweisen) darf, sowie ferner, daß die Gestalt mindestens eines der Bereiche B, B' gewissen Beschränkungen unterworfen werden muß.[1]) Wir werden im folgenden annehmen,

---

[1]) Es sei z. B. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. Wählt man nun etwa für B den Bereich $|x| < 2$, für B' den Bereich $|y| \leq 1$ (so daß $f(x, y)$ im Gebiete (C, B') regulär ist), und setzt des weiteren $\varphi(x) = 0$ für jeden von Null verschiedenen, dem Bereiche B angehörenden Wert x, dagegen $\varphi(0)$ gleich irgend einer von Null verschiedenen Konstanten, so verhält sich $f(x, y)$ in der Umgebung jeder Stelle $(x, \varphi(x))$ regulär und es sind somit alle Voraussetzungen erfüllt; nichtsdestoweniger ist $f(x, y)$ im Bereiche (B, B') nicht durchweg regulär. — Wählt man andererseits für B den Kreisring $1 < |x| \leq 4$, für B' den Kreisring $2 < |x| < 3$ und setzt durchweg $\varphi(x) = -x$, so sind wiederum alle Voraussetzungen erfüllt, ohne daß $f(x, y)$ im Gebiete (B, B') durchweg regulär wäre. Damit der Satz gültig sei, muß zum mindesten einer der beiden Bereiche B und B' einfach zusammenhängend sein.

daß die y-Koordinate eine eindeutige analytische Funktion $\psi(x)$ der x-Koordinate sei, und ferner eine besondere Voraussetzung über die Gestalt des Bereiches B' hinzufügen.

Es sei $y = \psi(x)$ eine im Bereiche B der x-Ebene eindeutige und reguläre analytische Funktion von x, so beschaffen, daß, solange x dem Bereiche B angehört, der Punkt $y = \psi(x)$ im **Innern** des Bereiches B' der y-Ebene gelegen sei. Von dem Zweige $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y stehe fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhalte, welches besteht:

a) aus allen Stellen (x, y), für welche x der Begrenzung C des Bereiches B und y gleichzeitig dem Bereiche B' angehört, und

b) aus allen Stellen (x, y), für welche x dem Bereiche B angehört und gleichzeitig $y = \psi(x)$ ist.

Der Bereich B' besitze überdies die Eigenschaft, daß seine Begrenzung mit jeder Geraden der y-Ebene höchstens zwei Punkte oder eine einzige geradlinige Strecke gemein habe. Alsdann ist $f(x, y)$ auch im vollen Bereiche (B, B') eindeutig und regulär.

Beweis. Die positive Größe β möge so bestimmt werden, daß, wenn $x = x'$, $y = y'$ irgend eine der unter a) oder b) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y)$ noch im Bereiche $|x - x'| < \beta$, $|y - y'| < \beta$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite positive Größe α sei nicht größer als β, werde jedoch, was stets möglich ist, überdies noch so klein angenommen, daß, wenn $x = x'$ einen völlig beliebigen Punkt von B bezeichnet, für alle x des Gebietes $|x - x'| < \alpha$:

1. die Funktion $\psi(x)$ noch eindeutig und regulär sei,
2. der Punkt $y = \psi(x)$ dem Bereiche B' noch angehöre,
3. die Ungleichung $|\psi(x) - \psi(x')| < \frac{1}{2}\beta$ gelte.

Mittels dieser Größe α mögen alsdann wie in Nr. 1 aus B die Bereiche B_1, B_2 und S konstruiert werden.

Da $f(x, y)$ alsdann im Gebiete (S, B') eindeutig und regulär ist, so hat man zunächst ebenso wie in Nr. 1 die Beziehung:

$$(1) \qquad 2\pi i\, f(x, y) = \int\limits_{(B_2)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi - \int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x irgend einen inneren Punkt des Gebietes S, y einen beliebigen Punkt von B' bedeutet.

Ist andererseits $x = x_1$ ein beliebiger Punkt von B_1, so gibt es jedenfalls einen Punkt $x = x_0$ von B derart, daß $|x_1 - x_0| < \alpha$; infolge obiger Annahmen gehört also der Punkt $\psi(x_1)$ dem Bereiche B' noch an und es gilt gleichzeitig

$$|\psi(x_1) - \psi(x_0)| < \tfrac{1}{2}\beta.$$

Setzt man daher, unter $\bar{y}$ irgend einen festen Punkt des Bereiches B' verstehend,

$$\Psi_t(x) = \psi(x) + t(\bar{y} - \psi(x))$$

und bezeichnet mit D den Durchmesser eines Kreises, welcher den ganzen Bereich B' umfaßt, so gilt sicher noch:

$$|\Psi_t(x_1) - \psi(x_0)| < \beta,$$

solange t dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als $\frac{\beta}{2D}$. $f(x, y)$ verhält sich nun im Gebiete $|x - x_0| < \beta$, $|y - \psi(x_0)| < \beta$ eindeutig und regulär, speziell also in der Umgebung des Punktes $(x_1, \Psi_t(x_1))$. Da überdies $\psi(x)$ im Bereiche B_1 eindeutig und regulär ist, so stellt demnach $f(x, \Psi_t(x))$, solange nur $|t| < \frac{\beta}{2D}$, eine im Bereiche B_1 eindeutige und reguläre analytische Funktion von x dar, und es gilt somit:

$$\int\limits_{(B_1)} \frac{f(\xi, \Psi_t(\xi))}{\xi - x}\, d\xi = 0 \qquad \left(|t| < \frac{\beta}{2D}\right)$$

für jeden außerhalb B_1 gelegenen Punkt x.

Ist nun t_0 irgend ein der Bedingung $0 \leq t_0 < 1$ genügender reeller Wert, ξ irgend ein Punkt der Begrenzung des Bereiches B_1, so gehört der Punkt $\psi(\xi)$ und daher auch der

Punkt $\Psi_{t_0}(\xi)$ dem Bereiche B' noch an; wird sodann die Größe t auf das Gebiet $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ beschränkt, so gilt

$$|\Psi_t(\xi) - \Psi_{t_0}(\xi)| = |t - t_0| \, |\bar{y} - \varphi(\xi)| < \beta$$

und demnach verhält sich die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes $(\xi, \Psi_t(\xi))$ noch eindeutig und regulär.[1] Daraus folgt aber, daß das zuletzt betrachtete Integral — unter x nach wie vor einen außerhalb B_1 gelegenen Punkt verstanden — in jedem Gebiete $|t - t_0| < \frac{\beta}{D}$ $(0 < t_0 \leq 1)$ eine reguläre analytische Funktion von t darstellt. Da diese Funktion aber für $|t| < \frac{\beta}{2D}$ verschwindet, so muß sie auch für alle betrachteten Werte von t verschwinden, speziell also für $t = 1$. Mithin reduziert sich die rechte Seite von Gleichung (1) auf ihr erstes Glied; dieses aber stellt — aus genau denselben Gründen wie in Nr. 1 — eine im vollen Gebiete (B_x, B') eindeutige und reguläre Funktion von x und y dar.

5.

Die sämtlichen bisher erwähnten Sätze lassen sich auch auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen. Als Grundlage kann dabei der in Nr. 1 bewiesene Satz dienen, wenn derselbe zuvor noch auf eine etwas allgemeinere Form gebracht wird. Liegt nämlich eine analytische Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, w, \ldots$ vor, so kann man, wenn man in der x- und in der y-Ebene die in Nr. 1 gebrauchten Bezeichnungen beibehält, während die Gebiete $G, G', \ldots$ der u-, v-, ... Ebene lediglich der Beschränkung unterliegen sollen, daß sie abgeschlossene Punktmengen darstellen,[2] jenem Satze die folgende Gestalt geben:

[1]) ξ ist nämlich von einem gewissen Punkte der Randkurve C und $\Psi_t(\xi)$ von dem zu B' gehörigen Punkte $\Psi_{t_0}(\xi)$ um weniger als β entfernt.

[2]) G braucht also nicht notwendig einen 2-dimensionalen Bereich

(A.) Steht von dem Zweige $f(x, y, u, v, \ldots)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x, y, u, v, \ldots$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, welches besteht

a) aus allen Stellen $(x, y, u, v, \ldots)$, welche durch das Symbol $(C, B', G, G', \ldots)$, sowie

b) aus allen denjenigen, welche durch das Symbol $(B, y_0, G, G', \ldots)$ bezeichnet werden,

so verhält sich die Fortsetzung dieses Zweiges auch noch in dem vollen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Da nämlich das in der Voraussetzung erwähnte Gebiet eine abgeschlossene Menge von Punkten $(x, y, u, v, \ldots)$ darstellt, so ist es wiederum möglich, eine positive Größe a so zu wählen, daß, sobald $(x', y', u', v', \ldots)$ irgend einen Punkt dieses Gebietes bedeutet, $f(x, y, u, v, \ldots)$ auch noch in jedem Gebiete $|x - x'| < a, \ldots, |u - u'| < a, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Mittels dieser Größe a mögen nun genau wie in Nr. 1 aus dem Bereiche B der x-Ebene die Bereiche B_1, B_2, S, aus dem Bereiche B' der y-Ebene der Bereich B'_1 und schließlich in analoger Weise aus den Bereichen $G, G', \ldots$ die Bereiche $G_1, G'_1, \ldots$ konstruiert werden. Denkt man sich nun den Größen $u, v, \ldots$ bestimmte, den bezüglichen Bereichen $G_1, G'_1, \ldots$ angehörige Werte beigelegt, so besteht, wie in Nr. 1 (p. 229) bewiesen, jedenfalls die Beziehung:

$$2\pi i\, f(x, y, u, v, \ldots) = \int_{(B_2)} \frac{f(\xi, y, u, v, \ldots)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei x einen inneren Punkt von S, y einen Punkt von B' bedeutet. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber eine im Innern des vollen Gebietes $(B_2, B'_1, G_1, G'_1, \ldots)$, also speziell im ganzen Gebiete $(B, B', G, G', \ldots)$ eindeutige und reguläre analytische Funktion von $x, y, u, v, \ldots$ dar.

---

darzustellen, sondern kann z. B. auch die Gesamtheit der Punkte einer Kurve, eventuell auch bloß einen einzigen Punkt bedeuten.

Es mögen nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ n komplexe Veränderliche bedeuten, und es sei $0 < \mu < \nu \leq n$. Ein „Bereich B" der x_ϱ-Ebene werde im folgenden stets mit B_ϱ, seine Randkurve mit C_ϱ bezeichnet; $x_\varrho = x_\varrho^0$ bedeute durchweg einen festen Punkt des Bereiches B_ϱ; endlich möge G_ϱ eine abgeschlossene Menge von Punkten x_ϱ darstellen. Es gilt alsdann zunächst die folgende Verallgemeinerung des obigen Satzes:

(B.) Steht von dem Zweige $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ fest, daß er sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, welches besteht

a) aus allen Stellen

$(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, B_{\mu+2}, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$,

b) aus allen Stellen

$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, x_{\mu+1}^0, x_{\mu+2}^0, \ldots x_\nu^0, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$,

so verhält sich die Fortsetzung desselben auch in dem vollen Gebiet $(B_1, B_2, \ldots B_\nu, G_{\nu+1}, \ldots G_n)$ eindeutig und regulär.

Der spezielle Fall dieses Satzes, welcher der Annahme $\mu = 1$ (oder auch der Annahme $\nu = \mu + 1$) entspricht, ergibt sich nämlich ohne weiteres durch mehrmalige Anwendung des vorhergehenden Satzes (A); durch wiederholte Anwendung des so gewonnenen speziellen Satzes ergibt sich sodann der Satz in seiner allgemeinen Fassung.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes (B) kann man daraus endlich noch folgende weitergehende Verallgemeinerung gewinnen:

(C.) $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ verhalte sich in demjenigen Gebiete eindeutig und regulär, welches besteht

a_1) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a_2) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_{n-2}, B_{n-1}, x_n^0)$,
a_3) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots B_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)$,
— — — — — — — — — —
a_n) aus allen Stellen $(B_1, x_2^0, \ldots x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)$.

Alsdann verhält sich $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ eindeutig und regulär.

Was den Satz von Nr. 2 betrifft, so können auch bei diesem sowohl an Stelle von x, als auch an Stelle von y beliebig viele Veränderliche treten. Der Satz erscheint alsdann in der folgenden Form, welche sich unmittelbar als Folgerung aus dem Satze (B.) ergibt:

Es sei C_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots \mu$) die Randkurve irgend eines Bereiches B_ϱ der x_ϱ-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist alsdann der Punkt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ eine singuläre Stelle für den Zweig $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einer analytischen Funktion, während dieser Zweig sich in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär verhält, das aus den Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, 0, 0, \ldots 0)$ besteht, so gibt es eine Zahl $l > 0$ derart, daß zu jedem den Bedingungen $|x^0_{\mu+1}| < l, \ldots |x^0_n| < l$ genügenden Wertsystem $x^0_{\mu+1}, x^0_{\mu+2}, \ldots x^0_n$ eine singuläre Stelle $(x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n)$ jenes Zweiges existiert, für welche x^0_1 dem Bereiche $B_1, \ldots, x^0_\mu$ dem Bereiche B_μ angehört.

Der Satz von Nr. 3 gilt unverändert für einen beliebigen Bereich B der $(x_1, x_2, \ldots x_n)$-Mannigfaltigkeit. Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus dem dortigen, indem man an Stelle von y $n-1$ Veränderliche treten läßt.

Was schließlich die Betrachtungen von Nr. 4 betrifft, so kann man diesen zunächst den folgenden allgemeineren Satz an die Seite stellen:

(D.) Der Funktionszweig $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$,
b) aus allen Stellen $(B, \psi(x), \chi(x), \ldots; G, G', \ldots)$.

Dabei mögen die Bereiche $B', B'', \ldots$ und die Funktionen $\psi(x), \chi(x), \ldots$ analogen Beschränkungen unterworfen sein, wie sie in Nr. 4 bezüglich des Bereiches B' und der Funktion $\psi(x)$ galten, während $G, G', \ldots$ wieder beliebige abgeschlossene Mengen von Punkten der u-, v-, ... Ebene bedeuten. Als-

dann verhält sich $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ auch im vollen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$ eindeutig und regulär.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem in Nr. 4 mitgeteilten, indem man an Stelle der dortigen Veränderlichen u die Veränderlichen $y, z, \ldots$ treten läßt.

Es möge nun weiterhin angenommen werden, daß jede der Größen $\varphi, \chi, \ldots$ überdies noch von $u, v, \ldots$ abhängig sei und zwar für jedes dem Gebiete $G, G', \ldots$ angehörige Wertsystem $u, v, \ldots$ als Funktion von x betrachtet die bisher verlangten Eigenschaften besitze, ferner aber eine im Gebiet $B, G, G', \ldots$ stetige Funktion der Veränderlichen $x, u, v, \ldots$ darstelle. Auch dann bleibt der obige Satz (D) noch unverändert bestehen.

Zum Beweise wähle man zunächst eine Größe $\beta > 0$ derart, daß, wenn $(x', y', z', \ldots; u', v', \ldots)$ eine beliebige der unter a) oder b)[1]) genannten Stellen bedeutet, $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ noch in jedem Gebiete $|x - x'| < \beta, \ldots; |u - u'| < \beta, \ldots$ eindeutig und regulär sei. Eine zweite Größe $\alpha > 0$ kann alsdann so bestimmt werden, daß, sobald x einen Punkt von B, u, u' zwei der Bedingung $|u - u'| < \alpha$ genügende Punkte von G, analog v, v' zwei der Bedingung $|v - v'| < \alpha$ genügende Punkte von $G', \ldots$ bedeuten, stets die Beziehungen $|\varphi(x, u', v', \ldots) - \varphi(x, u, v, \ldots)| < \beta$, $|\chi(x, u', v', \ldots) - \chi(x, u, v, \ldots)| < \beta$ stattfinden.

Es werde nun in der u-Ebene eine Einteilung in Quadrate Q von der Seitenlänge $\frac{1}{2}\alpha$ vorgenommen und derjenige Teil von G, welcher irgend einem, Q_0, dieser Quadrate (inkl. Begrenzung) angehört, mit G_0, irgend ein Punkt von G_0 mit u_0 bezeichnet. Analog verfahre man in der v-Ebene u. s. f. Dann ist es offenbar gestattet, in den Voraussetzungen des Satzes überall $G, G', \ldots$ durch $G_0, G_0', \ldots$ und gleichzeitig $\varphi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ durch $\varphi(x, u_0, v_0, \ldots)$, $\chi(x, u_0, v_0, \ldots), \ldots$ zu

[1]) In der Zeile b) sind $\varphi(x), \chi(x), \ldots$ jetzt durch $\varphi(x, u, v, \ldots)$, $\chi(x, u, v, \ldots), \ldots$ ersetzt gedacht.

ersetzen, ohne daß dieselben ihre Gültigkeit verlieren. Nach dem Satze (D.) ist daher $f(x, y, z, \ldots; u, v, \ldots)$ in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G_0, G_0', \ldots)$ eindeutig und regulär und somit, da die Quadrate $Q_0, Q_0', \ldots$ beliebig gewählt werden konnten, auch in dem ganzen Gebiete $(B, B', B'', \ldots; G, G', \ldots)$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich dann schließlich jeder der beiden folgenden:

(D'.) Es sei $0 < \mu < n$. Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem ganzen Gebiete, welches besteht

a) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots C_\mu, B_{\mu+1}, \ldots B_n)$.

b) aus allen Stellen

$(B_1, B_2, \ldots B_\mu, \psi_{\mu+1}(x_1, \ldots x_\mu), \ldots \psi_n(x_1, \ldots x_\mu))$.

Dabei sollen die Bereiche $B_{\mu+1}, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Funktionen $\psi_\varrho(x_1, \ldots x_\mu)$ $(\varrho = \mu + 1, \ldots, n)$ aber im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ eindeutig und regulär sein, und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, \ldots, x_\mu)$, so lange das Wertsystem $x_1, \ldots, x_\mu$ dem Gebiete $B_1, \ldots, B_\mu$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ eindeutig und regulär.

(D''.) Der Funktionszweig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verhalte sich eindeutig und regulär in dem Gebiete, welches besteht

a_1) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}, B_n)$,
a_2) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, B_{n-1}, \psi_n)$,
a_3) aus allen Stellen $(C_1, C_2, \ldots, B_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$,
— — — — — — — — — — —
a_n) aus allen Stellen $(B_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-2}, \psi_{n-1}, \psi_n)$.

Dabei sollen die Bereiche $B_2, B_3, \ldots, B_n$ die erwähnte spezielle Eigenschaft besitzen, die Größen $\psi_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$ $(\varrho = 2, 3, \ldots, n)$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ darstellen, welche im Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ eindeutig und regulär sind,[1])

[1]) Doch treten bei der Aufstellung der in irgend einer der n Zeilen

und der Punkt $x_\varrho = \psi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$, so lange das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ dem Gebiete $B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-1}$ angehört, im Innern des Bereiches B_ϱ gelegen sein. Alsdann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch im vollen Gebiete $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ eindeutig und regulär.

---

genannten Gesamtheit von Stellen als Argumente einer der Funktionen [illegible] jedesmal nur diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ tatsächlich [illegible] welche dem in der nämlichen Zeile aufgeführten Gebiete der $(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1})$ Mannigfaltigkeit angehören.

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 5. Mai 1906.

1. Herr Aurel Voss hält einen Vortrag: „Über Flächen, welche durch Systeme geodätischer Kreise von konstanten Radien in infinitesimale Rhomben zerlegt werden."

Er sprach über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven mit bezüglich konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Je nachdem diese beiden Krümmungen voneinander verschieden, oder untereinander gleich resp. entgegengesetzt gleich, oder endlich beide gleich Null sind, ergeben sich Flächengattungen, die auch bei anderen geometrischen Untersuchungen auftreten, und deren Eigenschaften hier unter neuen Gesichtspunkten erscheinen.

2. Herr Hermann Ebert legt eine weitere Arbeit des K. Reallehrers Dr. Anton Endrös in Traunstein: „Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees" vor.

Die Schwingungsbewegungen dieses Sees sind deshalb von besonderem Interesse, weil hier erstmalig ein See untersucht wurde, der keine ausgesprochene Längsrichtung und dazu noch

viele Buchten und eine größere Insel besitzt. Die 5jährigen Beobachtungen mit mehreren selbst registrierenden Limnimetern an 19 verschiedenen Punkten des Sees haben ergeben, daß die Schwingungen des Chiemsees mit denjenigen einer schwingenden Platte verglichen werden können, während diejenigen der Langsseen ähnlich den Schwingungen einer Saite sind, daß also Schwingungen der Wassermasse kreuz und quer dort anzutreffen sind. Da aber der See eine ganz unregelmäßige Umrißform hat, also als eine Platte mit vielen Auszackungen und sogar Ausschnitten, den Inseln, sich darstellt, so geben die eingezeichneten Knotenlinien, ähnlich den Chladnischen Klangfiguren, ein verwickeltes Liniensystem. Der Chiemsee hat allein 3 uninodale Seiches von 54 Minuten, 41 Minuten und 36 Minuten mittlerer Dauer. Außerdem wurden noch 14 weitere Schwingungen geringerer Periodendauer beobachtet, welche als mehrknotige Schwingungen in der einen oder anderen Richtung, teils nur südlich teils nur nördlich der Herreninsel und häufig in beiden Richtungen schwingen. Zugleich konnte der Einfluß der Tieferlegung des Seespiegels, welche in die Beobachtungszeit fällt, auch wissenschaftlich nutzbar gemacht werden, also gleichsam ein Experiment größten Stiles angestellt werden. Die Änderung der Schwingungsverhältnisse sind bedeutende, da sich die schwingende Platte stark verkleinert und neue Einschnitte in Gestalt von Landzungen und größere Ausschnitte durch Vergrößerung der Inseln und sogar zwei neue durch zwei weitere Inseln erhalten hat, so daß die Dauer der Schwingungen sich merklich geändert hat, einzelne Seiches überhaupt nicht mehr auftreten, dafür neue Schwingungen anzutreffen sind. Im ganzen haben wohl diese zum Teil schwierigen Untersuchungen am Chiemsee unsere Kenntnisse über die Seichesbewegungen der Seen wesentlich gefördert, und dürften in ihrer Verallgemeinerung für die schwebenden Probleme an anderen Seen sowohl als auch für die stehenden Schwingungen in den Meeren, wie in der Arbeit kurz angedeutet ist, nutzbar gemacht werden können.

3. Herr Ferdinand Lindemann überreicht eine zweite zu den Abhandlungen zur Elastizitätstheorie gehörige Abhandlung von Herrn Professor Artur Korn: „Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche."

Nach der allgemeinen Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems für den Fall, daß die Verrückungen an der Oberfläche gegeben sind, konnte in der zweiten Abhandlung zu der Frage nach den Eigenschwingungen übergegangen werden, deren ein elastischer Körper bei ruhender Oberfläche fähig ist. Es ergibt sich nur die Existenz einer unendlichen Zahl solcher Eigenschwingungen, und jeder Eigenschwingung ist ein ganz bestimmtes Triplet von Funktionen des von dem elastischen Körper eingenommenen Raumes und eine ganz bestimmte Zahl zugeordnet, aus der sich sofort die Schwingungsdauer der betreffenden Eigenschwingung berechnen läßt. Die Untersuchungen dieser Abhandlungen beweisen die Existenz dieser Funktionentripel und den für die Elastizitätstheorie wichtigen Satz, daß jedes beliebige Triplet von Funktionen, die in dem gegebenen Raume gewisse Stetigkeitseigenschaften erfüllen, nach diesen elastischen Funktionentripeln entwickelbar sind. Mit Hilfe dieser Entwickelungen können alle Bewegungsprobleme der Elastizitätstheorie für den Fall, daß die Geschwindigkeiten an der Oberfläche des elastischen Körpers gegeben sind, in sehr allgemeiner Weise gelöst werden. Die Theorie stellt eine Analogie der sogenannten harmonischen Funktionen Poincarés dar, die Analogie, wie sie gerade in der Elastizitätstheorie gebraucht wird.

4. Herr Richard Hertwig legt eine für die Denkschriften bestimmte Arbeit des Herrn Dr. W. Kükenthal, Professors der Zoologie in Breslau: über „Japanische Alcyonaceen" vor.

Dieselbe behandelt vornehmlich das reiche Material, welches Herr Dr. Doflein, II. Konservator der Staatssammlung, auf seiner Reise nach Japan gesammelt hat. Zur Ergänzung wurden Materialien herangezogen, welche teils von Herrn

Professor HABERER der Staatssammlung geschenkt worden wa
teils aus den Museen von Wien, Berlin und Hamburg stammt
Die Untersuchungen lieferten eine neue Bestätigung für
Ansicht, daß die japanische Meeresfauna einen eigenartig
Charakter besitzt. Von den 33 Arten, welche in der Ar
beschrieben werden, sind nicht weniger als 21 für die Wi
schaft neu. Manche sonst verbreitete Familien wie die Alcy
niden sind in Japan kaum vertreten, andere wie die Nidali
und die Nephthyiden haben umgekehrt gerade hier eine
sondere Entfaltung erfahren. Der auffallend große Reicht
an Arten auf einem verhältnismäßig eng begrenzten Geb
erklärt sich aus den besonderen Tiefen- und Strömungsv
hältnissen des Meeres.

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 21. Mai.)

Über Eigenschaften von Kurvenscharen konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen habe ich bereits vor längerer Zeit den folgenden Satz ausgesprochen, der die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Liouville bildet:[1])

„Schneiden sich zwei Kurvensysteme von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1 und γ_2 auf einer Fläche überall unter konstantem Winkel, so ist die Fläche von negativer konstanter Krümmung.“ Nur in dem ganz speziellen Falle, wo die Krümmungen γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, also die beiden Kurvenscharen in geodätische Linien übergehen, wird die Krümmung gleich Null, oder die Fläche developpabel.

In der folgenden Note untersuche ich nun die Form des Längenelementes derjenigen Flächen, welche durch ein Kurvensystem von den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 in infinitesimale Rhomben geteilt werden — Flächen mit infinitesimaler rhombischer Teilung[2]) durch

[1]) Vgl. Über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie, diese Sitzungsber. Bd. XXII, p. 268, 1892; desgleichen die Inauguraldissertation von F. Probst, Über Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen. Würzburg 1893.

[2]) Statt dessen soll auch einfach rhombische Teilung gesagt werden.

geodätische Kreise von konstanten Radien, wie man auch s
könnte.[1])

[1]) Es seien hier noch folgende Bemerkungen über infinites
Teilung in Rhomben angeführt. Aus jedem rhombischen System

$$ds^2 = e(du^2 + dv^2) + 2f\,du\,dv$$

erhält man ein Orthogonalsystem

$$\left(\frac{e+f}{2}\right) du'^2 + \left(\frac{e-f}{2}\right) dv'^2,$$

wenn man

$$u' = u + v,\ v' = u - v$$

setzt, vermöge der Diagonalkurven der Rhomben. Umgekehrt e
man auch aus jedem Orthogonalsystem

$$e_1 du_1^2 + g_1 dv_1^2$$

durch die Substitution

$$u' = u + v,\ v' = u - v$$

das rhombische System

$$(e_1 + g_1)(du^2 + dv^2) + 2\,du\,dv\,(e_1 - g_1).$$

Die Auffindung aller Kurvensysteme, welche eine Fl in infinitesimale Rhomben zerlegen, ist daher identisch der Ermittelung aller Orthogonalsysteme.

Es gehört ferner zu jeder Kurvenschar eine unendl. V anderer Scharen, welche mit der ersten eine rhombische T wirken.

Ist nämlich

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

das Längenelement, und geht dasselbe durch die Substitution

$$u = u_1,\ v_1 = \varphi(u, v)$$

in

$$ds^2 = e_1(du_1^2 + dv_1^2) + 2\,du_1\,dv_1\,f_1$$

über, so ist

$$e = e_1(1 + \varphi_u^2) + 2\varphi_u f_1,$$
$$f = e_1 \varphi_u \varphi_v + \varphi_v f_1,$$
$$g = e_1 \varphi_v^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von f_1 und e_1 die partiel Differentialgleichung

$$e\varphi_v^2 - 2f\varphi_u\varphi_v + g\varphi_u^2 = g,$$

d. h. man hat unter Anwendung des Symboles Δ für den ersten Di rentialparameter

$$\Delta(\varphi) = \Delta(u).$$

Man überzeugt sich leicht, daß nicht auf jeder Fläche derartige Systeme möglich sind, sondern daß nur Flächen eines charakteristischen Längenelementes solche Systeme zulassen, und auf die Bestimmung dieses letzteren kann es hier allein ankommen, da die geforderte Eigenschaft allen zueinander isometrisch zugeordneten Flächen gleichmäßig zukommt.

§ 1.

Flächen mit infinitesimal rhombischer Teilung durch Kurven, deren konstante geodätische Krümmungen weder gleich noch entgegengesetzt gleich sind.

Bezeichnet man das Quadrat des Längenelementes auf der Fläche mit

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{1}$$

so sind bekanntlich die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u =$ const, $v =$ const oder g_u und g_v gegeben durch[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}} &= -g_u\sqrt{\Delta} \\ \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}} &= -g_v\sqrt{\Delta}, \end{aligned} \tag{2}$$

So sind z. B. alle rhombischen Teilungen der Ebene, bei denen die eine Schar aus Parallelen resp. aus einem Strahlbüschel besteht, abhängig von den Gleichungen

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = 1$$

resp.

$$v_1^2\,\psi_{v_1}^2 + \psi_u^2 = 1,$$

welche letztere durch die Substitution $l\,v_1 = v$ auf die obere zurückgeführt wird. Analog kann man die Teilungen einer Rotationsfläche, bei denen entweder die Parallelkreise oder die Meridiane als Kurven $u =$ const gewählt werden, auf die Gleichung

$$\psi_v^2 + \psi_u^2 = Fu$$

zurückführen.

[1]) Vgl. z. B. J. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, p. 248.

wo
$$\Delta = e g - f^2$$
gesetzt ist.

Soll nun wegen der rhombischen Teilung $e = g = \varepsilon^2$
$g_u = - c_1$, $g_v = - c$ sein, setzt man ferner
$$f = \varepsilon \varphi,$$
so daß $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ der Kosinus des Koordinatenwinkels ω ist,
hat man aus 2)

$$2^a)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= c_1 \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= c \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Wird ferner die Substitution

$$3)\quad \begin{aligned} u_1 &= c u + c_1 v, \\ v_1 &= c_1 u + c v \end{aligned}$$

eingeführt, was unter der Voraussetzung, daß die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien weder gleich, noch entgegengesetzt gleich sind,[1]) oder
$$\lambda = c^2 - c_1^2 \neq 0$$
ist, zulässig ist, so hat man
$$\begin{aligned} \lambda u &= c u_1 - c_1 v_1 \\ \lambda v &= c v_1 - c_1 u_1. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen
$$\frac{\partial}{\partial u} = c \frac{\partial}{\partial u_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = c_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + c \frac{\partial}{\partial v_1}$$
$$\lambda \frac{\partial}{\partial u_1} = c \frac{\partial}{\partial u} - c_1 \frac{\partial}{\partial v}, \quad - \lambda \frac{\partial}{\partial v_1} = c_1 \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v}$$
folgt nun nach 2^a)

[1]) In Wirklichkeit kommt es auf das Verhältnis der Krümmungen c und c_1 an, da man durch Ähnlichkeitstransformation von jeder Fläche zu einer anderen übergehen kann, welcher dasselbe Verhältnis $c:c_1$ und derselbe Koordinatenwinkel ω zukommt.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}$$

oder

4) $$\varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial v_1}, \quad \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial u_1},$$

wo ψ eine willkürliche Funktion der Argumente u_1, v_1 bezeichnet. Führt man, in dem man statt der Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial v} \cdots$$

der Kürze halber

$$F_u, F_{uu}, F_v \ldots$$

schreibt, die Werte in 4) in die Gleichungen 2ª) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von ψ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

A) $$\psi_{v_1 v_1} - \psi_{u_1 u_1} = \psi_{v_1} \sqrt{\psi_{v_1}^2 - \psi_{u_1}^2},$$

welche von c und c_1 gänzlich unabhängig ist.

Und umgekehrt gehört zu jeder Lösung der Gleichung A vermöge der Substitution 3) und der Gleichungen 4) das Längenelement einer Fläche, welche durch die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen $-c_1$, $-c$ in infinitesimale Rhomben zerlegt wird, falls nur die Voraussetzung

$$c^2 - c_1^2 \neq 0$$

eingehalten wird.

Das Quadrat des Längenelementes der Fläche 1) wird in Bezug auf die Variabeln u_1, v_1

5) $$ds^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2}$$
$$[(du_1^2 + dv_1^2)(\varepsilon^2 + \varepsilon \varkappa \varphi) + 2\, du_1\, dv_1 (\varepsilon \varphi + \varepsilon^2 \varkappa)],$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = -\frac{2 c c_1}{c^2 + c_1^2}\,^{1)}$$

gesetzt ist, und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω^1 der Kurven u_1, v_1 steht mit ω in der Beziehung

$$\cos \omega^1 = \frac{\cos \omega + \varkappa}{1 + \varkappa \cos \omega}.$$

Die Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ bilden daher wieder eine rhombische Teilung der Fläche.

Wählt man insbesondere $\varkappa = 0$, d. h. etwa $c_1 = 0$, $c = -1$ so wird

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d u_1^2 + d v_1^2)\, \varphi'^2_{v1} + 2\, d u_1\, d v_1\, \varphi'_{u1}\, \varphi'_{v1} \\ &= d \varphi^2 + d u_1^2 (\varphi'^2_{v1} - \varphi'^2_{u1}). \end{aligned}$$

Die Fläche hat daher jetzt die Kurven $u_1 = \text{const}$ zu geodätischen Linien, während die Linien $v_1 = \text{const}$ von der geodätischen Krümmung $+1$ sind, woraus man durch Ähnlichkeitstransformation diejenigen Flächen erhält, bei denen das eine System aus geodätischen Kurven, das andere aus Kurven von konstanter geodätischer Krümmung besteht.

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß nicht auf jeder beliebigen Fläche solche Kurvensysteme, wie die hier betrachteten, existieren. Aus der Bonnetschen Formel für die geodätische Krümmung g_q der Kurven $q = \text{const}$

$$-g_q \sqrt{\Delta} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{g q_u - f q_v}{s}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e q_v - f q_u}{s}\right),$$

$$s = \sqrt{g q_u^2 - 2 f q_u q_v + e q_v^2},$$

folgt nämlich, unter der Voraussetzung, daß die Fläche auf ihre Minimalkurven $e = g = 0$ bezogen sei

$$-f \sqrt{2}\, g_q = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{f \frac{q_v}{q_u}} + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{f \frac{q_u}{q_v}}.$$

[1] $\varkappa$ darf dabei den Wert $+1$ nicht annehmen.

[2] Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 247.

oder, wenn man $\frac{\varphi_v}{\varphi_u}$ mit z^2, f mit $1 : \lambda^2$ bezeichnet:

$$6^a)\qquad -\sqrt{2}\, g_\varphi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial v} - \frac{1}{z} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Soll nun auf einer zweiten Kurve $\psi = \text{const}$ die geodätische Krümmung wieder einen vorgeschriebenen Wert g_ψ haben, so wird für $\frac{\psi_v}{\psi_u} = \zeta^2$

$$6^b)\qquad -\sqrt{2}\, g_\psi = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \frac{1}{\zeta}}{\partial v} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Damit endlich eine rhombische infinitesimale Teilung durch die Kurven $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ hervorgebracht werde, muß

$$\psi_u \psi_v = \varphi_u \varphi_v$$

sein. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_u\, du + \varphi_v\, dv &= d\varphi \\ \psi_u\, du + \psi_v\, dv &= d\psi, \end{aligned}$$

so wird, wenn man mit ϱ die Funktionaldeterminante von φ und ψ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \varrho\, du &= \psi_v\, d\varphi - \varphi_v\, d\psi \\ \varrho\, dv &= \varphi_u\, d\psi - \psi_u\, d\varphi \end{aligned}$$

oder

$$-ds^2 = \frac{2f}{\varrho^2} \left[d\varphi^2 \psi_v \psi_u + d\psi^2 \varphi_v \varphi_u - d\varphi\, d\psi\, (\psi_v \varphi_u + \varphi_v \psi_u) \right].$$

Setzt man demgemäß

$$\psi_u = \frac{\mu}{\zeta},\quad \varphi_u = \frac{\mu}{z}$$

$$\psi_v = \mu \zeta,\quad \varphi_v = \mu z,$$

wo μ eine neue unbekannte Funktion ist, so ergibt sich durch die Integrabilitätsbedingungen in Bezug auf φ und ψ, sowie

in Bezug auf μ, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für z und ζ, so daß man mit 6^a), 6^b) im ganzen drei partielle Differentialgleichungen für z und ζ hat, welche nur für gewisse Formen von λ oder f miteinander verträglich sein werden, wie dies übrigens auch schon aus der oben angegebenen Form des Längenelementes ersichtlich sein dürfte.

§ 2.

Beispiele zu § 1.

Die partielle Differentialgleichung A des § 1, welche durch die Substitutionen

$$u_2 = u_1 + v_1$$
$$v_2 = v_1 - u_1$$

auch auf die Form

$$2\,\varphi_{u_2 v_2} = (\varphi_{u_2} + \varphi_{v_2})\sqrt{\varphi_{u_2}\varphi_{v_2}}$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise in die Gestalt

$$4\,s^2 = (p+q)^2\,p\,q$$

gebracht werden kann, scheint einer allgemeinen Behandlung in dem hier erforderlichen Sinne nicht zugänglich. Ich beschränke mich daher auf die Betrachtung einfacher partikulärer Lösungen derselben.

1. Setzt man

$$\varphi = u_1\,\lambda + V$$

wo V eine Funktion von v_1 allein ist, und die Konstante λ, wie im folgenden geschehen soll, auch gleich 1 gesetzt werden kann, so folgt aus A § 1,

$$V'' = V'\sqrt{V'^2 - 1}$$

oder

$$\operatorname{arc}\cos\frac{1}{V'} = v_1,\quad V' = \frac{1}{\cos v_1}$$

mithin wird

$$\varepsilon = \psi_{v1} = \frac{1}{\cos v_1}$$

$$\varphi = \psi_{u1} = 1$$

und der Kosinus des Koordinatenwinkels ist

$$\cos \omega = \cos v_1.$$

Das Quadrat des Längenelementes wird daher nach § 1, 5

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \times$$

$$\left\{(d u_1^2 + d v_1^2)\left(\frac{1}{\cos^2 v_1} + \frac{\varkappa}{\cos v_1}\right) + 2\, d u_1\, d v_1 \left(\frac{\varkappa}{\cos^2 v_1} + \frac{1}{\cos v}\right)\right\}$$

oder

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \frac{1}{\cos^2 v_1} \times$$

$$\{(d u_1^2 + d v_1)(1 + \varkappa \cos v_1) + 2\, d u_1\, d v_1\, (\varkappa + \cos v_1)\}.$$

Bestimmt man nun nach der Weingartenschen Formel[1])

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\partial e}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\right]$$

$$A = e^2 - f^2$$

das Krümmungsmaß K, so ergibt sich

$$K = -\frac{1}{(1 - k^2)} : \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} = -(c^2 + c_1^2).$$

Die Fläche ist daher von konstanter negativer Krümmung, der Koordinatenwinkel aber nicht von den Variabeln unabhängig.

2. Setzt man dagegen:

$$\psi = v_1 + U,$$

so ist

$$-U' = \sqrt{1 - U'^2}$$

oder:

$$\operatorname{arc} \cos U' = u_1,$$

---

[1]) Vgl. z. B. Knoblauch, a. a. O., p. 177.

d. h.

$$\varepsilon = 1, \ \varphi = \cos u.$$

Daher wird

$$d s^2 = \frac{c^2 + c_1^2}{(c^2 - c_1^2)^2} \left[(d u_1^2 + d v_1^2)(1 + \varkappa \cos u_1) + 2 d u_1 d v_1 (\cos u_1 + \right.$$

und das Krümmungsmaß wird jetzt gleich Null.

3. Man kann ferner ψ als Funktion von $\alpha u_1 + \beta v_1 =$ annehmen. Setzt man $\psi = F(z)$, so ist[1])

$$(\beta^2 - \alpha^2) F'' = F'^2 \beta \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

oder

$$F' = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta (\alpha u_1 + \beta v_1)}.$$

Da hier

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{(\alpha u_1 + \beta v_1)}, \quad \varphi = \frac{\alpha \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta (\alpha u_1 + \beta v_1)},$$

so wird $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ konstant; d. h. die Fläche ist konstanter negativer Krümmung.

4. Setzt man endlich

$$\psi = F\left(\frac{u_1}{v_1}\right) = F(z),$$

so wird die Differentialgleichung A

$$F'' + \frac{2 u_1 v_1}{u_1^2 - v_1^2} F' = - F'^2 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

wobei die Indizes von F die Differentiationen nach z angeben. Für $F' = 1/\zeta$ erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{2 z \zeta}{z^2 - 1} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

[1]) Der Wert $\alpha = \pm \beta$ ist hier nicht zulässig. Allerdings ist dan die Funktion F willkürlich, aber $\cos \omega$ wird gleich ± 1, was keine Sinn hat.

:r

$$\zeta = -\sqrt{z^2 - 1} + k(z^2 - 1)$$

$$F = \frac{v_1^2}{k(u_1^2 - v_1^2) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}},$$

k eine willkürliche Konstante. Demgemäß wird

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

$$\varphi = +\frac{v_1}{k(u_1^2 - v_1) - v_1\sqrt{u_1^2 - v_1^2}}$$

l zugleich wird

$$\cos\omega = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{uc_1 + vc}{uc + vc_1}.$$

: Flächen dieser Klasse zeichnen sich durch eine besondere genschaft aus, welche im nächsten § 3 nachgewiesen wird.

§ 3.

Die Differentialgleichung für den Koordinatenwinkel ω.

Durch die vorige Betrachtung ist die Bestimmung des ingenelementes auf die partielle Differentialgleichung A des l zurückgeführt. Man kann statt derselben auch eine analoge eichung für den Winkel ω der Kurven u, v ermitteln. Hierzu irde nur eine Transformation der genannten Gleichung er-derlich sein, doch erscheint es angemessener, die ursprüng-hen Variabeln u, v jetzt beizubehalten. Setzt man

$$\varphi = \varepsilon\cos\omega$$
$$\varepsilon = {}^1/\eta,$$

gehen die Gleichungen 2[a]) des § 1 über in

$$-\eta_u = -\eta\left[\frac{\omega_v}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_u\right] + \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$-\eta_v = -\eta\left[\frac{\omega_u}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\,\omega_v\right] + \frac{c_1 \text{[illegible]} \omega + c}{\text{[illegible]}},$$

und man hat nur die Integrabilitätsbedingungen für die Funktion η zu bilden. Ist nun allgemein

$$
\begin{aligned}
-\xi_u &= -\xi A' + B' \\
-\xi_v &= -\xi A + B,
\end{aligned}
$$

so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen für ξ

$$
\xi\,[A'_v - A_u] + (B_u + B' A) - (B'_v + B A') = 0. \tag{2}
$$

Ist also **nicht** gleichzeitig

$$
\begin{aligned}
A'_v - A_u &= 0 \\
B_u + B' A &= B'_v + B A',
\end{aligned} \tag{3}
$$

so ist ξ völlig bestimmt. Unter diesen Umständen gehört also auch zu dem Werte ω in den Gleichungen 1) eine völlig bestimmte Form des Längenelementes, d. h. eine ganz bestimmte Klasse zueinander isometrischer Flächen. Sind dagegen die beiden Gleichungen 3) erfüllt, so wird ξ im allgemeinen noch eine für das Längenelement wesentliche Konstante enthalten; d. h. es existieren dann ∞^1 Flächen mit rhombischer Teilung durch Kurven konstanter geodätischer Krümmung, ohne daß sich dabei der von diesen eingeschlossene Winkel ω ändert.[1])

Man hat nun:

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{\omega_v}{\sin\omega} + \omega_u \operatorname{cotg}\omega \\
A &= \frac{\omega_u}{\sin\omega} + \omega_v \operatorname{cotg}\omega \\
B &= \frac{c_1 + c\cos\omega}{\sin\omega} \\
B' &= \frac{c + c_1\cos\omega}{\sin\omega};
\end{aligned}
$$

also

[1]) Dabei ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, daß die Flächen selbst zueinander isometrisch sein können.

4) $$A_u - A'_v = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u}{\sin\omega}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v}{\sin\omega}\right)$$

$$B_u - B' A = \omega_v \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1 + c\cos\omega)$$

$$B'_v - B A' = \omega_u \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(c_1\cos\omega + c).$$

Der zuletzt genannte Fall kann, abgesehen von der Möglichkeit $\omega = \text{const}$, wo die Fläche wegen der konstanten Krümmung ∞^3 Transformationen in sich zuläßt,[1] nur stattfinden, wenn

5) $$\omega_v [c_1 + c\cos\omega] = \omega_u [c_1\cos\omega + c]$$

und die erste der Gleichungen 4) erfüllt ist. Aus dieser letzteren folgt aber unmittelbar

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = F\cdot\Phi,$$

wo F, resp. Φ Funktionen der Argumente $u+v$, resp. $u-v$ allein sind. Setzt man nun

$$\cos\omega = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}},$$

so ergibt sich aus 5) die Funktionalgleichung für F und Φ

6) $$0 = (c - c_1)\, F'\, F^2\, \Phi^2 + (c + c_1)\, \Phi'\, F$$

oder

$$2\, F F' (c_1 - c) = 2\,(c + c_1)\,\frac{\Phi'}{\Phi^2} = h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bedeutet.

[1]) Hierüber vgl. § 8, 9, 10.

Demnach wird, falls $(c^2 - c_1^2) \neq 0$

$$F^2 = \frac{h(u+v)}{c_1 - c}$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = -\frac{h(u-v)}{c+c_1},$$

wo die Integrationskonstanten als ganz unwesentlich von vorherein gleich Null gewählt sind. Mithin ergibt sich

$$F = \sqrt{\frac{h(u+v)}{c_1 - c}}$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{-(c+c_1)}{h(u-v)}},$$

und hieraus folgt

$$\cos\omega = -\frac{u c_1 + v c}{u c + v c_1};$$

d. h. gerade der Wert, der sich bei dem früheren Ansatz § 2 ergeben hatte. In der Tat ergibt sich nun nach entsprechender Rechnung auch genau die dort angegebene Form des Längenelementes, welche noch eine willkürliche wesentliche Konstante k enthält.

Es wird nämlich

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}\sqrt{c^2 - c_1^2}}{u c + v c_1}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$A' = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1}\right)$$

$$B = \frac{u\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$B' = -\frac{v\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\psi} = \frac{u^2 - v^2}{u c + v c_1},$$

werden die Differentialgleichungen 1)

$$\psi \eta_u + \eta \psi_u - \psi v \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0$$

$$\psi \eta_v + \eta \psi_v + \psi u \frac{\sqrt{c^2 - c_1^2}}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 0,$$

daß

$$\frac{d \eta \psi}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} + \int \frac{(u c + v c_1)}{(u^2 - v^2)^{3/2}} (u\, d v - v\, d u) = 0$$

er

$$\frac{\eta}{\sqrt{c^2 - c_1^2}} = \frac{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}{u c + v c_1}$$

ird, wo k die Integrationskonstante.

Demgemäß wird

$$\varepsilon \sqrt{c^2 - c_1^2} = \frac{u c + v c_1}{k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}}$$

nd wenn man den Nenner mit w bezeichnet, so daß

$$w = k (u^2 - v^2) - (c u + c_1 v) \sqrt{u^2 - v^2}$$

t, wird das Längenelement

$$d s^2 = \frac{1}{w^2 (c^2 - c_1{}^2)} \times$$

$$[(d u^2 + d v^2) (u c + v c_1)^2 - 2 (u c_1 + v c) (u c + v c_1)\, d u\, d v].$$

Die Koeffizienten desselben sind in u, v homogene Funk-nen vom Grade -2. Nach einem bekannten Satze von ur[1]) ist aber dasselbe einer zu einer Rotationsfläche metrischen Fläche angehörig.

[1]) Vgl. z. B. Maurice Lévy, Sur le développement des surfaces dont ément linéaire est exprimable par une fonction homogène. Compt. nd. 87, p. 788.

Das Krümmungsmaß K kann am einfachsten vermöge der folgenden Formel berechnet werden, welche nur noch Differentialquotienten von ω enthält:

$$\sin^2\omega\, K = \frac{\omega_{uv}\sin\omega}{e} - (c^2 + 2\,c\,c_1\cos\omega + c_1^2)$$
$$+ \frac{\omega_v\,(c_1 + c\cos\omega) + \omega_u\,(c + c_1\cos\omega)}{\sqrt{e}},$$

hat aber bei beliebigem c, c_1 keinen einfachen Wert. Ist indessen c_1 (oder auch c) gleich Null, so ergibt sich eine Fläche negativer konstanter Krümmung. Man sieht dies am leichtesten aus der oben gegebenen Form von $d\,s^2$, welche in dem genannten Falle die Gestalt

$$d\,s^2 = \frac{(d\,u^2 + d\,v^2)\,u^2 - 2\,v\,u\,d\,u\,d\,v}{(k\,(u^2 - v^2) - c\,v\,\sqrt{u^2 - v^2})^2}$$

annimmt. Setzt man $u^2 - v^2 = u_1^2$, $v = v_1$ so erhält man

$$d\,s^2 = \frac{d\,u_1^2 + d\,v_1^2}{(k\,u_1 - c\,v_1)^2}$$

und dies ist das Längenelement einer Fläche von dem Krümmungsmaße

$$-(k^2 + c^2).$$

Man hat also den folgenden Satz:

Die einzigen Flächen, bei denen Systeme von Kurven geodätischer, durchweg konstanter Krümmung c, c_1 $(c^2 - c_1^2 \neq 0)$ existieren, und bei denen zu ein und demselben Koordinatenwinkel ω noch ∞^1 Längenelemente gehören, sind diejenigen, bei denen

$$\cos\omega = -\frac{u\,c_1 + v\,c}{u\,c + v\,c_1}$$

ist. Sie sind zu Rotationsflächen isometrisch.[1]) In

[1]) Ich unterlasse es, den Typus dieser Rotationsflächen anzugeben, der in bekannter Weise erhalten werden kann, aber keine einfache Gestalt anzunehmen scheint.

dem besonderen, Falle wo die eine Kurvenschar aus geodätischen Linien gebildet ist, sind die betreffenden Flächen von konstanter negativer Krümmung.

In der Gleichung 6) ist indessen der Fall $c^2 = c_1^2$, der in den sich daran schließenden Betrachtungen ausgeschlossen werden mußte, zulässig. Setzt man z. B. $c = + c_1$, so folgt

$$\Phi = \text{const} = 1, \quad F = f(u + v),$$

wo F eine willkürliche Funktion von $u + v$ ist. Man erhält dann

$$\cos\omega = \frac{1 - f^2}{1 + f^2}.$$

Integriert man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 1), so wird auch η oder ε eine Funktion von $u + v$ allein und man erhält das Längenelement einer willkürlichen Rotationsfläche

$$\varepsilon^2 \left\{ \cos^2\frac{\omega}{2}(du + dv)^2 + \sin^2\frac{\omega}{2}(du - dv)^2 \right\},$$

bei welcher die Diagonalkurven der Rhomben, $u - v = \text{const}$, selbst geodätische Linien (die Meridiane der Rotationsfläche) vorstellen. Der Fall $c^2 - c_1^2 \neq 0$ wird indes im nächsten Paragraph allgemein untersucht werden.

§ 4.

Über diejenigen Flächen, welche in infinitesimale Rhomben durch Kurven gleicher oder entgegengesetzt gleicher geodätischer Krümmung geteilt werden.

Setzt man den in den vorigen Untersuchungen im allgemeinen ausgeschlossenen Fall $c^2 = c_1^2$ voraus, so läßt sich die Bestimmung des Längenelementes, anstatt auf eine partielle Differentialgleichung, auf eine kubische Irrationalität und zwei einfache Quadraturen zurückführen.

Wird $c = c_1$ angenommen — für den Fall $c = - c_1$ gelten

tionsfläche solche Systeme von Kurven konstan geodätischer Krümmung bestimmen, da ds^2 noch e willkürliche Funktion enthält.

Setzt man nämlich das Längenelement in der Form

$$ds^2 = dU^2 + g\,dv_1^2 \tag{5}$$

voraus, so daß $v_1 = \text{const}$ geodätische Linien der Fläche si wählt man ferner

$$U = f(u_1),$$

wo f eine noch zu bestimmende Funktion von u_1, g aber gegebene Funktion von f ist, so kann man immer, und zi im allgemeinen auf ∞^1 verschiedene Arten, bewirken, daß rechten Seiten der Gleichungen 4) und 5) identisch wer Man hat dazu nur zu setzen:

$$(w^2 + F)\,F = 4\,f'^2$$
$$(w^2 + F)\,w^2 = 4\,g.$$

Daraus folgt durch Addition und Multiplikation

$$(w^2 + F)^2 = 4\,(f'^2 + g)$$
$$(w^2 + F)^2\,F\,w^2 = 16\,f'^2\,g.$$

Demnach wird

$$(w^2 + F)\,w\sqrt{F} = 4\,f'\sqrt{g}$$
$$w^2 + F = 2\sqrt{f'^2 + g}$$
$$w^2 = \frac{2\,g}{\sqrt{f'^2 + g}}.$$

Die Differentialgleichung 1), welche man auch in der Form

$$\frac{\partial w^2}{\partial u_1} = \frac{c}{2}\,(w^2 + F)\sqrt{F}\,w$$

schreiben kann, wird daher

$$\frac{\partial \dfrac{g}{\sqrt{f'^2 + g}}}{\partial u_1} = c\,f'\sqrt{g}.$$

Sie liefert

$$\frac{g}{\sqrt{f'^2 + g}} = c \int \sqrt{g}\, df + a$$

oder

$$u_1 = \int \frac{df}{\sqrt{\dfrac{g^2}{c^2 \left(\int \sqrt{g}\, df + a\right)^2} - g}},$$

womit f als Funktion von u_1 mit der willkürlichen wesentlichen Konstanten a bestimmt ist. Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, auf einer gegebenen Rotationsfläche alle diejenigen Kurvensysteme mit der geodätischen Krümmung c zu finden, die eine rhombische Teilung bewirken, deren Diagonalkurven die Meridiane sind.

Ich erwähne zwei Beispiele allgemeinerer Natur.

Wählt man in Gleichung 1) $F = k^2$, so wird

$$\omega = k \operatorname{tg}\left(u_1 c \frac{k^2}{4} + V\right),$$

setzt man zur Abkürzung

$$u_1 c \frac{k^2}{4} + V = \sigma,$$

so wird das Längenelement ausgedrückt durch

$$ds^2 = \frac{k^4}{4 \cos^2 \sigma} \left(d u_1^2 + \operatorname{tg}^2 \sigma \, d v_1^2\right).$$

Bestimmt man aus den Koeffizienten

$$e = \frac{k^4}{4 \cos^2 \sigma}, \quad g = \frac{k^4 \operatorname{tg}^2 \sigma}{4 \cos^2 \sigma}$$

mittelst der Gaußschen Formel

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{g_u}{\sqrt{ge}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{e_v}{\sqrt{eg}}\right]$$

das Krümmungsmaß K, so erhält man

$$K = -c^2 - \frac{V''}{\sqrt{eg}}.$$

Man erhält daher wieder eine Fläche **konstanter negativer Krümmung** $-c^2$, wenn V eine lineare Funktion von v_1 ist, aber der Koordinatenwinkel ω ist nicht konstant, sondern eine lineare Funktion von u_1 und v_1.[1] Setzt man andererseits

$$F = \frac{\alpha^2}{u_1},$$

so ist

$$w_0 = \frac{\beta}{\sqrt{u_1}}$$

eine partikuläre Lösung von 1), wenn

$$-\frac{\beta}{2} = c\,\alpha\,(\beta^2 + \alpha^2)$$

gewählt wird. Nun wird

$$\varepsilon = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2\,u_1}$$

$$\varphi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\,u_1};$$

man erhält daher wieder eine Fläche **konstanter negativer Krümmung** mit konstantem Koordinatenwinkel. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1) führt in diesem Falle auf nicht besonders einfache Formen.

§ 5.

Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Systeme geodätischer Linien in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.

Soll endlich eine **rhombische infinitesimale Teilung** der Fläche durch zwei Systeme **geodätischer Kurven** entstehen, so ist in den Formeln 2ª, des § 1 $c = c_1 = 0$ zu setzen. Man erhält dann

$$\varepsilon_u = \varphi_v$$

$$\varepsilon_v = \varphi_u$$

[1]) Es wird allgemein $\cos\omega = \cos 2\sigma$.

oder

$$\varepsilon = \psi_v, \quad \varphi = \psi_u,$$

mithin

$$\psi_{vv} - \psi_{uu} = 0$$

oder

$$\psi = F(u+v) - \Phi(u-v),$$

wo F und Φ willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind. Demgemäß wird

$$\varepsilon = F' + \Phi'$$
$$\varphi = F' - \Phi',$$

wo die Indizes bei F und Φ Differentiationen nach den Argumenten $u+v$, $u-v$ andeuten. Das Längenelement wird nunmehr durch die Formel

$$ds^2 = (F' + \Phi')\left[(du+dv)^2 F' + (du-dv)^2 \Phi'\right]$$

ausgedrückt. Setzt man

$$(du+dv)\sqrt{F'} = du_1$$
$$(du-dv)\sqrt{\Phi'} = dv_1$$
$$F' + \Phi' = U_1 + V_1,$$

wo U_1 und V_1 Funktionen von $u_1 = u + v$, $v_1 = u - v$ allein sind, so entsteht

$$ds^2 = (du_1^2 + dv_1^2)(U_1 + V_1). \tag{1}$$

Man hat daher den folgenden Satz: Jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, ist eine Fläche mit dem Liouville'schen Längenelement, d. h. eine Liouville'sche Fläche.

Umgekehrt kann man nun aber auf jeder Liouville'schen Fläche ∞^1 Systeme von Kurvenscharen der genannten Art angeben.

Bekanntlich sind durch die Gleichungen

$$\frac{du_1}{\sqrt{U_1 + c}} \pm \frac{dv_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \text{const}$$

bei willkürlicher Konstante c bei geodätischen Linien der Fläche gegeben. Setzt man nun

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} + \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d u_2$$

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} - \frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = d v_2,$$

so wird

$$\frac{d u_1}{\sqrt{U_1 + c}} = \frac{d u_2 + d v_2}{2}$$

$$\frac{d v_1}{\sqrt{V_1 - c}} = \frac{d u_2 + d v_2}{2}$$

und damit geht die Form $d s^2$ (1) in

$$ds^2 = \frac{U_1 + V_1}{4} [(du_2^2 + dv_2^2)(U_1 + V_1) + 2 du_2 dv_2 (U_1 - V_1 +$$

über, aus der hervorgeht, daß alle diese Systeme geodätisch
Kurven rhombische Teilungen hervorrufen.

Zu den Liouville'schen Flächen gehören insbesondere
Flächen zweiten Grades; zu den Systemen geodätischer Lini
der verlangten Art die Erzeugenden derselben. Dies läßt s
auch leicht direkt nachweisen.

Betrachtet man z. B. das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und setzt

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{c} = \zeta,$$

so ist

$$\xi = \frac{u + v}{1 + u v}$$

$$\eta = \frac{u v - 1}{1 + u v}$$

$$\zeta = \frac{u - v}{1 + u v}.$$

Es wird demgemäß für $1 + uv = s$

$$\xi_u = \frac{1 - v^2}{s^2}, \quad \xi_v = \frac{1 - u^2}{s^2}$$

$$\eta_u = \frac{2v}{s^2}, \quad \eta_v = \frac{2u}{s^2}$$

$$\zeta_u = \frac{1 + v}{s^2}, \quad \zeta_v = \frac{1 + u^2}{s^2}$$

daher sind die Koeffizienten des Längenelementes gegeben durch

$$s^4 e = a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4$$
$$s^4 g = a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4;$$

und in der Tat wird die Teilung eine rhombische, wenn man an Stelle der Variabeln u, v die durch die Gleichungen

$$du_1 = \frac{du}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2u^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)u^4}}$$

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2v^2(a^2 - c^2 - 2b^2) + (a^2 + c^2)v^4}}$$

einführt.

Nun hat bekanntlich das Hyperboloid[1]) die Eigenschaft, daß zu dieser Teilung ∞^1 Flächen derselben Art gehören, bei denen die Koeffizienten e, g dieselben bleiben, während der

[1]) Die nämliche Eigenschaft besteht übrigens noch für das Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

wo durch die Institutionen

$$\frac{2x}{a} = u + v, \quad \frac{2y}{b} = v - u, \quad \frac{2z}{c} = uv$$

die Koeffizienten e und g gleich

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 v^2}{4}, \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2 u^2}{4}$$

werden, und sich nicht ändern, wenn man a^2 durch $a^2 - \lambda$, b^2 durch $b^2 + \lambda$ ersetzt.

Kosinus des Koordinatenwinkels variiert; sie entstehen durch die mit der Transformation in die Schar der konfokalen Flächen

$$a'^2 = a^2 + \lambda$$
$$b'^2 = b^2 + \lambda$$
$$c'^2 = c^2 - \lambda$$

äquivalente Deformation, welche die Längenabschnitte zwischen den sich kreuzenden Erzeugenden ungeändert läßt.

Dieselbe Eigenschaft aber kommt allen Liouville-schen Flächen überhaupt in viel allgemeinerem Sinne zu: d. h. zu jeder rhombischen Teilung einer Liouville-schen Fläche durch Systeme geodätischer Linien gehören ∞^1 andere Liouville'sche Flächen, welche dieselben Längenabschnitte der auf ihnen verlaufenden beiden Scharen geodätischer Linien, aber einen verschiedenen Koordinatenwinkel dieser Scharen besitzen. Wie man sieht, liefert dies eine „Deformation" der Liouville'schen Flächen, welche der ganz speziellen Deformation der Flächen zweiten Grades völlig analog ist, und zugleich die bekannte Deformation der letzteren als Spezialfall erscheinen läßt.

Man erhält nämlich für $\eta = \log \varepsilon$ aus den Gleichungen 2) des § 1, wenn man $\cos \omega = z$ setzt,

$$2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u} - z \frac{\partial \eta}{\partial v} - z_v &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} - z \frac{\partial \eta}{\partial u} - z_u &= 0. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für z sind, wenn man aus den Gleichungen 2) die Werte von z_v und z_u wieder einträgt:

$$\eta_{uu} - \eta_v (\eta_v - z\,\eta_u) - z\,\eta_{uv} = \eta_{vv} - \eta_u (\eta_u - z\,\eta_v) - z\,\eta_{uv}$$

oder

$$\eta_{uu} + \eta_u^2 = \eta_{vv} + \eta_v^2.$$

Ist aber diese von z ganz unabhängige Gleichung überhaupt erfüllt, so wird

$$z\varepsilon = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} dv + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} du + \text{const}$$

aber bei ungeändert bleibendem $\varepsilon \cdot \cos \omega$ noch von einer Konstanten abhängig.

Der Satz kann übrigens auch aus der Form des Längenelementes auf den Liouvilleschen Flächen ganz direkt geschlossen werden. Für den allgemeineren Fall, wo die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung sind, besteht ein analoger Satz nicht, da die Integrabilitätsbedingung hier die Funktion z selbst enthält.

§ 6.

Beispiele für die Bestimmung von Kurvensystemen der besprochenen Art auf Flächen konstanter Krümmung.

Als eine weitere Aufgabe bietet sich nun die Bestimmung aller Kurvensysteme der gewünschten Art dar, welche auf einer gegebenen Fläche unter gewissen Umständen möglich sind. Ich muß mich aber hier größtenteils auf die einfache Angabe einzelner einfacher Fälle beschränken, welche die Flächen konstanter Krümmung betreffen. Schon auf den Flächen von der Krümmung Null scheint es keineswegs einfach wegen der Komplikation der zu lösenden Funktionalgleichungen, alle Systeme der geforderten Art, die nicht auf bloßen Bewegungen beruhen, anzugeben.[1])

1. Setzt man

$$\begin{aligned} x &= r \cos u + r_1 \cos v \\ y &= r \sin u + r_1 \sin v, \end{aligned} \tag{1}$$

so hat man bei konstantem u den Kreis

$$(x - r \cos u)^2 + (y - r \sin u)^2 = r_1$$

[1]) Für die Liouville'schen Flächen ist dagegen die Aufgabe, alle rhombischen Teilungen durch geodätische Linien zu finden, im § 5 gelöst. Ein besonderes Interesse haben dabei wieder diejenigen Flächen, die auf mehrfache, d. h. ∞ vielfache Art sich als Liouvillesche Flächen ansehen lassen.

mit dem Radius r_1, dessen Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius r durchläuft; die Gleichungen bilden überhaupt ein doppeltes System von Translationskurven. Daß aber die Ebene durch dasselbe in Rhomben zerlegt wird, ist selbstverständlich. Transformiert man dies Kreissystem durch stereographische Projektion in geeigneter Weise auf eine Kugel, so erhält man auf den Flächen positiver konstanter Krümmung eine Doppelschar von Kreisen mit konstanter geodätischer Krümmung, welche die Fläche in Rhomben zerlegen. Dabei ist natürlich der Fall nicht ausgeschlossen, daß r und r_1 von verschiedenen Vorzeichen angenommen werden, was eine veränderte Lage der Kreise gegeneinander zur Folge hat.

2. Das System der Kreise mit konstantem Radius, deren Mittelpunkte einen Kreis mit dem Radius r durchlaufen:

$$(x - r\cos u)^2 + (y - r\sin u)^2 = a^2$$
$$(x - r\cos v)^2 + (y - r\sin v)^2 = a^2,$$

liefert

$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos u + y\sin u) = a^2 - r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos v + y\sin v) = a^2 - r^2$$

oder

$$x(\cos u - \cos v) + y(\sin u - \sin v) = 0.$$

Setzt man nun

$$x = \lambda\,[\sin u - \sin v] = 2\lambda\sin q\cos p$$
$$y = \lambda\,(\cos u - \cos v) = 2\lambda\sin q\sin p,$$

wobei

$$p = \frac{u + v}{2}$$

$$q = \frac{u - v}{2}$$

so wird

$$x\cos u + y\sin u = \lambda\sin(u - v)$$

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2\sin^2\frac{u - v}{2}$$

oder

$$\lambda = {}^1/_2 \frac{(\cos q + \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q})}{\sin q}.$$

Demgemäß wird

$$x = \cos p\,(\cos q + S)$$
$$y = \sin p\,(\cos q + S),$$

wenn zur Abkürzung

$$S = \sqrt{a^2 - r^2 + \cos^2 q}$$

gesetzt wird.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in der Tat die Koeffizienten e und g von ds^2 einander gleich sind. Wählt man insbesondere $a = r$, so erhält man die Doppelschar von Kreisen mit konstantem Radius durch den Koordinatenanfang, d. h. einen speziellen Fall von Nr. 1. Auch hier kann man durch stereographische Projektion zu Flächen konstanter positiver Krümmung übergehen.

3. Auch die Kreise von gleichem Radius r, welche eine gerade, etwa die x-Achse berühren, bilden eine solche Doppelschar. Setzt man nämlich

$$x = \frac{u + v}{2}$$
$$y = \sqrt{\frac{(v-u)^2 - r^2}{4}},$$

so ist

$$x_u = {}^1/_2, \quad x_v = {}^1/_2$$

$$y_u = -\frac{v-u}{4\sqrt{\frac{(v-u)^2 - r^2}{4}}}, \quad y_v = \frac{v-u}{4\sqrt{\frac{(v-u)^2 - r^2}{4}}},$$

so daß wieder $e = g$ wird.

4. Vermöge des Prinzips der reziproken Radien gewinnt man aus dem Spezialfalle unter Nr. 3 in der Ebene den Fall, wo die Doppelschar der Geraden, welche ein und den-

selben Kreis berühren, ein System von geodätis
Linien bildet, die wieder eine rhombische Tei
bewirken.

5. Allgemeiner aber rufen je zwei Strahlbüschel
Ebene mit beliebigen Mittelpunkten eine solche Te
hervor.

Die Gleichungen

$$y = (x - e)\,v$$
$$x = (x + e)\,u,$$

in denen der Einfachheit halber $e = 1$ gewählt werden
sind die von zwei Strahlbüscheln, welche durch die Punkte
$-e, 0$ gehen. Aus den Gleichungen

$$x = -\frac{u + v}{u - v}$$

$$y = -\frac{2\,u\,v}{u - v}$$

ergibt sich

$$e = \frac{4\,v^2(1 + v^2)}{(u - v)^4}$$

$$g = \frac{4\,u^2(1 + u^2)}{(u - v)^4}.$$

Setzt man demgemäß:

$$\frac{d\,u}{u\sqrt{1 + u^2}} = d\,u_1,$$

$$\frac{d\,v}{v\sqrt{1 + v^2}} = d\,v_1,$$

so werden die Koeffizienten e, g einander gleich.

Dabei kann auch der Mittelpunkt des
Büschels im Unendlichen liegen, ein Fall, der durch
Formeln

$$y = u\,v$$
$$x = u$$

zum Ausdruck gebracht wird.

Hier wird das Längenelement

$$ds^2 = du^2(1 + v^2) + 2\,u\,v\,du\,dv + u^2\,dv^2,$$

so daß man nur

$$\frac{du}{u} = du', \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = dv'$$

zu setzen hat.

6. Endlich sei noch ein System angeführt, bei dem die eine Kurvenschar geodätisch, die andere aus Kreisen von konstantem Radius besteht.

Setzt man

$$y = v,$$
$$(x - u)^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. betrachtet man die Parallelen zur x-Achse und die Kreise mit konstantem Radius c, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, so ist das Längenelement

$$ds^2 = du^2 - 2\frac{v\,du\,dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{c^2\,dv^2}{c^2 - v^2}$$

und man hat nur

$$\frac{\varepsilon\,dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} = dv_1, \quad du = du_1$$

zu setzen, um die rhombische Teilung herbeizuführen.

§ 7.

Bestimmung aller geodätischen Kurvensysteme mit rhombischer Teilung auf den developpabeln Flächen.

Die im vorigen § 6 gegebenen Beispiele erschöpfen für die Ebene noch nicht einmal die Fälle, in denen beide Kurvenscharen aus geraden Linien bestehen. Aus dem Liouvilleschen Ausdrucke für das Krümmungsmaß folgt für $c = c_1 = 0$ sofort

$$\omega_{uv} = 0$$

oder

$$\omega = U + V, \tag{1}$$

wo U und V Funktionen von u, v allein sind.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e} \cos \omega) = 0$$

$$\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{e} \cos \omega) = 0$$

folgt für $\varepsilon = \sqrt{e}$:

$$\varepsilon_u \sin \omega + \omega_v + \omega_u \cos \omega = 0$$
$$\varepsilon_v \sin \omega + \omega_u + \omega_v \cos \omega = 0;$$

also die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_v + \omega_u \cos \omega}{\sin \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_u + \omega_v \cos \omega}{\sin \omega}\right)$$

oder nach 1)

$$\sin (U + V)(V'' - U'') = (V'^2 - U'^2) \cos (U + V).$$

d. h.

$$\operatorname{tg}(U + V) = \frac{V'^2 - U'^2}{V'' - U''}. \tag{2}$$

Diese Funktionalgleichung ist nun offenbar erfüllt
$U' = c$, $V' = \pm c$; desgleichen für $v = \text{const.}$

$$\frac{U''}{U'^2} = \frac{\cos (U + c)}{\sin (U + c)}$$

oder

$$U' = c_1 \sin (U + c),$$

also

$$\frac{d\,U}{\sin (U + c)} = c_1\, d\,u.$$

Um aber alle Systeme der verlangten Art zu finden, muß die Funktionalgleichung 2) gelöst werden. Differentiiert man nun dieselbe nach u und v, indem man zunächst $\operatorname{tg}(U+V)$ durch $f(U+V)$ ersetzt, so folgt

$$U'f' = -\frac{2\,U'\,U''}{V''-U''} + \frac{V'^2-U'^2}{(V''-U'')^2}\,U'''$$

$$V'f' = +\frac{2\,V'\,V''}{V''-U''} - \frac{V'^2-U'^2}{(V''-U'')^2}\,V'''$$

oder durch Elimination von f'

$$2\,U'\,V'\,(V''^2-U''^2) = (V'^2-U'^2)\,(U'''\,V'+V'''\,U').$$

Dividiert man diese Gleichung durch $U'\,V'$, was zulässig ist, wenn keine der Funktionen U, V eine Konstante ist, (welcher Fall soeben betrachtet wurde) so folgt

$$3)\qquad 2\,(V''^2-U''^2) = (V'^2-U'^2)\left(\frac{U'''}{U'}+\frac{V'''}{V'}\right).$$

Differentiiert man jetzt nach v, so folgt

$$4)\quad 4\,V''\,V''' - 2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'}+\frac{V'''}{V'}\right) - (V'^2-U'^2)\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0$$

und hieraus durch Differentiation nach u

$$-2\,V'\,V''\left(\frac{U'''}{U'}\right)' + 2\,U'\,U''\left(\frac{V'''}{V'}\right)' = 0.$$

Mithin ist

$$\left(\frac{U'''}{U'}\right)'\frac{1}{U'\,U''} = \left(\frac{V'''}{V'}\right)'\frac{1}{V'\,V''} = c,$$

wo c eine willkürliche Konstante. Durch Integration erhält man

$$5)\qquad \begin{aligned} \frac{U'''}{U'} &= c/2\;U'^2 + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{V'''}{V'} &= c/2\;V'^2 + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man den so bestimmten Wert von $\frac{U'''}{U'}$ in 4
so folgt

$$V''[4V''' - 2cV'^3 - (\alpha + \beta)V'] = 0.$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $V'' = 0$.
ist aber $V' = \gamma$, und der Gleichung

$$f(U + \gamma v) = \frac{\gamma^2 - U'^2}{-U''}$$

kann offenbar nur genügt werden, wenn $U' = \pm\gamma$ gesetzt
wird, wodurch man auf den oben bereits genannten Spezialfall
zurückgeführt wird.

Es muß daher

6ᵃ) $$V''' = c/2\, V'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4} V'$$

und ebenso

6ᵇ) $$U''' = c/2\, U'^3 + \frac{\alpha + \beta}{4} U'$$

sein. Vergleicht man diese Gleichungen mit den in 5
haltenen Ausdrücken, so folgt

$$\alpha = \beta,$$

so daß nun

$$\frac{V'''}{V'} = \frac{c}{2} V'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{U'''}{U'} = \frac{c}{2} U'^2 + \frac{\alpha}{2}$$

wird. Setzt man diese Werte endlich in 3) ein, so folgt

$$2(V''^2 - U''^2) = \left(\frac{V'^2 - U'^2}{2}\right)[(V'^2 + U'^2)c + 2\alpha]$$

und diese Gleichung zerfällt in die beiden neuen

$$V''^2 - V'^4\frac{c}{4} - V'^2\frac{a}{2} = k$$

$$U''^2 - U'^4\frac{c}{4} - U'^2 a/2 = k$$

o k eine neue willkürliche Konstante bedeutet. Setzt man
tzt $a = -4\beta$, so wird

$$\frac{2\,U' d\,U'}{\sqrt{U'^4\frac{c}{4} - U'^2_2\beta + k}} = 2\,d\,u\,U'$$

ler, wenn $c/4 = -\gamma^2$ genommen wird,

$$\frac{\arcsin\left(\frac{\beta}{\gamma} + U'^2\gamma\right)}{\sqrt{k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}}} = 2\,(U\gamma + h_1).$$

Man hat also:

$$U'^2\gamma + \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{m}\sin 2\,(U\gamma + h_1)$$

$$V'^2\gamma + \frac{\beta}{\gamma} = \sqrt{m}\sin 2\,(U\gamma + h_2),$$

$$m = k + \frac{\beta^2}{\gamma^2}$$

setzt ist. Demgemäß wird

$$\gamma\,(U'^2 - V'^2) = \sqrt{m}\,[\sin 2\,(U\gamma + h_1) - \sin 2\,(V\gamma + h_2)]$$

$$U'' - U'' = \sqrt{m}\,[\cos 2\,(U\gamma + h_1) - \cos 2\,(V\gamma + h_2)].$$

Hieraus folgt

$$\gamma\,\frac{U'^2 - V'^2}{V'' - V''} = -\operatorname{cotg}\,[(U + V)\,\gamma + h_1 + h_2].$$

Zieht man noch die Konstante γ in die Funktionen U, V ein, und wählt $h_1 + h_2 = \pi/2$, so folgt in der Tat

$$\frac{U'^2 - V'^2}{U' - V'} = \text{tg}\,(U + V).$$

Diese Lösung, welche U, V als elliptische Funktionen v
u, v darstellt, entspricht, wie jetzt gezeigt werden soll, d
folgenden Satze:

Die Tangenten jedes Kegelschnittes bilden ei doppelte Schar von geodätischen Linien in der Ebe durch welche dieselbe rhombisch geteilt wird.

Seien nämlich

$$\frac{x \cos u}{a} + \frac{y \sin u}{b} = 1$$

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1$$

zwei Tangenten eines Kegelschnittes, insbesondere der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so wird

$$\frac{x}{a} \sin(v - u) = \sin v - \sin u$$

$$\frac{y}{b} \sin(v - u) = \cos u - \cos v.$$

Daraus ergibt sich

$$e = x_u^2 + y_u^2 = (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\, P$$

$$g = x_v^2 + y_v^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)\, P,$$

wo

$$P = \frac{\{1 - \cos(v - u)\}^2}{\sin^4(v - u)}$$

gesetzt ist. Es entsteht also in der Tat eine rhombis
Teilung, wenn man

[1] Für die Hyperbel sind natürlich die trigonometrischen Fu tionen durch hyperbolische zu ersetzen.

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} = du_1$$
$$\frac{dv}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} = dv_1$$

setzt. Auch für die Parabel $y^2 = 2px$ besteht der Satz. Denn hier hat man für den Schnittpunkt zweier Tangenten

$$x = \frac{uv}{2p}$$
$$y = \frac{v+u}{2}.$$

Demnach wird

$$x_u^2 + y_u^2 = \frac{p^2 + v^2}{4p^2}, \quad x_v^2 + y_v^2 = \frac{p^2 + u^2}{4p^2}$$

und man hat nur

$$\frac{du}{\sqrt{p^2 + u^2}} = du_1, \quad \frac{dv}{\sqrt{p^2 + v^2}} = dv_1$$

zu setzen.

Will man dagegen alle rhombischen Teilungen der Ebene finden, welche durch zwei Kreisscharen von konstanten Radien c und c_1 entstehen, so ist zu setzen

$$x - U = c\cos\Theta, \quad y - U_1 = c\sin\Theta$$
$$x - V = c_1\cos\Theta', \quad y - V_1 = c_1\sin\Theta',$$

wo U, U_1; V, V_1 Funktionen der Argumente u; v allein, Θ und Θ_1 aber von beiden abhängig sein können. Alsdann ist

$$x_u = -c_1\sin\Theta'\,\Theta'_u, \quad x_v = -c\sin\Theta\,\Theta_v$$
$$y_u = +c_1\cos\Theta'\,\Theta'_u, \quad y_v = +c\cos\Theta\,\Theta_v,$$

so daß die Bedingung der rhombischen Teilung

$$c_1^2\,\Theta_u'^2 = c^2\,\Theta_v^2$$

wird. Setzt man demgemäß

$$\Theta = c_1\,\psi_u, \quad \Theta' = c\,\psi_v,$$

so sind noch die Funktionalgleichungen

$$U - V = c_1 \cos(c\,\psi_*) - c\cos(c_1\,\psi_*)$$
$$U_1 - V_1 = c_1 \sin(c_1\,\psi_*) - c\sin(c_1\,\psi_*)$$

zu befriedigen. Dieselben sind aber keiner einfachen Behandlung zugänglich und auch andere Ansätze, welche die Einführung trigonometrischer Funktionen vermeiden, führen zu weitläufigen Funktionalgleichungen, die ich bisher nicht vollständig untersucht habe.

§ 8.

Die Flächen konstanter negativer Krümmung.

Die Formeln des § 1, 2 nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn $\cos\omega$ als konstant vorausgesetzt wird. Bezeichnet man die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit γ_1, γ_2, so wird das Längenelement der zugehörigen Fläche[1])

$$1)\qquad d s^2 = \frac{d u^2 + 2\cos\omega\, d u\, d v + d v^2}{\left[\frac{(\gamma_1 + \gamma_2\cos\omega)\,u + (\gamma_2 + \gamma_1\cos\omega)\,v}{\sin\omega}\right]^2}$$

mit dem konstanten negativen Krümmungsmaß

$$K = -\frac{\gamma_1^2 + 2\,\gamma_1\,\gamma_2\cos\omega + \gamma_2^2}{\sin^2\omega}.$$

Da K ein negativer definiter Ausdruck ist, der nur dann Null wird, wenn γ_1, γ_2 gleichzeitig Null sind, so entstehen nur dann developpable Flächen, wenn beide Kurvensysteme aus geodätischen Linien gebildet werden. Zugleich zeigt sich aber, daß ein solches Kurvensystem die Fläche negativer konstanter Krümmung immer in infinitesimale Rhomben zerlegt.

Setzt man

$$\gamma_1 + \cos\omega\,\gamma_2 = a\sin\omega$$
$$\gamma_1\cos\omega + \gamma_2 = b\sin\omega$$

[1]) Vgl. P. Probst, a. a. O., p. 35.

ad

$$a u + b v = u_1$$
$$\alpha u + \beta v = v_1,$$

wird für

$$m = a \beta - b \alpha$$

$$m^2 (d u^2 + d v^2 + 2 \cos \omega \, d u \, d v) = e_1 \, d u_1^2 + 2 f_1 \, d u_1 \, d v_1 + g_1 \, d v_1^2,$$

obei

$$e_1 = \beta^2 + \alpha^2 - 2 \cos \omega \, \alpha \beta$$
$$g_1 = b^2 + a^2 - 2 \cos \omega \, a b$$
$$f_1 = \cos \omega \, (\beta a + b \alpha) - (\beta b + a \alpha).$$

Wird nun angenommen, daß

$$\beta = \mu \, (a - b \cos \omega)$$
$$\alpha = \mu \, (a \cos \omega - b)$$

t, so verschwindet der Faktor f_1; es folgt zugleich

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos \omega = \mu^2 (a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega) \sin^2 \omega$$
$$m = \mu \, (a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega).$$

Demnach wird

$$m^2 \, d s^2 = (\mu^2 \sin^2 \omega \, d u_1^2 + d v_1^2) \, \frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}{u_1^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{1}{u_1} = e^{-u_2}, \qquad v_1 = v_2 \, \mu \sin \omega,$$

wird

$$d s^2 = \frac{\sin^2 \omega \, (d u_2^2 + e^{-2 u_2} d v_2^2)}{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}.$$

Das Krümmungsmaß ist nunmehr

$$K = - \frac{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \omega}{\sin^2 \omega}.$$

Damit ist das Längenelement auf die typische Form der lächen konstanter negativer Krümmung gebracht, bei der die

geodätischen Linien $dv_2 = 0$ sämtlich durch einen unendlich fernen Punkt der Fläche gehen.

Es ist aber

$$v_2 \sin\omega = \frac{v_1}{\mu} = u(a\cos\omega - b) + v(a - b\cos\omega).$$

Da endlich

$$a\cos\omega - b = -\sin\omega\,\gamma_2$$
$$a - \cos\omega\, b = \sin\omega\,\gamma_1,$$

so wird

$$v_2 = \gamma_1 v - \gamma_2 u.$$

Für den besonderen Fall $\gamma_1 = \pm\gamma_2$ wird daher die eine Schar der Diagonalkurven der Rhomben selbst aus geodätischen Linien gebildet.

Ist umgekehrt eine Fläche von der Krümmung -1 gegeben, also

$$ds^2 = du_2^2 + e^{-2u_2} dv_2^2$$

so setze man

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}{\sin^2\omega} = 1$$

und

$$v_2 = \frac{v_1}{\sin\omega}, \quad e^{-u_2} = \frac{1}{u_1}$$
$$u_1 = au + bv$$
$$v_1 = \alpha u + \beta v,$$
$$\beta = a - b\cos\omega, \qquad \gamma_1 \sin\omega = \beta$$
$$\alpha = a\cos\omega - b, \qquad \gamma_2 \sin\omega = -\alpha.$$

Die Fläche von der Krümmung -1 ist alsdann auf ein rhombisch isogonales System mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 bezogen.

Ich beweise nun zunächst die Umkehrung des obigen Satzes:

Ist ein rhombisches System mit konstantem Koordinatenwinkel auf einer Fläche mit konstantem

Krümmungsmaß vorhanden, und besteht die eine Schar der **Kurven** aus Kurven konstanter geodätischer **Krümmung** $\gamma_1 \neq 0$, so ist auch die andere Schar von konstanter geodätischer Krümmung γ_2 und das Krümmungsmaß der Fläche ist negativ.

Es sei demnach $e = g$ und $\cos\omega$ konstant, $f = e\cos\omega$, so ist nach § 1, 2

$$-\gamma_1 e \sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega,$$

also wenn $e = \frac{1}{\eta^2}$ gesetzt wird

$$-\gamma_1 \sin\omega = \frac{\partial\eta}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial\eta}{\partial u}. \tag{2}$$

Eine partikuläre Lösung dieser Gleichung ist

$$\eta_0 = u\,\gamma_1 \sin\omega; \tag{3}$$

aus der Gleichung

$$0 = \cos\omega\frac{\partial(\eta - \eta_0)}{\partial v} - \frac{\partial(\eta - \eta_0)}{\partial u},$$

welche man durch Einführung von 3) in 2) erhält, folgt daher

$$\eta = \eta_0 + f(u\cos\omega + v),$$

wo f eine willkürliche Funktion des Argumentes $z = u\cos\omega + v$ ist. Demnach ist

$$\sqrt{e} = \frac{1}{u\gamma_1\sin\omega + f} = \frac{1}{ua + f}, \tag{4}$$

wenn man $a = \gamma_1 \sin\omega$ setzt.

Die geodätische Krümmung γ_2 der anderen Kurvenschar ist

$$-\gamma_2 e \sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega.$$

Vermöge der Gleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = -\frac{f'}{(ua+f)^2}, \quad \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} = -\frac{(a + f'\cos\omega)}{(ua+f)^2}$$

folgt:

$$\gamma_2 = f' \sin\omega - \gamma_1 \cos\omega.$$

Aus der Liouvilleschen Formel für das Krümmungsmaß K folgt aber, wenn man den Wert von γ_2 einsetzt,

$$K = -\gamma_1^2 - f'^2 + (u\alpha + f) f''. \tag{5}$$

wo die Größen f', f'' von dem Argumente z allein abhängen.

Differentiiert man nun die Gleichung 5) nach v, so folgt

$$-f' f'' + (u\alpha + f') f''' = 0.$$

Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden. Ist α, d. h. γ_1 von Null verschieden, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn f' eine Konstante ist,[1]) dann ist aber auch γ_2 eine Konstante. Ist nämlich f' nicht konstant, so ist auch f'' nicht Null, dann ist aber auch f''' von Null verschieden, da $u\alpha + f$ nicht unendlich sein darf. Dann folgt aber

$$\left(-\frac{f' f''}{f'''} + f\right) + u\alpha = 0.$$

Nun ist der eingeklammerte Teil entweder eine Konstante oder eine Funktion von z; beides aber führt auf einen Widerspruch. Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Ist dagegen $\alpha = 0$ oder $\gamma_1 = 0$, so hat die Funktion f nur der Gleichung

$$K = -f'^2 + f f''$$

zu genügen.

Dieselbe gibt durch Differentiation nach z

$$-f' f'' + f f''' = 0.$$

Diese Gleichung ist wieder erfüllt für $f' = \text{const.}$ dann ist auch $\gamma_2 = \text{const.}$ Ist aber f' nicht konstant, so ist auch $f'' \neq 0$, und man hat

[1]) Natürlich kann auch $f' = 0$ sein, dann ist $\gamma_2 = -\gamma_1 \cos\omega$ und $K = -\gamma_1^2$.

$$\frac{f'''}{f'} = \frac{f'}{f},$$

und dies liefert

$$f'' = \pm c^2 f.$$

Wird das obere Vorzeichen gewählt, so wird

$$f = A e^{cz} + B e^{-cz}$$
$$K = 4 A B c^2,$$

man erhält daher Flächen von konstanter Krümmung; dieselbe kann hier positiv, negativ oder auch Null sein.

Wählt man dagegen das untere Vorzeichen, so ist

$$f = A \sin cz + B \cos cz$$
$$K = -c^2 (A^2 + B^2),$$

also K wesentlich negativ.

Eine Fläche konstanter Krümmung kann daher auch in infinitesimale Rhomben durch ein isogonales Kurvensystem zerlegt werden, deren eine Schar von geodätischen Linien gebildet ist, während die andere Schar nicht von konstanter geodätischer Krümmung ist.

Man kann übrigens aus jedem Systeme u, v, wie es in 1) zu Grunde gelegt ist, durch lineare Transformation der Variabeln u, v andere Systeme derselben Eigenschaft herleiten.

Nach Bonnet's Formel ist die geodätische Krümmung γ_φ, welche zu den Kurven $\varphi = \text{const}$ gehört, für den Fall $e = g$, $f = e \cos \omega$ ausgedrückt durch

$$-\gamma_\varphi e \sin \omega = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{e}(\varphi_u - \cos \omega\, \varphi_v)}{S} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{e}(\varphi_v - \cos \omega\, \varphi_u)}{S},$$

wobei

$$S = \sqrt{\varphi_v^2 - 2 \cos \omega\, \varphi_u \varphi_v + \varphi_u^2}$$

gesetzt ist. Setzt man nun

$$\varphi = \alpha u + \beta v = u_1$$
$$\psi = \gamma u + \delta v = v_1,$$

so werden die Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ ein rhombisches System bilden, wenn

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\cos\omega}$$

ist, und der Kosinus des Koordinatenwinkels ω_1 ist

$$\cos\omega_1 = -\frac{(\delta\beta + \alpha\gamma) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\cos\omega}{\lambda^2}.$$

Es werden daher die geodätischen Krümmungen Γ_1 und Γ_2, welche zu den Kurven $u_1 = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ gehören, ausgedrückt durch

$$-\Gamma_1 e\sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\alpha - \beta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\beta - \alpha\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}$$

$$-\Gamma_2 e\sin\omega = \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\gamma - \delta\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{(\delta - \gamma\cos\omega)\sqrt{e}}{\lambda}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$-\gamma_1 e\sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega$$

$$-\gamma_2 e\sin\omega = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u}\cos\omega$$

folgt hieraus

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1\alpha + \gamma_2\beta}{\lambda}, \quad \Gamma_2 = \frac{\gamma_1\gamma + \gamma_2\delta}{\lambda}.$$

Hierdurch sind auf der Fläche negativer konstanter Krümmung $\varkappa^1$ lineare, nur durch die Bedingungen

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\cos\omega$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

beschränkte Transformationen der Variabeln bestimmt, welche wieder isogonale Kurvensysteme von rhombischer Teilung mit den konstanten geodätischen Krümmungen Γ_1, Γ_2 bilden.

Für den Winkel ω_1 erhält man auch die Gleichung

$$\lambda^2\sin^2\omega_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2\sin^2\omega,$$

aus welcher

$$\lambda \sin \omega_1 = + \sin \omega (\alpha \delta - \beta \gamma)$$

folgt, falls diese Transformationen stetig aus der identischen

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1 & \beta = 0 \\ \gamma = 0 & \delta = 1 \end{array}$$

hervorgehen sollen.

Auch erkennt man, daß die Invariante des Zählers von $d s^2$ in 1) bei dieser Transformation durch die Gleichung

$$\frac{\Gamma_1^2 + 2 \Gamma_1 \Gamma_2 \cos \omega_1 + \Gamma_2^2}{\sin^2 \omega_1} + \frac{\gamma_1^2 + 2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \omega + \gamma_2^2}{\sin^2 \omega}$$

ausgedrückt wird, welche die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaßes K aussagt.

Setzt man insbesondere

$$\begin{aligned} u' &= u \alpha + v \beta \\ v' &= - u \beta - v \alpha \\ \beta &= \alpha \cos \omega, \end{aligned}$$

so wird

$$\cos \omega_1 = \cos \omega, \quad \lambda = \alpha \sin \omega$$

und

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \cos \omega}{\sin \omega}$$

$$\Gamma_2 = - \frac{(\gamma_1 \cos \omega + \gamma_2)}{\sin \omega},$$

so daß der Kosinus des Koordinatenwinkels ungeändert bleibt, während die geodätischen Krümmungen sich ändern.[1]) Diese Transformation entspricht daher keineswegs einer Bewegung der Fläche in sich.

Eine solche muß dagegen notwendig eintreten, wenn auch $\Gamma_1 = \gamma_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2$ wird. In diesem Falle ergibt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen zwischen γ_1 und γ_2 die Relation

$$\gamma_1 (1 - \sin \omega) = - \gamma_2 \cos \omega.$$

[1]) Vgl. § 3.

Und in der Tat, setzt man

$$u_1 = u + v\cos\omega$$
$$v_1 = -v - u\cos\omega,$$

so wird

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\omega}{\left[\gamma_2\frac{(1+\sin\omega)}{\cos\omega}u + \gamma_2 v\right]^2}$$

$$= \frac{du_1^2 + dv_1^2 + 2\,du_1\,dv_1\cos\omega}{\left[\gamma_2\frac{(1+\sin\omega)}{\cos\omega}u_1 + \gamma_2 v_1\right]^2},$$

sobald $\gamma_1(1-\sin\omega) = -\gamma_2\cos\omega$ vorausgesetzt wird.

§ 10.

Allgemeine Bemerkungen über die geodätische Krümmung eines Kurvensystems.

Ich führe endlich einige Bemerkungen über geodätische Krümmungen an, welche eine nähere Ausführung zu ver[illegible] scheinen.

Sind die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ und die Flächennormale so orientiert, wie die Achsen x, y, z eines Parallelkoordinatensystems, so ist das Integral

$$W = \int\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\right)du\,dv$$

bei positiver Umlaufung eines „Elementarflächenstückes“, d. h. bei derjenigen, welche denselben Sinn hat, wie die positive Umlaufung eines den positiven Zuwachsen du, dv entsprechenden Elementarparallelogrammes der Koordinatenbestimmung gleich

$$W = -\int(P\,dv - Q\,du).$$

Es sei nun nach Bonnet's Formel das Integral der geodätischen Krümmung γ_q der Kurven $q = \text{const}$. erstreckt über

die Fläche F, es mag etwa als totale geodätische Krümmung der Kurven φ für dieses Gebiet bezeichnet werden —, gegeben durch

$$-\int \gamma_\varphi \, dF = \int\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\varphi_u - f\varphi_v}{S}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_v - f\varphi_u}{S}\right)\right] du\, dv,$$

wobei

$$S = \sqrt{g\varphi_u^2 - 2f\varphi_u\varphi_v + e\varphi_v^2}$$

gesetzt ist.

Man erhält also

$$1) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \frac{(g\varphi_u - f\varphi_v)\, dv - (e\varphi_v - f\varphi_u)\, du}{S},$$

wo rechts das Integral über die Berandung von F in positivem Umlauf zu erstrecken ist. Ist nun F hinreichend klein, so werden die Kurven $\varphi = c$ nahezu in derselben Richtung verlaufen; wir verstehen dann unter der positiven Richtung von $\varphi = \text{const}$ diejenige, für die dv positiv ist. Dann ist für einen Punkt des Randes

$$\frac{\varphi_v}{\varphi_u} = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

Enthält φ überhaupt die Variable u, so kann man immer voraussetzen, daß φ_u positiv ist. Unter dieser Voraussetzung ist aber der Integrand auf der rechten Seite von 1) mit Berücksichtigung des Vorzeichens, da nur positive Größen aus dem Wurzelzeichen S entfernt werden, gleich $ds \cos(\varphi, ds)$, so daß

$$2^a) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = -\int \cos(\varphi, ds)\, ds\,^{1)}$$

wird. Ist dagegen $\varphi_v \neq 0$, so erhält man, falls jetzt als positive Richtung der Kurven $\varphi = \text{const}$ diejenige angesehen wird, wo du positiv ist, ebenso

$$2^b) \qquad -\int \gamma_\varphi \, dF = +\int \cos(\varphi, ds)\, ds.$$

[1]) Der Satz selbst ist keineswegs neu, vgl. z. B. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, p. 142; doch scheint daselbst keine völlig ausreichende Vorzeichenbestimmung gegeben zu sein.

Ich mache von den beiden Formeln eine Anwendung a[uf] diejenigen Flächen, welche ein isogonales Kurvensystem $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ mit den konstanten geodätischen Krümmungen γ_1, γ_2 enthalten.

Für das aus den Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ gebildet[e] Viereck $A\,B\,C\,D$ mit dem Inhalte J, welches in positive[m] Sinne durchlaufen wird, ergibt sich für $\varphi = u$ nach 2[a])

$$-\gamma_1 J = -(A\,B - C\,D) + (B\,C - A\,D)\cos\omega.$$

Dagegen nach 2[b]) für $\varphi = v$

$$-\gamma_2 J = (A\,B - C\,D)\cos\omega + (B\,C - A\,D).$$

Endlich hat man nach Liouville's Formel für das Krümmungsmaß

$$+\int K\,d\,J = \gamma_1 \int \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\,d\,u\,d\,v + \gamma_2 \int \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\,d\,u\,d\,v$$

$$= \gamma_1 (C\,D - A\,B) + \gamma_2 (B\,C - A\,D).$$

Hieraus folgt nun

$$J(\gamma_1 + \gamma_2 \cos\omega) = (A\,B - C\,D)\sin^2\omega$$

$$J(\gamma_1 \cos\omega + \gamma_2) = (B\,C - A\,D)\sin^2\omega,$$

also

$$\frac{1}{J}\int K\,d\,J = -\frac{(\gamma_1^2 + 2\,\gamma_1\,\gamma_2 \cos\omega + \gamma_2^2)}{\sin^2\omega}.$$

Aus dieser Formel aber kann man unmittelbar auf [die] Konstanz von K schließen, wenn man J gegen Null konvergieren läßt.

Ist andererseits ein Gebiet F eingeschlossen von zwei orthogonalen Trajektorien einer Reihe von Kurven $q = \text{const}$, so da[ß] ein Viereck $A\,B\,C\,D$ entsteht, in dem $A\,B$ $C\,D$ zwei gegen[]überliegende Trajektorien, $B\,C$ und $A\,D$ zwei Kurven $q = \text{const}$ sind, so ist die totale geodätische Krümmung der Kurve[n] $q = \text{const}$ für F

$$\int \gamma_q\,d\,F = B\,C - A\,D.$$

Insbesondere ist für $\gamma_\varphi = \text{const} = \gamma$

$$-\gamma J = BC - AD$$

also die Differenz der Bogenlängen der Kurven φ, welche das Gebiet begrenzen, dem Inhalte J desselben proportional. In dem besonderen Falle, wo $\gamma = 0$, ergibt sich der bekannte Satz von der Äquidistanz der orthogonalen Trajektorien einer Serie geodätischer Linien.

Diese Betrachtungen können auch in etwas erweitertem Sinne benutzt werden. Ein Beispiel dafür bildet das Stück einer Zone einer Rotationsfläche, die von irgend zwei Parallelkreisen und zwei durch Rotation ineinander übergehenden Kurven begrenzt wird. Hier haben die Parallelkreise, falls das Längenelement der Fläche gegeben ist durch

$$ds^2 = (1 + f'^2)\, du^2 + u^2\, dv^2,$$

die geodätische Krümmung

$$-\gamma_1 = \frac{1}{u\sqrt{1 + f'^2}};$$

die totale geodätische Krümmung ist daher gleich

$$2\pi(u_1 - u_0),$$

d. h. gleich der Differenz der beiden Parallelkreisbögen, welche das Zonenstück begrenzen.

Eine Serie von Kurven, deren geodätische Krümmung überall von ein und demselben Zeichen ist, kann niemals von einer oder mehreren geschlossenen orthogonalen Trajektorien völlig begrenzt werden, vorausgesetzt, daß eine Zerlegung des Gebietes in Elementarflächen möglich ist, für welche die Formeln 2^a) resp. 2^b) immer in derselben Weise anwendbar bleiben. Für geodätische Linien ist dies dagegen sehr wohl möglich, wie z. B. ringförmige, aus den Umfängen Gaußscher Kreise gebildete Teile der Fläche zeigen.

Umgekehrt ist es nicht möglich, auf einer Fläche etwa

ein ringförmiges Gebiet abzugrenzen, das von geodäti[illegible]
Linien begrenzt ist, derartig, daß auch der Innenraum [illegible]
von solchen geschlossenen Linien erfüllt ist — den ein[illegible]
Fall ausgenommen, wo die Umfänge der beiden Begren[illegible]
linien, wie z. B. bei einer Zylinderfläche, gleich groß [illegible]
Dagegen ist dies, wie das Beispiel der Parallelkreise [illegible]
Rotationsfläche zeigt, für Kurven, deren geodätische Krümm[illegible]
von einerlei Vorzeichen ist, sehr wohl möglich.

Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees.

Von **Anton Endrös.**

(Eingelaufen 5. Mai.)

(Mit Tafel II und III.)

Die ersten Untersuchungen jener periodischen Bewegungen der Wassermasse eines Sees, welche nach einer Genfer Lokalbezeichnung allgemein „Seiches" genannt werden, waren am Chiemsee in den Jahren 1901 bis 1903 ausgeführt worden. Die Beobachtungen hatten der unregelmäßigen Umrißform des Sees entsprechend äußerst komplizierte Schwingungsverhältnisse ergeben, worüber in einer Schrift „Seeschwankungen (Seiches) beobachtet am Chiemsee, Traunstein 1903, Dissertation der K. Technischen Hochschule in München"[1] (im folgenden zitiert mit P. I.) ausführlich berichtet wurde. Auf Anregung von Herrn Professor Dr. Hermann Ebert wurden die Untersuchungen im Frühjahr 1904 wieder aufgenommen.

Es war zunächst erwünscht an weiteren Zwischenpunkten Beobachtungen mit selbstregistrierenden Limnimetern anzustellen, um einzelne Schwingungen, besonders diejenige von 29 Min.-Dauer im westlichen Teile des Sees, Inselsee genannt, näher aufzuklären (vgl. P. I S. 65 ff.). Dabei sollte zugleich der Einfluß der Inseln, welche von den bayerischen Seen nur am Chiemsee in dieser Ausdehnung vorhanden

[1] Die Schrift erschien zugleich als Jahresprogramm der K. Realschule Traunstein 1903.

sind — die Herreninsel hat 225 ha, die Fraueninsel 8,9 h
und die Krautinsel 2,7 ha; sie machen zusammen 2,25 % d
Seefläche aus — in die Untersuchung einbezogen werden. I
Juni 1904 mußte ferner die **Tieferlegung des Chiemsee**
spiegels dem Vertrage gemäß beendigt sein, wobei alle Wasser
stände des Sees durch Regulierung des Seeabflusses, der Al
um 60 cm tiefergelegt werden sollten.[1] Dies seit 200 Jahre
geplante Unternehmen, das den Zwecken der Melioration de
anliegenden Kulturländer diente, konnte hiebei auch für di
Wissenschaft nutzbar gemacht werden, indem der Einfluß au
die Schwingungsverhältnisse des Sees untersucht und dami
gleichsam ein Experiment größten Stiles angestellt werde
konnte. Die ersten Untersuchungen hatten auch neben de
starken Einwirkung der Umrißform des Sees auf die Schwin
gungsverhältnisse eine **Mitwirkung der unterseeische**
Beckenunregelmäßigkeiten ergeben. Diese Mitwirkung
sollte weiter verfolgt werden, wozu zunächst **Neulotunge**
notwendig waren, da verschiedene Umstände darauf hindeuteten
daß die Lotungen an mehreren Stellen nicht dicht genug ware

So erwähnte E. **Bayberger**,[2]) dem wir die erste Ab
lotung des Sees verdanken, selbst, daß die isolierte Tiefe v
43 m südwestlich der Herreninsel (vgl. die Tafel II) ni
notwendig angenommen werden muß, sondern daß die 40
und 20 m-Tiefenkurven noch diese Stelle vielleicht umschlie
Um über die Bodengestalt in diesem Seeteile Sicherheit zu e
halten, wurden daher dort zwei Querprofile ausgelotet, das e
vom Badehaus bei Felden gegen die Südwestecke der Herr
insel und das zweite von da gegen den Ufervorsprung südl
Harras. Diese wie die folgenden geloteten Tiefen sind n

[1]) Über das nun ausgeführte Unternehmen ist eben ein amt
Bericht „Die Senkung des Chiemseespiegels mittels Korrektion des A
ausflusses bei Seebruck" vom Vorstande des K. Straßen- und F
amtes Herrn Bauamtmann G. Mayr veröffentlicht worden, der b
nicht im Drucke erschienen, welchem obige Angaben entnommen sir

[2]) E. **Bayberger**, Der Chiemsee. Mitteilungen des Vereins f
Erdkunde zu Leipzig 1888, S. 30.

Karte auf Tafel II eingezeichnet. Dieselbe enthält als Uferlinie die Tiefenkurve von — 0,36 m H. P., mit welcher die Umrißlinie des Sees nach der Tieferlegung nahe zusammenfallen dürfte. Die genannte Kurve ist einer Karte des K. Straßen- und Flußbauamtes Traunstein entnommen, welche im Jahre 1880 auf Grund umfangreicher Vermessungen hergestellt und mit Tiefenkurven von 0,5 zu 0,5 m versehen ist. Die frühere Uferlinie des Sees ist durch die punktierte Linie angedeutet; sie ist dem Katasterblatte des K. B. topographischen Bureaus entnommen, da die Umrißlinie der Baybergerschen Karte sich als ungenau erwiesen hatte. Die Tiefenangaben stützen sich im wesentlichen auf die E. Baybergersche Karte und beziehen sich sämtliche auf das frühere Mittelwasser von + 0,50 m H. P. Aus den Neulotungen ersieht man, daß die 10 m-Tiefenkurve viel näher als früher an die Irschner Bucht herangeht und daß die 20 und 30 m-Isobathen hier nicht enden, sondern die isolierte Tiefe von 43 m umschließen, ferner daß nur die 40 m-Kurve eine in sich geschlossene ist, aber eine ungefähr fünfmal so große Fläche einschließt und sich 500 m südlich Harras so sehr dem Ufer nähert, daß wir hier ähnliche Böschungsverhältnisse wie an dem durch die Alluvionen der Achen entstandenen Achenzipfel und dem durch den Rotbach erzeugten Ufervorsprung vor uns haben. (Wahrscheinlich befand sich hier früher einmal die Mündung der Prien, von welcher ein Seitenkanal, der Mühlbach, etwas südlicher bei Schöllkopf in den See mündet.) Außerdem ist aus den Lotungen ersichtlich, daß von der Südwestspitze der Herreninsel in südlicher Richtung gegen das Feldner Gasthaus ein sanfter Rücken zieht mit zwei Sätteln, dem südlichen von 36 m größter Tiefe und dem nördlichen von 24 m; dazwischen erhebt sich der Seeboden bis 20 m. Diese Erhebung setzt sich, wie ich von den Fischern erfahren konnte, in Gestalt eines Rückens längs der Insel gegen Osten fort.

Weiterhin wurde das Profil Urfahren—Herreninselnordspitze ausgelotet, da die dort sich befindliche Einengung bei der Schwingungsunterteilung einen sehr großen Einfluß ausübt.

Der Seeboden fällt von Urfahren aus gleichmäßig bis zu einer Tiefe von 6,5 m ab; etwa 100 m vor der Herreninsel nur ist eine 20 m breite, über 10 m tiefe Rinne, welche ich erst bei einer Nachlotung auffinden konnte.

Ferner wurden einige von den den Fischern wohlbekannte und mit besonderen Namen belegten unterseeischen Erhebungen aufgesucht, von welchen der Chiemsee acht haben soll. Eine Stelle von 13 m Wassertiefe genannt die „Höhe" wurde schon von Bayberger südöstlich der Herreninsel aufgefunden. Da nördlich davon keine Lotungen vorlagen, so hat er den Seeboden ansteigend gegen die Herreninsel angenommen. Ein weiterer Berg erhebt sich vor der Feldwieser Bucht bis 11 m unter Wasser, während ich näher der Bucht noch 28 m lotete. Eine dritte unter dem Namen „Kaiser" bekannte Erhebung (s. P. I, S. 92) liegt im nordwestlichen Teile der Chieminger Seeausbuchtung und erhebt sich als Rücken langsam von Süden nach Norden bis 5 m unter Wasser, fällt aber gegen Westen, Norden und Osten ziemlich steil ab. Eine vierte größere Bodenerhebung hat E. Bayberger zu 27 m mitten zwischen der Fraueninsel und dem Achenzipfel, der Halbinsel am Südufer, gefunden. Eine fünfte soll sich etwa 1 km nordöstlich von Gstadt, am Nordwestufer, befinden, da wo nach Bayberger der See steil abfällt. Eine sechste Erhebung soll als größeres Plateau zwischen Chieming und dem Achenzipfel liegen, das von den Fischern als Grabenstädter Berg bezeichnet wird. Endlich reichen zwei weitere Erhebungen östlich bezw. nordöstlich der Herreninsel bis wenige Dezimeter unter Wasser, so daß dieselben nach der Tieferlegung bei niedrigem Wasserstand als Inseln hervortreten, während ich zwischen denselben und der Herreninsel noch 5 bezw. 4 m gelotet habe.

Man sieht aus den Lotungsergebnissen, daß die von E. Bayberger vorgenommenen Lotungen, so genau sie im westlichen Seeteile sind, sich doch als unzureichend im südlichen Teile und im Weitsee erweisen. Es dürfte sich daher verlohnen, wenn noch die Veränderungen der Seefläche durch die Tieferlegung veröffentlicht sein werden, eine Neuverlotung

vorzunehmen und die Konstanten des Seebeckens neu zu bestimmen.

Ein Hauptzweck der weiteren Untersuchungen der Seiches unseres Sees war endlich die Erforschung der Entstehungsursachen dieser Seeschwankungen, da sich die ersten Untersuchungen nur auf acht Monate erstreckt hatten und gerade der Chiemsee sich wegen seiner geographischen Lage sowohl als der raschen Dämpfung der Hauptschwingung, wodurch der Zeitpunkt und die Größe der neuerzeugten Schwankungen deutlicher als an anderen Seen herausgefunden werden kann, als besonders geeignetes Objekt erwiesen hatte. Über die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchungen, in welche noch Beobachtungen am Waginger- und Simssee einbezogen wurden, wird in einer weiteren Arbeit berichtet werden. Im folgenden seien nur die Ergebnisse über die Schwingungsformen des Chiemsees an sich mitgeteilt.

Zuvor möchte ich mich der angenehmen Pflicht entledigen für die mannigfache Unterstützung, die ich bei der Arbeit gefunden habe, wärmstens zu danken. Vor allem waren mir die zum Teil kostspieligen Untersuchungen nur dadurch ermöglicht, daß die K. B. Akademie der Wissenschaften in München wiederum die erforderlichen Mittel zur Verfügung stellte, wofür an dieser Stelle ehrerbietigst gedankt sei. Am See selbst übernahmen bereitwilligst die Hilfsbeobachter, welche später bei den betreffenden Stationen mit Namen aufgeführt sind, die Überwachung und Bedienung der Instrumente. Außerdem gewährte mir der Besitzer der Chiemseedampfschiffahrt Herr Ludwig Feßler in liebenswürdigster Weise während der ganzen Beobachtungszeit freie Fahrt, wodurch mir die Kontrolle der Apparate sehr erleichtert wurde. Ferner überließen mir in entgegenkommenster Weise der Vorstand des K. B. Hydrotechnischen Bureaus Herr Oberbaurat Hensel die Diagramme des registrierenden Alzpegels in Seebruck und der Vorstand des K. Straßen- und Flußbauamtes Traunstein Herr Bauamtmann Mayr sämtliche für die Tieferlegung einschlägigen Schriften und Karten. Endlich stellte

mir Herr Professor Dr. W. Halbfaß in Neuhaldensleben seinen Lotapparat und seine umfangreiche Literatur über die Seenkunde bereitwilligst zur Verfügung und Herr Professor Dr. E. Bayberger in Passau übersandte mir freundlichst seine Originalaufzeichnungen über die Verlotung des Chiemsees. Den genannten Herrn sei auch an dieser Stelle nochmals aufrichtigst gedankt. Besonderen Dank aber schulde ich wiederum Herrn Professor Dr. Hermann Ebert an der Technischen Hochschule in München für die Überlassung sämtlicher Apparate wie die allseitige Förderung der Untersuchungen.

I. Die Beobachtungen.

1. Die Apparate.

Zu den Beobachtungen stand mir zunächst wieder ein Sarasinsches selbstregistrierendes Limnimeter[1]) zur Verfügung. Instrumente dieser Art hatten an den verschiedensten Seen Anwendung gefunden, um ein einheitliches Verfahren in der Beobachtungsmethode zu erhalten, und haben im allgemeinen sich gut bewährt. Auch bei den Untersuchungen in den Vorjahren wurden dieselben als sehr empfindlich befunden (s. P. I, S. 11). Die Störungen, welche durch die Verbindung von Pegel- und Registrierapparat mittels einer Gelenkstange entstanden, konnten bei der ständigen, persönlichen Überwachung rasch behoben werden. Da aber eine so häufige Kontrolle des Apparates wie früher mir jetzt nicht mehr möglich war, besonders wegen der größeren Ausdehnung des ganzen Beobachtungsnetzes, weisen die Limnogramme öfters die abgeschnittenen Kurvenzüge auf, welche einen Fehler bis + 5 mm enthalten können. Die gleichen Erfahrungen hatte schon W. Halbfaß beim Horster Limnimeter am Madüsee[2]) gemacht, wie die mitgeteilten Kurvenbeispiele ersehen lassen; dem

[1]) Eine eingehende Beschreibung durch H. Ebert findet sich in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. XXI, 193. J. Springer, Berlin 1901.

[2]) W. Halbfaß, Stehende Seespiegelschwankungen (Seiches) am Madüsee in Pommern. Zeitschrift für Gewässerkunde, 6. Bd., 2. H., 1903.

genannten Forscher war eine persönliche Kontrolle der Apparate bei der weiten Entfernung vom See unmöglich. Auch die japanischen Seichesforscher berichten von unbefriedigenden Ergebnissen mit den Limnimetern,[1]) wobei die Aufzeichnungen eines solchen Instrumentes mit einem daneben aufgestellten, von ihnen konstruierten, das den Schreibstift direkt an der Schwimmerstange trägt, nicht übereinstimmten. Die von E. Sarasin auf Grund seiner reichen Erfahrung auf dem Gebiete der Seichesforschung konstruierten Apparate waren eben zunächst für eine Aufstellung auf Steinmauern oder in festgebauten Badehäusern gedacht, wo eine Verschiebung von Pegel- und Registrierapparat nicht leicht möglich ist, und die dicht bewohnten Schweizer Seen erlaubten auch immer eine so feste Aufstellung und sorgsame Überwachung. Dazu kommt, daß die Instrumente fast immer an größeren Seen verwendet worden waren, wo die Schwingungsamplituden gewöhnlich über 1 cm betragen, so daß Fehler von dem erwähnten Betrage nicht so störend wirken. Bei den in neuester Zeit untersuchten Seen fehlte aber jede Gelegenheit zu einer derartigen festen Aufstellung, weshalb die Instrumente auf eigens geschlagenen Pfählen oft weit in den See hinaus — wie am Madüsee — gestellt und dort dem Wellengang, Wind und Wetter ausgesetzt waren. Daß dabei jederzeit Verschiebungen zwischen Pegel- und Registrierapparat eintreten können, ist klar und unvermeidlich. Die Sarasinschen Instrumente in der jetzigen Form sind daher besonders für kleinere Seen, wo die Amplituden 1—2 mm gewöhnlich nicht übersteigen, nicht immer zu gebrauchen.

Die Sarasinschen Limnimeter lassen sich jedoch durch einfache Abänderungen, wie sie zur Zeit an den beiden Instrumenten der K. B. Akademie vorgenommen werden, auch in den genannten Fällen brauchbar machen. Der getrennte Pegelapparat ist überflüssig und der Schwimmer wird direkt über die beiden Rollen des Registrierapparates gehängt, welche

[1]) H. Ebert, Über neuere japanische Seenforschungen. Zeitschrift für Instrumentenkunde, XXIII, Nov. 1903, S. 345. J. Springer, Berlin.

die Schiene mit dem Schreibstift tragen. Der Schwimmer hängt hierbei an einem Kupferbande, das an der Schiene selbst mittels Druckschrauben festgeklemmt werden kann. Da die eine Rolle in der Mitte ihres Umfanges gezahnt ist, wird das Band seiner ganzen Länge nach in zwei schmale Bänder gespalten oder man verwendet statt des Doppelbandes nach **Chrystal**[1]) zwei Drähte, welche in zwei Riefen über die Rollen geführt sind. Dadurch ist erreicht, daß man dem abgeänderten Limnimeter jederzeit seine frühere Form wiedergeben kann, wenn an einem See die Verhältnisse dafür günstig sind. Am anderen Ende des Bandes hängt ein Gegengewicht. Durch diese Anordnung ist außerdem der Schreibstift in direkter Verbindung mit dem Schwimmer und die oben besprochenen Störungen fallen weg. Weiterhin bietet die Anordnung den Vorteil, daß der Schutzzylinder unmittelbar zwischen den Pfählen, welche den Apparat tragen, befestigt werden kann und dadurch einen festeren Halt bekommt. Je nach den Veränderungen des Pegelstandes kann die Schiene mit dem Schreibstift auf dem Bande nach Lockerung der Schrauben verschoben werden.

Auch Professor **Chrystal** hat die Sarasinschen Limnimeter für die Beobachtungen an den schottischen Seen für nicht immer geeignet befunden und dieselben in ähnlicher Weise **bereits abgeändert** und außerdem ein **neues Instrument konstruiert**, das sich bereits bei den Untersuchungen bewährt hat.[1]) Bei dem letzteren hängt der Schwimmer mittels eines Stahlbandes über zwei Gleitrollen, wie oben bei der Abänderung des Sarasinschen Limnimeters angegeben ist, an dessen anderem Ende ein Gegengewicht sich befindet. An dem Bande ist nun nicht direkt der Schreibstift befestigt wie beim Plantamourschen Limnographen,[2]) wo infolge der Reibung des Stiftes an dem Papier der Stift schiefgestellt und ein störender Fehler entstehen kann, sondern auf dem Streifen wird ein kleiner

---

[1]) Die folgende kurze Beschreibung ist einer gütigen brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. Chrystal entnommen.

[2]) E. v. Cholnoky, Limnologie des Plattensees. Wien 1897.

Wagen befestigt, der einerseits auf zwei Rädchen mit Einkerbungen am Rande über einer kantigen Schiene läuft und anderseits auf einer Rolle mit flachem Rand auf einer ebensolchen Schiene gleitet. Dieser kleine Wagen trägt den Schreibstift, der dabei schief auf dem Papier liegt. Hierdurch ist eine leichte und fehlerfreie Bewegung des Stiftes erreicht und außerdem ein Hemmen des Streifenganges durch den eindrückenden Stift vermieden. Den gleichen Wagen verwendete Chrystal auch bei den abgeänderten Sarasinschen Instrumenten. Die Schiene des ursprünglichen Limnimeters, welche den Schreibstift trägt, bleibt dabei weg, dafür werden die beiden obengenannten Schienen daneben befestigt. Statt des Stahlbandes benützte Chrystal hierbei auch zwei Drähte, wie schon oben erwähnt, welche in je zwei in die Rollen des Sarasinschen Limnimeters eingeschnittenen Rinnen laufen. Mit einem solchen abgeänderten Limnimeter wurden bereits Beobachtungen an Seen angestellt und diese lieferten Kurvenzüge, welche alle jene Einzelheiten aufweisen, wie ich sie mit meinem Limnimeter erhalten habe, wovon ich mich an einem von Chrystal freundlichst übersandten Original-Limnogramme selbst überzeugen konnte. Zugleich verwendet Chrystal Tintenstifte und dazu Papier mit feinerer Oberfläche, was sich bei dem schiefstehenden Stifte vollständig bewährt hat.

Als zweites Limnimeter benützte ich das von mir selbst konstruierte Instrument,[1]) das im folgenden zum Unterschied vom Sarasinschen Limnimeter kurz transportables genannt ist. Dasselbe war zu Beobachtungen an Zwischenpunkten hergestellt worden und hat sich auch bei den weiteren Beobachtungen am Chiemsee und besonders bei den Untersuchungen am Wagingersee und an kleineren Weihern wegen seiner Handlichkeit und großen Empfindlichkeit als sehr geeignet erwiesen. Dadurch ferner, daß die Aufzeichnungen mehrerer Tage (bis zu acht Tagen bei geringer Amplitude) untereinander auf

---

[1]) Eine kurze Beschreibung desselben mit Abbildung s. P. I, S. 33. und Zeitschrift für Instrumentenkunde. J. Springer, Berlin, 24. Juni 1904

denselben Streifen kommen, sind die Limnogramme sehr übersichtlich. Beim langsamen Streifengang (pro 1[h] 2 cm) fällt auch die häufige Bedienung weg.

Endlich wurde wieder das **Zeigerlimnimeter**[1]) zu Ablesungen des Wasserstandes an korrespondierenden Punkten häufig gebraucht. Der verwendete Zeiger erlaubte die Ablesungen des Wasserstandes in achtfacher Vergrößerung und zwar wurde gewöhnlich von Minute zu Minute abgelesen, wozu sich auch Hilfsbeobachter benützen ließen.

2. Die Limnogramme.

Die Aufzeichnungen der Limnimeter sind am Chiemsee meistens Interferenzkurven von zwei und häufig von mehr als zwei Schwingungen, wie ich sie in P. I, S. 12 u. ff. eingehender besprochen habe. Die Entzifferung solcher Limnogramme verlangt daher immerhin eine Übung, welche man sich am besten durch künstliches Entwerfen mehrerer einfacher Kurven von verschiedener Dauer und Danebenzeichnen von Interferenzkurven derselben verschafft.

Die Dauer der einzelnen Seiches erhält man am genauesten und sichersten an den Knotenlinien der nächsten Oberschwingungen. Das ist aber nur an Seen mit vorwiegender Längsrichtung der Fall. Am Chiemsee dagegen, wo Schwingungen nach verschiedenen Richtungen auftreten, sind auch an den genannten Knotenlinien die einzelnen Schwingungen nicht genauer zu messen. Man ist daher auf **die Bestimmung der Dauer aus Interferenzkurven** angewiesen. Es wurde daher wieder so verfahren, daß nur längere Seichesreihen benützt wurden, welche in der zu messenden Schwingung ausklangen. An der Hand der künstlich hergestellten Interferenzkurven konnten außerdem die höchsten und tiefsten Stellen der Einzelschwingungen hinreichend genau herausgefunden werden. Dabei war besonders auf eventuelle Phasenänderungen zu achten

---

[1]) Eine Beschreibung desselben s. P. I, S. 7 und Dr. A. Petermanns geographische Mitteilungen, 1904, 12. H., S. 1.

Außerdem mußten die ersten Kurvenzüge einer jeden Reihe gewöhnlich weggelassen werden, weil sie keine periodischen Bewegungen des Seespiegels, sondern durch denivellierende äußere Ursachen erzwungene Bewegungen verzeichnen. Auf diese Bewegungen, die Chrystal zum Unterschied von den Seiches, welche „freie" Schwingungen der Wassermasse sind, „erzwungene" genannt hat,[1]) werde ich bei den Ursachen der Seiches ausführlich zurückkommen. Hier sei nur erwähnt, daß diese Kurvenzüge nie symmetrische Gestalt haben, wie die reinen Sinuskurven, so daß die Gefahr einer Verwechslung mit freien Schwingungen nicht leicht möglich ist. Findet man daher einen oder mehrere symmetrisch verlaufende Kurvenzüge von annähernd gleicher Dauer, so darf man darin eine neue Schwingung vermuten und wird sie bei genauer Durchsicht der Limnogramme öfters herausfinden. Auf diesem Wege habe ich eine neue Seiche von 54 Min.-Dauer und andere seltenere Schwingungen aus den früheren Limnogrammen nachträglich herausgefunden. Außerdem ist diese Bemerkung, die ich aus meinen Erfahrungen an sämtlichen Seen als erwiesen annehmen darf, besonders wichtig für die kurzdauernden Untersuchungen mit dem Zeigerlimnimeter, welche gewöhnlich nur wenige Kurvenzüge liefern. Eine Verwechslung mit dikroten Schwingungen ist ebenfalls ausgeschlossen, weil bei diesen der auf- und absteigende Ast der Kurvenzüge ebenfalls nicht symmetrisch verläuft. Eine Ausnahme nur habe ich bei den sogenannten Schwebungen beobachtet.

Nähern sich nämlich die Periodendauern zweier Schwingungen, so kommen n solche längerer Dauer auf $n + 1$ solche kürzerer Dauer, wobei $n = \frac{T'}{T - T'}$, wenn „T" die längere Dauer und „T'" die Dauer der kürzeren Periode ist; „n" ist dabei gewöhnlich nicht rational. Ich habe diese Kurvenzüge Schwebungen genannt, weil dieselben die graphische Dar-

[1]) Chrystal, On the Hydrodynamical Theorie of Seiches; Trans. Roy. Soc. Edinburgh 51. III. No. 25. Im folgenden zitiert mit H. T. S.

Die Beobachtungen des Jahres 1902/03.

Station	Amplituden und Phasen der Seiches von folgender Dauer in „Min."													[illegible] Amplitude
	43	37 1/2	29	18	16	12 1/2	11	9 1/2	8	7	5	4	3	
I. Schafwaschen	+ 100	+ 100	+ 100	+ 20	0	0	+ 20	0	+ 25	0				300
II. Seebruck	− 17		+ 29		+ 100	0	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	+ 100	300
1. Feldwies	(− 20)		0	+ 56	− 93	+ 100	0	− 100	+ 200	− 25		[illegible]		80
2. Felden	+ 14		− 68	+ 60	+ 67	+	0		0	0		[illegible]		38
3. Mühlen	0		− 58	− 74	− 120	(−) 50	0		− 100	100			[illegible]	60
4. Stock	+ 37		− 90		+ 20				[illegible]					6
5. Gstadt	0		− 10	− 11	− 38		(− 10)		(+) 10				+	7
6. Arlaching	− 15		+ 34	− 28	+ 57		+ 34		0	47	+ 200			15
7. Chieming	− 10		+ 39	− 33	− 44		+ 25		[illegible]	+ 20				16
8. Hagenau	0		+ 42	+ 100	− 157		+ 94		+ 150	[illegible]				[illegible]

die Amplitude 0 gesetzt; ist sie zweifelhaft, so ist die Rubrik freigelassen. In der ersten Rubrik stehen die Stationen, in der zweiten die Amplituden und Phasen der 43 Min.-Seiche, in der dritten die der 37 ½ Min.-Seiche u. s. w., in der letzten ist die größte Doppelamplitude des Beobachtungsortes in Millimetern angefügt.

Auf Grund dieser Ergebnisse, wozu noch Beobachtungen an 10 weiteren Punkten mittelst des Zeigerlimnimeters kamen, konnten die Knoten und Bäuche einer größeren Zahl von Schwingungen zum Teil genau angegeben werden (vgl. P. I, S. 47—57).

4. Die neuen Beobachtungen in Schafwaschen (I).

Aus den einleitend schon erwähnten Gründen wurden nun im Frühjahr 1904 die Untersuchungen wieder aufgenommen. Zunächst wurde das Sarasinsche Limnimeter in Schafwaschen an der gleichen Stelle wie in den Vorjahren wieder aufgestellt. In dem genannten Winkel des Sees hatten sich die beiden Hauptschwingungen des Sees mit ihrer größten Amplitude gezeigt und da mir diesmal nur ein Sarasinsches Instrument zur Verfügung stand, war dieser Punkt der geeignetste um als feste Vergleichsstation für die Beobachtungen an den Zwischenpunkten zu dienen. Außerdem standen mir in Seebruck die Aufzeichnungen des dortigen registrierenden Seepegels zur Verfügung, welche die Seiches, wenn auch nur in zehnfacher Verkleinerung, so doch deutlich genug anzeigten, um die einzelnen Schwingungen herausfinden zu können. An der genannten Stelle stand das Limnimeter vom 14. April bis 10. Juli, von wo ab die Wassertiefe infolge der raschen Senkung des Seespiegels durch die Tieferlegung so gering wurde, daß eine Neuaufstellung notwendig wurde. Etwa 100 m nördlicher wurde dieselbe vorgenommen, an einer Stelle, wo die Wassertiefe bei 0 cm Herrenwörther Pegel (im folgenden mit H. P. abgekürzt) immer noch 1,5 m betrug. Um keine Unterbrechung in der Beobachtung eintreten zu lassen, registrierte dort das transportable Limnimeter vom 1. Juni bis 10. Juli

ununterbrochen den Wasserstand. Von da ab war das Sarasinsche Instrument in Tätigkeit bis 1. Januar 1905, wo beginnende Eisbildung weitere Beobachtungen verhinderte. Bei dem Tauwetter Ende Februar wurden die Beobachtungen wieder aufgenommen; dabei war die ganze Bucht noch unter starker Eisdecke. Unerwarteter Eisgang am 12. März unterbrach die Untersuchungen, da das Instrument ans Ufer geschoben und beschädigt wurde. Ende Mai gelang es wieder, dasselbe an der gleichen Stelle in Tätigkeit zu setzen, bis Ende Juli die Beobachtungen beendigt werden konnten. Die Bedienung hatte wieder wie in den Vorjahren Herr Gasthofbesitzer B. Ma[illegible] in freundlichster Weise übernommen.

Im folgenden werden nun die Seiches, welche aus den Aufzeichnungen in Schafwaschen herausgefunden wurden, geordnet nach ihrer Dauer aufgezählt.

1. Die 54 Min.-Seiche. Die Schwingung wurde erst nachträglich bei der abermaligen Vermessung der Limnogramme des Jahres 1902 als eigene Seiche des Sees erkannt. Die größte Reihe umfaßt aber nur sechs Schwingungen und die Amplitude[1] erreicht nur 10 mm. Sie ist dabei auch nur bei hohem Wasserstande (über 80 cm H. P.) zu finden; da dieser Wasserstand in der weiteren Beobachtungszeit nicht mehr erreicht wurde, ist die Schwingung auch aus den neuen Limnogrammen nicht mehr herauszufinden. Als Mittel aus den gemessenen Reihen ergibt sich 53,8 Min. (größte Dauer 55,2 Min., kleinste 51,6 Min.), weshalb sie kurz 54 Min.-Seiche genannt sei.

2. Die 43 Min.-Seiche. Wie in den Vorjahren ist sie auch jetzt noch die eigentliche Seiche dieser Station und wenn nicht rein, so doch in dikroter Form fast immer zu erkennen. Die größte gelegentliche Doppelamplitude betrug im Jahre 19[illegible] 300 mm, im Jahre 1904 160 mm und 1905 185 mm. Dabei nimmt aber die Amplitude aufeinanderfolgender Schwingungen

[1] Unter Amplitude ist hier wie im folgenden immer der Abstand des tiefsten und höchsten Punktes einer Schwingung verstanden.

rasch ab und die Reihen der Seiches sind im Verhältnis zu anderen Seen kurz. Die Dämpfung ist merkwürdigerweise bei hohem Wasserstande eine stärkere als bei niedrigem. Die Dauer der Seiche änderte sich auch diesmal stark mit dem Pegelstande und zwar ging der Wasserstand von 30 cm H. P. auf — 57 cm H. P. während der Beobachtungszeit zurück (infolge der Tieferlegung) und die Dauer nahm mit dem Pegelstande vom höchsten Werte von 42,10 bis 39,34 Min. ab, so daß der Mittelwert dieser Beobachtungszeit und zugleich des neuen Mittelwasserstandes von 0 cm H. P. 40,8 Min. rund 41 Min. beträgt. Die Seiche sei daher von jetzt ab 41 Min.-Seiche genannt. Auf die Veränderungen der Periodendauer im einzelnen werde ich später zurückkommen.

3. Die 37½ Min.-Seiche ist nur an einigen Interferenzkurven der 41 Min.-Seiche zu erkennen. Da die Dauer derjenigen der ersteren sich nähert, bilden die beiden gleichzeitig auftretenden Schwingungen die früher mit Schwebung bezeichnete Form einer Interferenzkurve, wobei auf sechs Schwingungen von 41 Min. sieben solche von rund 36 Min. kommen. Die Dauer hat also um ungefähr 1½ Min. gegen früher abgenommen und wird daher im folgenden 36 Min.-Seiche genannt.

4. Die frühere 29 Min.-Seiche ist auch diesmal neben der 41 Min.-Seiche am häufigsten im Schafwaschner Limnogramme zu finden. Rein tritt sie nie auf; nur zu Zeiten, wo die 41 Min.-Seiche rascher gedämpft wird, klingen manche Reihen in der 29 Min.-Seiche aus. Zeitweise zeigt sich dieselbe mit auffallend kleiner Amplitude. Die größte überhaupt gemessene Amplitude betrug diesmal 80 mm. Die Dauer der Seiche änderte sich von 28,99 Min. im Mittel bis 28,1 Min. Bei dem jetzigen Mittelwasser ist dieselbe 28,5 Min., weshalb sie nun 28½ Min.-Seiche heißt.

5. Die 18. Min.-Seiche ist sehr selten in Schafwaschen zu erkennen. Nur wenn die Amplituden der Hauptschwingungen klein sind, konnte sie und auch dann nur einige Male

deutlich erkannt und ihre Phase und Amplitude mit anderen Punkten verglichen werden.

6. Die 11 Min.-Seiche ist aus den neuen Aufzeichnungen nur einmal deutlich herauszufinden. (2. Juni bei + 14 cm H. P.)

7. Die frühere 8 Min.-Seiche. Diese Schwingung zackt die Kurven jetzt häufiger aus und ist besonders im Momente des Eintrittes einer starken Denivellation immer und mit größerer Amplitude vorhanden. Doch sind gewöhnlich nur kurze Reihen zu messen. Auffällig ist, daß sie bei niedrigem Wasserstande und zwar bei — 54 cm H. P. in sehr langen Reihen, bis 89 Schwingungen nacheinander, und mit bedeutender Amplitude, bis 40 mm, auftritt. Einmal war dabei sogar der ganze Schafwaschner Winkel noch unter starker Eisdecke. Die Dauer dieser Seiche hat besonders stark abgenommen und zwar in der ganzen Beobachtungszeit von 8,57 Min. bis 6,40 Min., das sind um 25 % der ursprünglichen Dauer, worauf ich ebenfalls später noch zurückkommen werde. Sie sei daher zum Unterschied von der 8 Min.-Seiche des Weiteren 6,4 Min.-Seiche genannt.

8. Die 3,8 Min.-Seiche. Diese ist nur einmal bei Pegel — 54 cm zu messen gewesen und ist eine neue Seiche, welche früher, auch bei der nochmaligen Durchsicht der Limnogramme, nicht herauszufinden war.

5. Die Beobachtungen an weiteren Zwischenpunkten.

Um die Amplituden und Phasen der einzelnen Seiches an den verschiedenen neuen Beobachtungspunkten miteinander vergleichen zu können, wurden häufig das Schafwaschner Limnimeter und das transportable Limnimeter von mir persönlich kontrolliert und mit übereinstimmenden Zeitmarken versehen. Dabei wurde beim Beobachtungsgange um den See und beim Vergleich der Limnogramme besonders auf die häufiger auftretenden Seiches geachtet, da bei den selten auftretenden Seiches oft wochenlange Aufzeichnungen hätten umsonst sein

können. Häufig wurden nach der Kontrolle der Apparate noch gleichzeitige Aufzeichnungen an korrespondieren Punkten mit dem Zeigerlimnimeter gemacht und auch diese beim Vergleich der Phasen und Amplituden der Seiches, wie sie in dem Ergebnisse in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind, benützt. In den Tabellen selbst steht unter „T“ die aus dem betreffenden Limnogramme gemessene Dauer der Seiches in Minuten. Ist die Rubrik freigelassen, so konnte die Schwingung an dieser Stelle wohl beobachtet, aber mit ihrer Dauer nicht gemessen werden. Unter „n“ steht die Anzahl der Schwingungen der längsten dort aufgetretenen Reihe. Unter „Auftreten“ ist angegeben, wie oft die Schwingung gefunden wurde; unter „a“ steht die größte dort gemessene Amplitude in Millimetern, unter Vergleichsstation der Ort, mit welchem die Amplituden und Phasen der betreffenden Schwingungen verglichen wurden; unter „V“ das Amplitudenverhältnis des Beobachtungsortes und des Vergleichspunktes in Prozenten, wobei das zugefügte Zeichen die Phase der Schwingung angibt und zwar das „+“ Zeichen die gleiche und das „—“ Zeichen die entgegengesetzte Phase. Die Nummern der Stationen geben an, in welcher Reihenfolge dieselben verwendet wurden; mit diesen Nummern sind sie auch in die Karte eingetragen (siehe Tafel II).

Die Beobachtungsergebnisse an den Zwischenpunkten.

Station	Nr.	Periode	T in Min	n	Auftreten	a	Vergleichsstation	V	Bemerkungen
9. Ringgang Nord,	1	41 Min.-S.	42,3	18	immer	32	Schafwaschen	+ 78	
am inneren Ende	2	36 „	36,5	14	2 mal	10	„	+ (70)*	*Schätzung.
des Ringganges	3	28½ „	28,55	12	öfters	19	„	+ 42*	*ganz unerwartet.
vom 22.—25. 5. 04.	4	8 „	8,30	12	2 mal	2	„		in Schafwaschen nicht.
bedient v. B. Mayer.									
10. Harras, am Ende	1	41 „			selten	10	„	+ 30	
des 200 m langen	2	28½ „	28,7	15	sehr oft	50	„	— 100	
Ufervorsprunges;	3	18 „	18,00	16	häufig	10	„	+	Schwebungen.
vom 17.—22. 8. 04.	4	16 „	15,60	25	sehr häufig	30	Seebruck	— 100	
	5	8 „	17,91	10	häufig	30	„	(+ 100)	kurze Schwebungen mit 6.
	6	7 „	17,41	8	3 mal	10	—	—	
11. Stock, 300 m	1	41 „			häufig	4	Schafwaschen	+ 40	
nördlich Stock 4;	2	28½ „	28,4	24	sehr häufig	10	„	— 75	
vom 14.—17. 8. 04.	3	18 „		10	öfters	5	„	(?)* 100	Zeitmarke nicht genau.
	4	16 „			1 mal	2	„		Schafwaschen nicht.
	5	9½ „	9,8	37	häufig	3	„		„ „
12. Osternach, 1 km	1	41 „		12	„	15	„	+ 59	
nördlich Stock 1	2	28½ „	28,67	24		10	„	— 38	
v. 22. 8.—2. 9. 04.	3	18 „	18,2	20	„	5	„	— 100	
		16 „			nicht				also Knoten.
	4	14	10,40	16	1 mal	4	„		Schafwaschen Störung.
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	„		nicht

13. Ringgang Süd,	1	41 Min.-S.	40,60	12	immer	14	Schafwaschen	+ 65	hier reine Sinuskurve.
am äußeren Ende	2	36 „	36,00	14	2 mal	2	„		Schafw. nicht zu erkennen.
des Ringganges:		28½ „			nicht		„ 30 mm		also Knoten.
vom 6.—9. 9. 04.	3	18 „			1 mal	1	Seebruck	— 25	
	4	16 „	15,68	6	„	1	„	(?) 15	
	5	11 „	10,72	17	„	2	Schafwaschen	—	
	6	9½ „ ?	9,90	14	häufig	3	„		Schafwaschen nicht.
	7	8 „	8,30	7	1 mal	1			Schwebung mit 9½ Min.
14. Kailbach, am	1	41 „			selten	5	„	+ 25	
Ende des gleich-	2	28½ „	28,54	24	häufig	25	„	— 56	
namigen Winkels:	3	18 „	18,04	50	immer	22	Mühlen	+ 150	schöne Reihen.
vom 9.—25. 9. 04.		16 „			nicht				
	4	12½ „	12,4	18	öfters	5	Feldwies*	+ 40	*Beobachtung 1902.
15. Herreninsel		41 „			nicht		Schafwaschen 52 mm		
Nordspitze,	1	28½ „	28,51	30	häufig	12	„	— 60	
100 m südlich der	2	18 „	18,20	25	sehr häufig	16	„	— ( )	
Kapelle; vom 25. 9.							Kailbach	+ 57	
bis 1. 10.; bedient	3	16 „	15,80	16	öfters	4	Seebruck*	— 20	*Pegeldiagramm.
vom K. Bauführer	4	8 „	8,2	13	selten	2			
Maurer.	5	5½ „	5,5	6	2 mal	1			
16. Herreninsel									
Südostspitze,		41 „			nicht		Schafw. 130 mm		also Knoten.
an der Westseite	1	28½ „			4 mal	12	„	— 37	
der Landzunge;	2	18 „	18,00	80	immer	18	Felden*	+ 140	*Zeigerlimnimeter.
vom 1.—10. 10. 04;		16 „			nicht		Seebruck* 20 mm		*Pegeldiagramm.
bedient von Bau-	3	5½ „	5,48	20	häufig	10			
führer Maurer.									
17. Fraueninsel,	1	41 „	40,20	6	1 mal	2	Schafwaschen	— 5	Schafwaschen 36 mm.
an der Mitte des		28½ „			nicht		„		„ 35 „
Ostufers; vom 13.	2	18 „	17,8	10	öfters	4	Herreninsel Süd*	+ ( )	*Zeigerlimnimeter.
bis 20. 10. 04; be-							Fraueninsel West*	+ 100	
dient von Ober-	3	16 „	15,45	20	sehr häufig	9	Seebruck*	— 45	*Pegeldiagramm.
fischer Marx.	4	8 „	8,2	15	selten	3			
	5	7 „	7,10	8	„	1			

18. Seebruck (Station II). Nach den Beobachtungen an den Zwischenpunkten wurde das transportable Limnimeter am 20. Oktober 04 nach Seebruck gebracht und zuerst etwa 100 m östlich des früheren Beobachtungspunktes aufgestellt. Es sollten hier die Dauer und Häufigkeit der Schwingungen des Weitsees nach der Tieferlegung beobachtet werden. Aus den früheren Beobachtungen war erwiesen, daß an diesem Punkte alle Seiches des Weitsees mit größerer Amplitude auftreten. Das Limnogramm war wieder meistens sehr kompliziert; doch traten wie in den Vorjahren auch diesmal sämtliche Seiches zeitweise in einfacheren Kurven deutlich genug auf, um ihre Dauer daraus messen zu können. Außerdem sollten hier die Seeschwankungen des Sees für die Untersuchung der Ursachen den Winter über beobachtet werden; da die Schafwaschener Bucht sich jeden Winter und frühzeitig schon mit Eis bedeckt, der See in Seebruck, am Ausflusse aber immer eisfrei bleibt, war die Registrierung des Wasserstandes im Winter nur hier möglich. Herr Oberauer, der auch den registrierenden Alzpegel bedient, übernahm wieder die Überwachung des Instrumentes. Derselbe nahm auch selbständig zweimal eine Versetzung des Limnimeters vor, nachdem eine solche durch die Änderungen des Wasserstandes notwendig geworden war. Das Instrument funktionierte hier ununterbrochen bis 8. April 1905. In folgender Tabelle sind die Beobachtungen zusammengestellt. Da keine Vergleichsbeobachtungen in dieser Zeit vorliegen, sind hier statt der früheren Rubriken nur die gemessene mittlere Dauer „T" der betreffenden Seiche, die größte Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen „n", die Häufigkeit und die größte Amplitude „a" angefügt.

Die Beobachtungen in Seebruck in den Jahren 1904/05.

Nr.	1904/05					1902/03			
	Seiche	T in Min.	n	Auftreten	a	T	n	Auftreten	a
1	41 Min.-S.	41,00	10	selten	10	42,68	8	selten	7
2	$28^{1}/_{2}$ „	28,5	6	„	15	28,99	8	„	9
3	18 „	18,00	33	öfters	30	18,19	25	öfters	37
4	16 „	15,40	60	immer	100	15,8	50	immer	40
5	11 „	—		nie		10,75	46	sehr häufig	123
6	$9^{1}/_{2}$ „	9,50	12	öfter	15	9,49	18	selten	10
7	8 „	8,34	69	sehr häufig	25	8,22	20	häufig	8
8	7 „	7,20	38	häufig	30	7,01	31	„	50
9	$6^{1}/_{2}$ „	6,50	20	selten	10	—		nie	
10	5,7 „	5,70	15	„	5	—		nie	
11	5 „	—		nie		5,00	12	selten	4
12	4 „			selten		4.12	72	öfters	15
13	3 „	—		nie		3,00	30	häufig	25

Die zum Teil sehr merklichen Änderungen der Schwingungsdauer der Seiches und der Häufigkeit ihres Auftretens infolge der Tieferlegung können wir erst nach der Feststellung der Schwingungsachse und der Schwingungsbäuche und Knoten der einzelnen Seiches näher besprechen.

II. Die Schwingungsformen des Chiemsees.

1. Die 41, 36 und 54 Min.-Seiche.

Die Amplitudenverhältnisse, welche aus den mittleren Amplituden möglichst deutlicher Schwingungsreihen an zwei verschiedenen Stationen gebildet wurden und die in obigen Tabellen bereits mitgeteilt sind, wurden für die häufiger auftretenden Seiches in die beiliegende Karte auf Tafel III Fig. 1 bis 5 eingetragen. Die Amplitude an einem Ende der Schwingungsachse ist dabei = 100 gesetzt. Die eingefügten Zeichen (+ und —) geben die Schwingungsphasen an den betreffenden Punkten an; dieselben wurden in den See selbst eingetragen und zwar so, daß ihre Dichtigkeit ein Bild der Größe der

Amplitude gewähren kann. Die (+ und —) Zeichen sind dabei in Reihen senkrecht zur horizontalen Wasserbewegung, also senkrecht zur Schwingungsachse angeordnet. Die Knotenlinien sind durch stark ausgezogene Linien angedeutet. Die Amplituden Verhältnisse selbst können natürlich keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, da die Amplituden zweier Punkte nach der Theorie nicht einmal in ganz regelmäßigen Seebecken in konstantem Verhältnisse stehen. Doch gibt die gewonnene Verhältniszahl einen guten Anhalt, um auf die Entfernung des betreffenden Punktes von der Knotenlinie zu schließen.

Die 41 Min.-Seiche ist nach dieser Zusammenstellung auf Taf. III Fig. 1 die uninodale Längsschwingung des Chiemsees mit der Schwingungsachse Schafwaschen-Seebruck. Die Knotenlinie geht durch die Südspitze der Herreninsel gegen Mühlen zu. Die Kommunikation nördlich der Herreninsel nimmt ebenfalls an der Schwingung teil, wie die Beobachtungen an der Nordspitze der Herreninsel und in Kailbach ergeben haben. Dabei hat Schafwaschen die sechsfache Amplitude von Seebruck, wie schon früher hervorgehoben wurde (s. P. I, S. 48). Das Amplitudenverhältnis nähert sich nach den neuen Ergebnissen noch mehr dem umgekehrten Verhältnis der beiden Seeflächen, wie sie durch die Knotenlinie voneinander getrennt werden, weil der größere Teil des Mühlener Winkels noch zum östlichen Teile kommt. Das Verhältnis ist das größte bis jetzt an Seen beobachtete. Daß die Fraueninsel die Amplitude — 5 hat, während das von der Knotenlinie entferntere Hagenau und Gstad 0 haben, läßt vielleicht schließen, daß an den seichten Ufern die Amplituden geringer sind als in der Mitte des Sees; dies wäre eine Bestätigung der Vermutung, wie sie Chrystal und Maclagan-Wedderburn auf Grund theoretischer Betrachtungen ausgesprochen haben.[1])

[1]) Chrystal and Maclagan Wedderburn „Calculation of the periods and nodes of lochs Earn and Treig, from the bathymetric data of the scottish Lake-Survey. Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh 41. 311 [illegible]

Die 36 Min.-Seiche (frühere 37 ½ Min.-Seiche) war bei den ersten Untersuchungen nur in dem Schafwaschener Limnogramme und da nur in der Höchstzahl von neun aufeinanderfolgenden Schwingungen beobachtet worden. Nun liegen neue Beobachtungen von dieser Seiche am Ein- und Ausgang des Rinnganges vor. Dort ist sie häufiger und deutlicher zu erkennen, weil die 29 ½ Min.-Seiche speziell am Ausgang ganz fehlt und die 41 Min.-Seiche kleinere Amplituden als in Schafwaschen hat. Da die Amplitude der 36 Min.-Seiche am Rinngang kleiner ist als in Schafwaschen und die Schwingung an beiden Punkten gleiche Phase hat, ist sie gegen Schafwaschen und nicht gegen Kailbach gerichtet, wie früher vermutet (s. P. I, S. 64). Auch die Beobachtung im Kailbachwinkel bestätigt dies, da die Seiche dort nie aus dem Limnogramme herauszufinden ist, wo sie doch die größte Amplitude hätte haben müssen. Daß sie im Weitsee aus den Aufzeichnungen der Limnimeter nicht herausgefunden werden konnte, erklärt sich aus dem nämlichen Grunde, warum die 41 Min.-Seiche dort so lange nicht nachzuweisen war; sie muß eben dort gemäß dem Verhältnisse der größeren schwingenden Flächen eine bedeutend kleinere Amplitude haben als in Schafwaschen, wo dazu die Amplitude der 36 Min.-Seiche selbst nie bedeutend war. Eine günstige Beobachtung bei den Vorversuchen im Jahre 1901 aber verzeichnet in Chieming einen symmetrischen Kurvenzug von genau 36 Min.-Dauer mit nur 1 ¼ mm Amplitude; die Beobachtung dauerte 52 Min., so daß nur ein ganzer Kurvenzug vorliegt. Aus den früher erwähnten Gründen (S. 307) darf man in nur einem solchen symmetrischen Kurvenzuge eine eigene Schwingung des Sees erblicken. Die Beobachtungen deuten also darauf hin, daß wir in der 36 Min.-Seiche eine uninodale Schwingung Schafwaschen—Südufer—Chieming gefunden haben, wenn die Wassermasse nur südlich der Herreninsel schwingt, wofür wir weiter unten an der Hand der Theorie noch eine Bestätigung finden werden.

Die 54 Min.-Seiche konnte nur aus den früheren Limno-

grammen herausgefunden werden und da nur bei hohem Wasserstande (über 80 cm H. P.). Da die Schwingung in der Zeit, wo Zwischenbeobachtungen gemacht wurden, nämlich seit 20. Juni 1902 überhaupt nicht mehr oder nur in 1 bis 2 Schwingungen von wenigen Millimetern Amplitude aufgetreten ist — es blieb eben der Wasserstand immer unter 80 cm —, so liegen für diese Seiche keine Vergleichsbeobachtungen vor und es können solche wohl kaum mehr beschafft werden, da der See wohl nie mehr längere Zeit einen so hohen Wasserstand erreichen dürfte. Dennoch glaube ich mit großer Wahrscheinlichkeit in der 54 Min.-Seiche eine uninodale Schwingung in der Richtung Schafwaschen — Nordufer der Herreninsel — Chieming gefunden zu haben. Als Seiche längs der größten Achse haben wir nämlich schon die 41 Min.-Seiche durch direkte Beobachtung nachweisen können. Eine Schwingung erhält nach Chrystal[1]) aber eine verhältnismäßig große Periode, wenn das Becken am Knoten konvex ist. Und bei Urfahren erhebt sich der Seeboden bis 12 m unter Wasser und gleichzeitig findet sich hier eine starke Einschnürung des Sees mit einer Breite von 500 m. Ein Beispiel einer ungewöhnlichen Periodenverlängerung durch die ganz gleichen Umstände habe ich am Wagingersee gefunden, wo die Hauptschwingung bei einer Seelänge von nur 11 km eine Dauer von 62 Min. hat.[2]) Auch der Umstand, daß die Seiche von 54 Min. nur bei hohem Wasserstand auftrat, spricht für die Annahme. Bei Hochwasser nämlich ist der Querschnitt des Sees an der Stelle Urfahren — Herreninsel ungefähr 500 m breit und hat dann bei einer mittleren Tiefe von rund 4 m eine Fläche von rund 2000 m². Bei den flachen Ufern nimmt aber die Breite des Querschnittes mit dem Wasserstande rasch ab; sie beträgt nach meinen Schätzungen bei dem jetzigen Mittelwasser nur noch rund 400 m, so daß der Querschnitt

---

[1]) Chrystal, H. T. S. zitiert S. 307.

[2]) A. Endrös, Die Seiches des Waginger—Tachingersees; diese Sitzungsberichte Bd. 35. 1905, H. III, S. 447.

bei einer mittleren Tiefe von $2^1/_2$ m nur mehr 50 % des vorigen, nämlich 1000 m² ausmacht. Die Periode muß sich nach Chrystal mit der Verkleinerung des Querschnitts bedeutend verlängern und die Dämpfung noch stärker werden, als sie an sich schon ist. In der Tat finden sich nur mehr 1 bis 2 Kurvenzüge vor. Ein weiterer Umstand spricht für obige Annahme, nämlich daß die Schwingung nur bei plötzlichem Nachlassen des reinen Ostwindes zweimal in Reihen bis zu sechs Schwingungen aufgetreten ist. Auf die Stichhaltigkeit dieses Argumentes möchte ich aber erst bei Besprechung der Ursachen der Seiches näher zurückkommen.

Wir haben sonach am Chiemsee das merkwürdige Ergebnis, daß der See drei uninodale Seiches verschiedener Dauer hat, wovon alle drei ein Ende der Schwingungsachse, nämlich das westliche, gemeinsam haben; während das östliche Ende der einen, der 41 Min.-Seiche, am Nordende, in Seebruck, sich befindet, schwingen sehr wahrscheinlich die beiden anderen gegen Chieming. Dies Ergebnis entspricht ganz der Oberflächen- und Beckenform des Sees, bei der Chieming als Ende einer Seeachse ebenso in Betracht kommt wie Seebruck; die Geographen haben in der Tat auch zum größten Teile die Länge des Sees von Schafwaschen nach Chieming oder Grabenstädt hin gemessen,[1]) obwohl die Entfernung Irschner Winkel—Seebruck etwa 500 m länger ist. Die Teilung des Beckens durch die Herreninsel schafft dazu zwei Wege für die sich bei der Seichesbewegung west- und wieder ostwärts bewegenden Wassermassen, welche wegen der verschiedenen Tiefe Perioden von verschiedener Dauer bedingen. Schwingt das Wasser überwiegend in dem nördlichen Rinnsale, so haben wir die 54 Min.-Seiche, im anderen Falle die 36 Min.-Seiche. Jedenfalls stören sich die beiden Schwingungen gegenseitig, worin wohl auch ein Grund für das seltene und kurze Auftreten der einen wie der anderen zu suchen ist. In der Seichesliteratur haben wir schon ein Beispiel für zwei

[1]) E. Bayberger, Der Chiemsee, S. 8 zit. S. 298.

uninodale Längsschwingungen, nämlich am Neuenburgersee.[1]) E. Sarasin, der die größeren Schweizer Seen auf ihre Seiches untersucht hat, wählte eigens diesen See wegen seiner ausgesprochenen Längsrichtung und regelmäßigen Umrißform und erwartete dort dementsprechend regelmäßige Schwingungsverhältnisse zu finden. Die Untersuchung aber ergab ganz unregelmäßige Seiches, unter welchen eine Schwingung von 50 Min. und eine zweite von 39,5 Min., aber nur in Reihen von höchstens 5 bis 10 Schwingungen zu messen waren. Am Neuenburgersee teilt nämlich ein unterseeischer Rücken, der sich stellenweise bis 8 Meter unter Wasser erhebt, das Becken in zwei Rinnen, wovon die westliche in der Mitte eine größte Tiefe von 153 m, die östliche aber nur von 94 m erreicht. Die Eigenschwingungen der beiden Teilbecken müssen deshalb verschiedene Dauer haben und stören sich auch gegenseitig, wie Sarasin selbst erwähnt. Die 39,5 Min.-Seiche ist sehr wahrscheinlich die uninodale Seiche der westlichen und die 50 Min.-Seiche diejenige der östlichen Rinne, worauf Forel ausdrücklich aufmerksam macht.[2]) Am Chiemsee sind die Umstände für zwei Schwingungen verschiedener Dauer noch günstiger, da hier der trennende Rücken als Insel sich noch über den Wasserspiegel erhebt.

2. Die uninodalen Seiches und die Theorie.

Die P. Du Boyssche Methode der Berechnung der Perioden einknotiger Seiches hatte speziell für den Chiemsee einen mit der Beobachtung sehr befriedigend übereinstimmenden Wert ergeben. Die Dauer der Hauptschwingung war bei Mittelwasser vor der Tieferlegung zu 42,68 Min.[3]) beobachtet und zu 42,22 Min. berechnet worden

[1]) Ed. Sarasin, Les Seiches du Lac de Neuchâtel, Arch. de Genève 1896.

[2]) Forel, Le Léman II, S. 158.

[3]) Bei den folgenden theoretischen Betrachtungen sind zunächst nur die Mittelwerte des früheren Wasserstandes und die früheren Tiefen benutzt.

(P. I, S. 59), welcher Wert sich mit Benützung der neuen Lotungen zu 43,0 Min. erhöht und der damaligen Beobachtung also noch näher kommt. Seit dem hat nun Chrystal eine neue exakte Theorie der Seiches veröffentlicht.[1] Die neue Theorie hat bereits am Loch Earn und Treig[2] sehr befriedigende Resultate geliefert und zwar nicht nur für die uninodalen, sondern auch für die mehrknotigen Seiches, bei welchen die Du Boyssche Theorie vollständig versagt hatte. Auch die Ergebnisse am Waginger-Tachingersee[3] wurden nur durch die Chrystalsche Theorie verständlich.

Obwohl nun der Chiemsee schon im voraus zu einer exakten Behandlung nach der Chrystalschen Theorie nicht geeignet sich erweist, da er sehr rasche Querschnittsänderungen besitzt und dazu eine große Breitenentwicklung gegenüber seiner Längenausdehnung hat, habe ich dennoch die Normalkurve des Sees längs der Achse der 41 Min.-Seiche gezeichnet, welche auf Taf. II links oben mitgeteilt ist. Dazu wurden 18 Querschnitte senkrecht zum erwähnten Talwege Seebruck-Südufer-Schafwaschen gelegt, wie sie in der Karte auf Taf. II angedeutet und numeriert sind. Dieselben wurden in vergrößertem Maßstabe gezeichnet, ihre Flächeninhalte gemessen, mit der Oberflächenbreite multipliziert und als Ordinaten in die Kurve eingetragen, deren Abszissen die Seeflächen von Seebruck bis zu dem betreffenden Querschnitte sind. Im Maßstab der Ordinaten ist 1 mm = 10^7 m³ und dem der Abszissen 1 mm = 50^3 m².

Eine besondere Schwierigkeit bei Aufstellung der Normalkurve bieten an unregelmäßigen Seen und besonders am Chiemsee die Verzweigungen des Talweges. So laufen vom tiefsten Punkte des Weitsees aus eine Rinne gegen Seebruck-Ost, eine zweite gegen Seebruck-West, eine dritte gegen Mühlen, eine vierte gegen Grabenstädt und eine fünfte gegen Chieming.

---

[1] Chrystal, H. T. S., zit. S. 307.

[2] Chrystal and E. Maclagan-Wedderburn, Calculation, zit. S. 320.

[3] Endrös, Die Seiches des Waginger-Tachingersees; diese Zeitschrift 35, 1905 H. III, S. 460.

Doch ist für die 41 Min.-Seiche auf Grund der zahlreichen Beobachtungen ein Zweifel über die Richtung des Talweges ist ausgeschlossen.

Aus der so erhaltenen Normalkurve treten ganz deutlich die vier plötzlichen Querschnittsänderungen bei Punkt 9, 12, 15 und 17 hervor. Dieselben üben jedenfalls auf die Dauer der einzelnen Schwingungen je nach der Entfernung der betreffenden Einschnürungen von den Knotenlinien einen bedeutenden Einfluß aus. Außerdem verursachen sie sehr wahrscheinlich die Instabilität mancher Schwingungen, deren Knoten in die Nähe dieser Seestellen fallen, ohne mit denselben ganz zusammenzufallen. Auf die Dauer der 41 Min.-Seiche übt wohl besonders die konvexe Stelle bei Punkt 12 der Normalkurve eine verlängernde Wirkung aus, da der Knoten dieser Schwingung dorthin fällt. Eine exakte Berechnung der Seichenkonstanten, welche auch an der vorliegenden Kurve trotz der Einengungen durch Annähern an Stücke von Parabeln und gerade Linien nach Chrystal vorgenommen werden könnte, kann aber aus einem weiteren Grunde keine brauchbare Annäherung liefern. Die Koordinaten des Kurvenzuges im Inselsee sind gegenüber denjenigen für den Weitsee verschwindend klein und ihre Verhältnisse gehen in die zur Auswertung der Seicheskonstanten vorzunehmenden Rechnungen ein.

Da man also am Chiemsee auf die Anwendung der exakten Theorie verzichten muß, ist man auf Annäherungsformeln angewiesen und da gerade hier die P. Du Boyssche Theorie einen so gut übereinstimmenden Wert für die Dauer der 41 Min.-Seiche geliefert hat, möchte ich im folgenden an der Hand der Chrystalschen Theorie kurz untersuchen, für welche Beckenformen die genannte Formel brauchbare Werte für die uninodale Schwingungsdauer ergibt.

P. Du Boys gelangte, wie Chrystal durch seine neue Theorie uns lehrt, durch ungenaue Anwendung der Theorie fortschreitender Wellen, sogenannter „Einzelwellen", auf die stehenden Wellen zu der Formel: $T = 2\int_0^l \frac{dl}{\sqrt{g\,h}}$, wobei T die

Dauer der uninodalen Seiche eines Becken von der Länge l und der veränderlichen Tiefe h bedeutet. Die Integration ist dabei längs der Linie der größten Tiefe vorzunehmen. Die Unzulänglichkeit dieser Formel ist besonders deutlich ersichtlich bei der Anwendung derselben auf vier verschiedene Chrystalsche Seentypen, nämlich auf einen See mit symmetrisch parabolischem Längsschnitt und einen solchen mit halb parabolischen, von denen also ersterer seine größte Tiefe in der Mitte und letzterer an einem Ende der Längsachse hat, ferner auf einen See, dessen Längsschnitt aus zwei symmetrisch gegen die tiefste Stelle geneigten Geraden besteht und einen derartigen, dessen Längsschnitt eine einzige, gegen die am Seende befindliche größte Tiefe geneigte, gerade Linie ist. Die vier Seen sollen sämtliche die gleiche Länge „l“ und dieselbe Maximaltiefe „h“ besitzen und außerdem konstante Breite und überall rechteckigen Querschnitt haben. Die Gleichung zwischen der veränderlichen Tiefe h und der Länge x hat bei den beiden erstgenannten, den parabolischen Schnitten, die Form:

$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und bei den geradlinigen die Form:

$$y = h\,\frac{x}{a},$$

wobei a bei den symmetrischen Seen $= \frac{l}{2}$, der halben Seelänge, und bei den asymmetrischen $= l$, der ganzen Seelänge ist. Die Integration ergibt für beide parabolischen Kurven:

$$T = \frac{\pi\, l}{\sqrt{g\, h}}$$

und für beide geradlinigen:

$$T = \frac{4\, l}{\sqrt{g\, h}} = 1{,}27\,\frac{\pi\, l}{\sqrt{g\, h}}.$$

Der Übersicht halber stelle ich in folgender Tabelle d
nach Du Boys berechnete Dauer mit der von Chrystal na
seiner exakten Theorie berechneten zusammen und füge in d
letzten Rubrik die Abweichung der Du Boysschen Dauer
Prozenten „$d\, T_B$" an:

Form des Längsschnittes	T nach Du Boys	T nach Chrystal	$d\, T_B$ in
1. Parabolisch	$1{,}00 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$	$0{,}70 \frac{\pi l}{\sqrt{g h}}$	+ 43
2. Halbparabolisch	1,00 „	0,82 „	+ 2
3. Symmetrisch geradlinig	1,27 „	0,83 „	+ 6
4. Geradlinig	1,27 „	1,05 „	+ 2

Aus der Tabelle ersieht man zunächst deutlich, daß d
uninodale Schwingungsdauer für alle vier Seentypen na
P. Du Boys zu groß wird und zwar bei symmetrisch
Seen viel mehr als bei asymmetrischen. Ferner soll na
P. Du Boys ein symmetrisch parabolischer See dieselbe Da
haben wie ein halb parabolischer und ein symmetrisch ger
liniger die gleiche wie ein geradliniger. Die P. Du Boys
Formel nimmt eben keine Rücksicht auf die Lage
Knotens in Bezug auf die größte Tiefe. Chrystal ma
uns die Schwingungsverhältnisse verständlich durch das Bei
einer vertikal gespannten schwingenden Saite, wobei
Längs- und Querbewegungen zu vertauschen sind. W
lich eine Saite mit der geringsten Dichtigkeit in der Mitte
kleinere Schwingungsdauer besitzen muß als eine gleich
deren geringste Dichtigkeit am Ende ist, so muß ein Se
der größten Tiefe in der Mitte auch eine kleinere
Schwingungsdauer haben als ein solcher, der seine größte T
am Ende hat. Die beiden Schwingungsvorgänge stimmen w
der Analogie der ihnen zugrunde liegenden Differentialg
chungen vollständig überein.

Aus obigen Betrachtungen lernen wir den Grund ken
warum die P. Du Boyssche Formel gerade für die Ha

schwingung des Chiemsees eine so gute Annäherung ergibt. Der Chiemsee, der ein vollständig konkaver See ist, hat nämlich eine zu große Schwingungsdauer im Verhältnis zu seiner Länge und Tiefe, weil der Knoten nicht an die tiefste Stelle des Sees fällt, sondern im seichten Inselsee liegt und dazu noch mit einer plötzlichen Beckeneinengung zusammenfällt. Letztere bewirkt ebenso wie die geringe Tiefe eine Verlängerung der Periode, wie ich besonders am Waginger-Tachingersee gefunden habe.[1] Zum Vergleiche möchte ich hier die Abweichungen der nach P. Du Boys berechneten Dauer von der beobachteten für eine Anzahl von Seen anfügen. Dieselbe beträgt am Chiemsee + 1%*,[2] am Vierwaldstättersee + 2%*, am Genfersee ebenfalls + 2%,[3] am Loch Treig + 12%,[4] am Madüsee + 17%*, am Starnbergersee + 18%*, am Loch Earn + 22%,[4] am Bodensee + 23%*, am Wagingersee + 31%* der beobachteten Dauer. Wie für den Chiemsee, so gibt also auch für den Genfer- und Vierwaldstättersee die P. Du Boyssche Formel sehr angenäherte Werte für die Periodendauer der uninodalen Seiches. In allen drei Seen ist eben der Knoten gegen das seichtere Ende des Sees hin verschoben und fällt dazu an eine plötzliche, starke Einschnürung des Beckens. Die Dauer wird durch beide Umstände so verlängert, daß sie der sonst bedeutend zu großen Dauer nach P. Du Boys sich nähert. Die Dauer nach Du Boys weicht aber um so mehr ab, je näher der Knoten der tiefsten Stelle des Sees zu liegen kommt, wie beim Loch Earn, beim Bodensee und Wagingersee. Somit ist auch durch die Ergebnisse an den bereits untersuchten Seen bestätigt, daß die P. Du Boyssche Formel in konkaven, stark asymetrischen Seen eine gute erste Annäherung für die Periode der uninodalen Seiche eines Sees ergibt, daß aber dieselbe um so stärker abweicht, je näher der Knoten der tiefsten Stelle eines Sees liegt.

---

[1] A. Endrös, Die Seiches des Waginger-Tachingersees, zit. S. 322.

[2] Die mit * bezeichneten Zahlenangaben habe ich selbst berechnet.

[3] Forel, Le Léman II S. 124.

[4] Chrystal und Maclagan-Wedderburn, Calculation, zit. S. 320.

Da die Beckenverhältnisse für die 36 Min.-Seiche des Chiemsees in der Richtung Schafwaschen-Südufer-Chieming ganz ähnliche wie bei der 41 Min.-Seiche sind, dürfen wir auch zur Berechnung dieser Schwingungsdauer die P. Du Boyssche Formel benützen. Die Berechnung ergibt in der genannten Richtung 38,2 Min., also einen Wert, der mit dem bei früherem Mittelwasser beobachteten von $37\frac{1}{2}$ Min. auf $+3\%$ übereinstimmt. Wir dürfen daher in dieser guten Übereinstimmung eine Bestätigung unserer Deutung der Beobachtungsergebnisse erblicken.

Wenden wir zur Berechnung der Dauer der 54 Min.-Seiche die Du Boyssche Theorie an, so erhalten wir in der Richtung Chieming-Urfahren-Schafwaschen 36,1 Min. Die Dauer bleibt also bedeutend unter dem beobachteten Werte und zwar um 33%. Das Gleiche konnte ich bei der Hauptseiche des Waginger-Tachingersees konstatieren, wo die berechnete Dauer von 36 Min. um 44% unter der beobachteten von 62 Min. zurückbleibt. Ich habe schon oben S. 322 auf die ganz ähnlichen Beckenverhältnisse längs der Schwingungsachsen der beiden Seiches hingewiesen. Der Knoten beider Schwingungen fällt nämlich mit einer seichten und stark eingeengten Seestelle zusammen, so daß die Seen in der Mitte konvex sind, wodurch nach der Chrystalschen Theorie die betreffende Periodendauer stark verlängert wird. Die genannte Theorie gibt nämlich für einen See mit konvexem parabolischen Längsschnitt für

$T = 0{,}61 \dfrac{\pi l}{\sqrt{g h}}$, wobei h die kleinste Tiefe am Scheitel der Parabel ist, und nach P. Du Boys erhält man $0{,}26 \dfrac{\pi l}{\sqrt{g h}}$, also eine Dauer, welche um 55% unter der nach der exakten Theorie berechneten zurückbleibt. Wir sehen sonach, daß auch theoretisch die Schwingung in der angenommenen Richtung möglich ist.

Die Lage der Knoten der uninodalen Seiches kann mit Vorteil nach der Du Boysschen Theorie berechnet werden. Am Wagingersee konnte ich wiederholt auf der

übereinstimmende Ergebnis von Berechnung und Beobachtung hinweisen. Auch der Knoten der 41 Min.-Seiche am Chiemsee fällt nach Berechnung sehr nahe mit dem beobachteten Knoten südöstlich der Herreninsel zusammen. Der Knoten der 36 Min.-Seiche fällt nach Berechnung $1^1/_2$ km westlicher und derjenige der 54 Min.-Seiche in den Mühlener Winkel. Die beiden letzten Knoten konnten aus den schon angegebenen Gründen nicht beobachtet werden.

3. Die Änderungen der Dauer der uninodalen Seiches.

Die Dauer der 41 Min.-Seiche änderte sich am Chiemsee stark mit dem Pegelstande. Da der Unterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Stande 166 cm beträgt, dürfte es von Interesse sein die früheren Beobachtungen mit den neuen zusammenzustellen, was in folgender Tabelle geschehen ist. In der ersten Rubrik steht die Zeit, in welcher die betreffenden Messungen gemacht wurden; in der zweiten der Pegelstand in cm H. P.; in der dritten die Mittelwerte der Dauer in Min., in der vierten abweichende Mittelwerte in der beigefügten Zeit bezw. bei dem angegebenen Pegelstande (vgl. P. I., S. 62).

Die Dauer der 41 Min.-Seiche und der Pegelstand.

Beobachtungszeit	Pegel	T in Min.	Abweichende Mittelwerte
2. 4.—4. 7. 1902	109 bis 86	43,90	zwischen 3. 4. und 2. 5. **44,05** zwischen 24. 5. und 4. 7. 45,75
3. 5.—22. 5. 1902	86 „ 68	43,34	
7. 7.—25. 8. 1902	68 „ 50	42,83	
1. 9.—6. 11. 1902	50 „ 30	43,13	bei Pegel 40 bis 30 : 43,56
9. 11.—11. 1. 1903 28. 4.—9. 5. 1904 25. 5.—8. 6. 1904	30 „ 10	42,15	bei Pegel 22 bis 19 : 40,65
9. 5.—24. 5. 1904 29. 8.—25. 9. 1904	+ 10 „ — 10	41,38	
19. 6.—10. 7. 1904 25. 9.—4. 12. 1904	— 10 „ — 30	41,00	
10. 7.—26. 8. 1904 14. 12.—12. 3. 1905	— 30 „ — 57	39,72	bei Pegel — 40 bis — 50 : **39,34** bei Pegel — 50 bis — 57 : 40,07

Die Dauer der Hauptseiche des Chiemsees hat also von 44,05 Min. bis 39,34 Min., das ist um 11 % **des Mittelwertes abgenommen**, als der Pegelstand von 109 cm bis — 57 cm H. P. zurückging. Die Dauer bei Mittelwasser vor der Tieferlegung war 42,68 Min. und ist jetzt 41,00 Min. Die Abnahme der Dauer bei Abnahme der Tiefe ist, wie früher schon hervorgehoben wurde, auf die starke Abnahme der Achsenlänge in der Schafwaschener Bucht zurückzuführen. Das Ufer läuft dort sehr flach aus, so daß beim Rückgang des Wasserstandes von Pegel 109 bis 68 cm die Achsenlänge um rund 100 m sich verkürzte, das ist um die Breite des früheren Überschwemmungsgebietes. Von Pegel 68 bis ungefähr Pegel — 30 wurde die eigentliche Uferzone, die mit Schilf bewachsen und ungefähr 40 m breit ist, trockengelegt. Die ganze Verkürzung der Länge der Achse beträgt also rund 150 m, das ist aber nur 0,8 % der ganzen Achse. Die Verkürzung der Dauer beträgt aber 11 %, soll jedoch der Theorie nach unter 0,8 % bleiben, da die Abnahme der Tiefe um 166 cm, das sind rund 2 % der größten Tiefe, die Dauer der Theorie nach verlängern muß (l steht linear im Zähler, h in der $\frac{1}{2}$ Potenz im Nenner). Es kann daher nur die Seichtheit dieses freigewordenen Uferstreifens die Dauer so beeinflussen. Wir dürfen daher aus dieser Beobachtung am Chiemsee schließen, daß seichte Ufer auch von geringer Breite die Periodendauer der Seiches verhältnismäßig stark verlängern. W. Halbfaß hat die gleiche Erscheinung am Madüsee beobachtet, wo sich die uninodale Seiche von 35,5 Min. bei einer Zunahme des Wasserstandes um rund 60 cm auf [illegible] verlängerte, das ist um 2,5 %. Die Ufer an den Enden des Sees sind dort ebenfalls sehr flach, so daß die Achse um ungefähr 100 m länger wird, worin auch Halbfaß die Ursache hiefür erblickt (S. 81).

Einzelne scheinbare Abweichungen sind am Chiemsee zu verzeichnen. Während z. B. die Dauer bis zum Pegelstand 50 cm auf 42,83 Min. abgenommen hat, nahm dieselbe zwischen Pegel 40 und 30 cm deutlich bis zum Werte 43,56 Min. zu

welche Beobachtung mit derjenigen in den Vorjahren übereinstimmt. Der Grund ist nur der, daß bei Pegel 50 cm das eigentliche Seebecken, dessen Begrenzung eine rund 20 cm hohe Grasböschung bildet, gerade ausgefüllt war und daß also die Achse sich bis 30 cm Pegel nicht änderte, sondern nur die Tiefe und daher die Dauer zunehmen mußte (s. P. I, S. 62). Das Gleiche wiederholte sich bei Pegel — 40 und — 50 cm. Nach der Zone des Schilfes fällt nämlich das Ufer senkrecht auf eine Tiefe von 60 cm ab und das Wasser war bei Pegel — 50 bis zu dieser Stelle zurückgegangen und die Dauer, welche auf 39,34 Min. im Mittel zurückgegangen war, nahm von Pegel — 50 bis — 57 bis 40,07 Min. wieder zu. In der Veränderung der Dauer spiegelt sich die Terassenform des Ufers wieder. Die früher unter Eis gemessene Dauer endlich stimmt mit den Werten bei Pegel — 30 bis — 40 cm überein, beidesmal beträgt sie rund 41 Min. Die frühere Annahme (s. P. I, S. 64), daß das an das Ufer und das Schilf angefrorene Eis die Seichesbewegungen nicht mitmachen kann, also die Achse um die Breite der Schilfzone verkürzt wird, findet dadurch seine Bestätigung.

Auch die 36 Min.-Seiche hat gegen früher an Dauer abgenommen; da aber die Messungen früher und jetzt nicht genau sind, kann die Abnahme nicht besprochen, ja ihrem ungefähren Betrage nach nicht einmal angegeben werden. Die 54 Min.-Seiche trat nur bei hohem Wasserstande in meßbaren Reihen auf.

4. Die 28½ Min.-Seiche.

In anliegender Kartenskizze Taf. III Fig. 2 seien wieder wie bei der 41 Min.-Seiche die Amplituden und Phasen der 19 Beobachtungspunkte eingetragen.

Die 28½ Min.-Seiche ist also nach den Beobachtungen die binodale Seiche mit der Schwingungsachse Schafwaschen—Chieming. Die eine Knotenlinie verläuft östlich der Fraueninsel in fast nord-südlicher Richtung, die zweite, westliche, liegt am Eingang in

die Schafwaschener Bucht. Der mittlere Schwingungsbauch liegt vor Harras. Die frühere Deutung findet also durch die neuen Beobachtungen ihre Bestätigung. Die Wasserbewegung verzweigt sich hier, so daß die Kommunikationen nördlich und südlich der Herreninsel an der Schwingung teilnehmen und der mittlere Schwingungsbauch scheint da zu liegen, wo die Bewegungen südlich und nördlich der Herreninsel sich treffen. Die 28½ Min.-Seiche ist also eine uninodale Seiche Chieming—Harras, deren Dauer sich wahrscheinlich wenig ändern würde, falls die Schafwaschener Bucht abgesperrt wäre. Die P. Du Boyssche Formel gibt für Chieming—Südufer—Harras rund 23 Min., für Chieming—Nordufer—Harras 24 Min. Die Dauer ist demnach nach Du Boys zu kurz; jedenfalls wirkt die Einengung des Beckens durch die drei Inseln nahe der östlichen Knotenlinie verlängernd auf die Dauer. Die Einengung bei Urfahren dagegen wirkt nicht besonders ein, weil dieselbe ferner dem Knoten liegt.

Die 28½ Min.-Seiche ist ferner uninodale Schwingung Harras-Schafwaschen, deren Knoten durch die neuen Beobachtungen sehr genau an den Eingang in die Schafwaschener Bucht, also an eine starke Beckeneinschnürung fällt. Die P. Du Boyssche Regel ergibt für diese Strecke von 4,8 km Länge rund 15.7 Minuten, bleibt also um 54 % hinter der beobachteten Dauer zurück. Die Schwingung stimmt hierin mit der 54 Min.-Seiche unseres Sees und mit der 62 Min.-Seiche des Waginger-Tachingersees überein. Die Achsenlänge der westlichen Schwingung beträgt also nur 4,8 km gegen diejenige der östlichen von 13 km.

Die 28½ Min.-Seiche ist sonach die binodale Schwingung zu der 36 Min.-Seiche. Das Verhältnis der Dauer der uninodalen und binodalen Seiche erhält hier den ungewöhnlich großen Wert von 1 : 0,77 (37,5 : 28,9). Am Wagingersee, wo das Verhältnis 1 : 0,70 beträgt, habe ich auf die vollständige Unzulänglichkeit der P. Du Boysschen Theorie und die Übereinstimmung des Ergebnisses mit der Chrystalschen Theorie hingewiesen. Ganz dasselbe, was vom Waginger-

see bei der 11,78 Min.-Seiche gesagt wurde, gilt auch vom Chiemsee bei der 28½ Min.-Seiche. Da am Wagingersee die starke Einschnürung bei Horn mit dem nördlichen Knoten der 11,8 Min.-Seiche zusammenfällt, wurde die Dauer derselben so verlängert und, da der westliche Knoten der 28½ Min.-Seiche an den Rinngang und auch der östliche Knoten an die Beckeneinengung durch die drei Inseln fällt, wird die Dauer der binodalen Seiche des Chiemsees noch stärker verlängert.

Sehr lehrreich ist die Zusammenstellung der Periodenverhältnisse von Grund- und erster Oberschwingung der schon oben erwähnten Seen, geordnet nach der Größe dieser Periodenverhältnisse.

Unter T_1 steht hier die Dauer der uninodalen, unter T_2 diejenige der binodalen Seiche in Min. und unter V das Verhältnis in % der uninodalen Periode.

See	T_1 in Min.	T_2 in Min.	V in %
Chiemsee	37,5	28,99	77
Wagingersee	16,80	11,78	70
Starnbergersee	25,0	15,8	63
Chiemsee, Schafwaschner Bucht	6,4	3,8	59
See mit parabolischem Längsschnitt	100	58	58
Madüsee	35,5	20,3	57
Loch Treig	9,18	5,15	56
Loch Earn	14,5	8,10	56
Vierwaldstättersee	14,25	24,25	55
Tachingersee	12,6	6,25	49
Genfersee	73	35,5	48

Der Chiemsee, Wagingersee und Starnbergersee haben der Reihenfolge nach die weitaus größten Verhältnisse. Die anormale Verlängerung der Dauer der binodalen Seiches bei den beiden ersten Seen ist verursacht durch das Zusammenfallen einer bezw. beider Knotenlinien mit starken Beckeneinschnürungen, wie ich es oben und beim

Wagingersee eingehend besprochen habe. Das gleiche scheint auch am Starnbergersee der Fall zu sein, wo die südliche Knotenlinie wahrscheinlich mit der Einschnürung bei Unterzaismering zusammenfällt, wie auch H. **Ebert** schon seinerzeit das damals einzig dastehende, stark abweichende Verhältnis (64) begründet hatte.[1]) Die dortige Einengung ist aber nicht so stark wie am Wagingersee, so daß auch das Verhältnis unter dem am Wagingersee zurückbleibt. Beide letztgenannten Seen haben also ganz ähnliche Beckenform für die uninodale und binodale Schwingungsunterteilung. Einen großen **Gegensatz** bilden aber hier der **Chiemsee** und **Genfersee**; während die Beckenform für die uninodalen Seiches die ganz gleiche ist (vgl. S. 329), ist dieselbe für die binodale Unterteilung so verschieden, daß der Chiemsee an den Anfang der Tabelle und der Genfersee an den Schluß kommt. Während wir nämlich am Chiemsee auch an den Knoten der binodalen Seiche starke Einschnürungen haben, liegen die Knoten derselben am Léman weder an Einengungen des Beckens noch an besonders seichten Stellen, so daß die binodale Seiche mit sonst normaler Dauer unter der Hälfte der anormal großen Dauer der uninodalen Seiche zurückbleibt. Die **Periodenverhältnisse** bei den übrigen Seen nähern sich zum Teil sehr demjenigen von **Chrystal** für rein **parabolische, konkave Seen** berechneten Werte von 58, was mit ihrer regelmäßigen Gestalt auch im Einklang steht. Wir sehen aus den aufgezählten Beispielen, daß auch so **verschiedene Verhältnisse** der Periodendauern von Grund- und erster Oberschwingung, wie sie **Halbfaß** in letzter Zeit übersichtlich zusammengestellt hat,[2]) **vollkommen im Einklange mit der neuen Chrystalschen Theorie stehen.**

Auch die **Dauer der 28½ Min.-Seiche** nimmt nach den neuen Untersuchungen **mit dem Pegelstande ab** (größter

[1]) H. Ebert; diese Berichte 30, 1900 H. III. S. 456.

[2]) W. Halbfaß, Seiches oder stehende Seespiegelschwankungen. Naturw. Wochenschrift von H. Potonié. Berlin 23. Oktober 1904.

Wert 29,00, kleinster 28,10). Die Abnahme beträgt aber nur 3% und führt wegen dieses geringen Betrages nicht zu näheren Erörterungen. Jedenfalls kompensiert die Zunahme der Dauer durch die Querschnittsverkleinerung am Rinngang zum Teil die Abnahme derselben infolge der Achsenverkürzung an dem seichten Schafwaschener Ende. Zu erwähnen ist noch, daß diese Seiche bei mittlerem und niedrigem Wasserstande mit auffallend kleiner Amplitude und selten auftritt, was wahrscheinlich in Knotenverschiebungen infolge der Veränderung des Wasserstandes seinen Grund hat.

5. Die 18 Min.-Seiche und 15½ Min-Seiche.

Bei der 18 Min.-Seiche haben sich, wie schon einleitend erwähnt, einzelne Änderungen gegenüber den früheren Annahmen ergeben. Der Grund war hauptsächlich die Interferenzkurve der Schwebung, an welcher man bei kurzen Beobachtungen die eine mit der anderen verwechseln kann. Die neuen Ergebnisse sind wieder wie bei den vorausgehenden Seiches in Fig. 3 auf Taf. III eingetragen.

Die 18 Min.-Seiche ist darnach die binodale Seiche Seebruck-Kailbach mit der ersten Knotenlinie etwas nördlich Chieming und der zweiten etwas südlich Stock. Infolge der Kommunikation nördlich der Herreninsel erfolgt die Schwingung auch auf diesem Wege und wird dadurch gleichzeitig Querseiche Mühlen-Weitsee. Endlich ist die Seiche infolge der weiteren Beckenunregelmäßigkeit, der Einengung am Rinngange, trinodale Seiche Seebruck-Schafwaschen mit dem dritten Knoten am Rinngang. Die Schafwaschener Bucht schwingt aber nur zeitweise in dem Takte der 18 Min.-Seiche mit, während im benachbarten Kailbach die Schwingung immer und mit größerer Amplitude auftritt. Diese Schwingung zeigt so recht, welche komplizierten Schwingungsverhältnisse in einem so unregelmäßigen Seebecken möglich sind.

Von Osternach bis Schafwaschen fällt also eine ganze uninodale Seiche von 18 Minuten. Es ist an der langen Dauer

eben wieder die Einengung am Rinngang schuld, welche mit dem Knoten zusammenfällt. Das Verhältnis der uninodalen Seiche Seebruck-Schafwaschen zur binodalen ist 1 : 0,43, also wieder verhältnismäßig groß (bei parabolischen Seen ist dasselbe nach Chrystal 1 : 0,41)[1]), ebenfalls nur verursacht durch das Zusammenfallen des dritten Knotens mit dem Rinngange.

Für die 15½ Min.-Seiche stellt die Ergebnisse Fig. [illegible] auf Taf. III dar. Darnach ist diese Schwingung die binodale Seiche in der Richtung Seebruck — Harras mit dem ersten Knoten an dem Ufervorsprung nördlich Chieming, bei Schützing und dem zweiten Knoten an der Südostspitze der Herreninsel, dem Knoten der 41 Min.-Seiche, unterbrochen durch die Herreninsel, gegen den Rinngang hin. Auch hier erfolgt die schwingende Bewegung des Wassers südlich und nördlich um die Herreninsel herum. Der mittlere Schwingungsbauch fällt in die Höhe der Spitze des Achenzipfels, der westliche vor Harras. Da Mühlen eine so große Amplitude hat, fällt sehr wahrscheinlich zwischen Mühlen — Harras eine weitere uninodale Seiche, so daß wir die 15½ Min.-Seiche die dreiknotige Seiche Seebruck — Harras — Mühlen nennen können. Zu beachten ist, daß die Schafwaschener- und Kailbacher-Bucht hiebei nicht mitschwingen, weil die horizontale Wasserbewegung bei dieser Seiche quer zu den Buchten erfolgt. Ein Beispiel hiefür haben wir schon in der Seicheliteratur: am Vierwaldstättersee teilt sich die Querschwingung von rund 18 Min. Dauer in der Richtung Küssnacht — Sandsstadt ebenfalls dem Hauptbecken nicht mit, weil die horizontale Wasserbewegung quer zur Hauptachse erfolgt.

Um die Theorie auch auf ein so kompliziertes Becken anzuwenden, habe ich die Dauer der 15½ Min.-Seiche an der Normalkurve berechnet. Dieselbe läßt sich bis zum Knoten dieser Schwingung bei Stöttham (von Punkt 0 bis [illegible]) angenähert als gerade Linie darstellen. Die Dauer muß daher

---

[1]) Chrystal, H. T. S. Seite 623.

nach Chrystal $T' = \frac{2\pi l}{2{,}405\sqrt{g h}}$ sein, wobei für l die doppelte Seefläche von Seebruck bis zum Knoten und h die Ordinate o der Normalkurve zu setzen ist; es ergeben sich 10,5 Min. In gleicher Weise kann die Dauer der 18 Min.-Seiche aus der Normalkurve bestimmt werden. Die Schwingung ist nämlich die uninodale Seiche Seebruck—Herreninsel Südost, also die uninodale Seiche des Hauptzweiges der Normalkurve von Punkt 0 bis 12. Der Knoten fällt außerdem fast genau in die Mitte dieses Kurvenzuges. Wir können daher diesen Zweig angenähert als Parabel betrachten, deren Scheitelpunkt im Knoten ist. Für die Dauer $T = \frac{\pi l}{\sqrt{2 g h}}$, wobei l die Fläche bis zum Knoten der 41 Min.-Seiche $= 200 \cdot 5^5$ 100 qm und h die Ordinate der Kurve in der Mitte $= 90 \cdot 5^2 \cdot 10^6$ m^3 gesetzt ist, erhält man 15,4 Min. Beide berechneten Werte bleiben also bedeutend unter den beobachteten Dauern und zwar der für die 15½ Min.-Seiche um 32% und der Wert für die 18 Min.-Seiche um 15%. Die Annäherung der Kurve einerseits an eine Gerade andererseits an eine Parabel sind wohl beidesmal nicht genau, aber die Abweichungen sind nicht so groß um diese bedeutenden Beträge, um welche die berechnete Dauer hinter der beobachteten zurückbleibt, verständlich zu machen. Jedenfalls sind die besonderen Verhältnisse des Sees wie die große Breite, die flachen Ufer u. a. die Ursachen der geringen Übereinstimmung.

6. Die Seiches kürzerer Dauer.

Die 8 Min.-Seiche (vgl. Taf. III Fig. 5) ist die nächste Oberschwingung zu der 15½ Min.-Seiche, also die vierknotige Seiche Seebruck — Harras; die erste Knotenlinie befindet sich bei Arlaching, die zweite geht südlich Chieming gegen Gstadt, die vierte läuft von Felden unterbrochen durch die Insel gegen Stock. Beobachtungen zwischen dem Schwingungsbauche bei Feldwies und dem westlichen bei Harras fehlen. Die dritte Knotenlinie läuft zwischen Mühlen und

Gstadt östlich der Herreninsel vorbei gegen Süden. Von besonderem Interesse ist die Schwingung noch deshalb, weil sie bei höherem Wasserstande auch in Schafwaschen aufgetreten ist und mit Seebruck gleiche Phase hatte. Die Eigenschwingung des Schafwaschener Winkels betrug nämlich bei höherem Wasserstande, zwischen 60 und 30 cm H. P. ungefähr 8,10 Min. und die Bucht machte dann die Schwingungen in gleichem Takte mit. Die 8 Min.-Seiche war auf diese Weise zeitweilig die sechsknotige Seiche Seebruck—Schafwaschen, wobei die beiden Kommunikationen südlich und nördlich der Herreninsel an der Schwingung teilnahmen. Diese Schwingung pflanzte sich im Gegensatz zur $15^1/_2$ Min.-Seiche wohl nur deshalb in den Winkel hinein fort, weil ein Schwingungsbauch an den Eingang fällt, während bei der $15^1/_2$ Min.-Seiche ein Knoten in der Nähe des Einganges liegt und die Wasserbewegung quer zum Eingang der Bucht stattfindet. Auch bei niedrigem Wasserstande wurde in Rinngang Süd und Nord die 8,2 Min.-Seiche noch beobachtet, aber in Schafwaschen ist diese Seiche nie mehr verzeichnet.

Die Eigenschwingung der Schafwaschener Bucht hat sich mit dem Wasserstande stark geändert. Bei Pegel 109—80 umfaßte sie : 8,57 Min., von Pegel 60 bis 30 cm : 8,10 Min., von da ab tritt die Schwingung sehr selten auf. Bei Pegel + 15 ist eine Reihe mit 7,15 Min. Dauer zu messen, eine weitere bei Pegel — 17 mit 6,67 Min. Erst bei Pegel — 54 tritt die Seiche wieder häufig und in sehr langen Reihen auf. Die Dauer hat dabei den geringsten Betrag von 6,40 Min. erreicht. Die starke Abnahme um 2,17 Min., das sind 34% der nunmehrigen Dauer, erklärt sich eben aus der Verkürzung der Achse im Schafwaschener Winkel und zwar um den sehr seichten Uferrand. Der Vorgang kann aber nicht in der gleichen Weise wie bei der 41 Min.-Seiche verfolgt werden, weil die Schwingung oft gar nicht zu messen war. Daß sich auch später noch der Schwingungsbauch aus der Bucht in dieselbe hinein verlagerte, sieht man aus der

Limnimeterbeobachtungen am Rinngang sowohl als besonders aus Messungen von Seichesströmungen am Rinngang, bei welchen eine deutliche Periode von 8,2 Min. zu erkennen ist, worüber ich in einer eigenen Schrift Näheres mitteilen werde. Da die Bucht eben nicht mehr abgestimmt ist, schwingt sie nicht mehr mit und die Bewegungen können nur mehr erzwungene Schwingungen sein, wie ich sie am Waginger-Tachingersee beobachtet habe. Die Amplitude derselben ist aber, wie auch die der 17 Min.-Seiche im Tachingersee, nur klein, so daß sie aus dem unruhig verlaufenden Schafwaschener Limnogramme nicht zu erkennen ist.

Eine Seiche von 4 Min. wurde in Seebruck, Feldwies und Felden mit fast genau gleicher Dauer gemessen. Obwohl ein Phasenvergleich wegen der kurzen Periode und der geringen Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen nicht möglich war, so glaube ich dennoch mit großer Wahrscheinlichkeit in ihr die weitere Oberschwingung von der $15\frac{1}{2}$ Min.-Seiche suchen zu dürfen, also die achtknotige Schwingung Seebruck—Harras, da die Schwingung gerade am Ende der Achse der $15\frac{1}{2}$ Min.-Seiche, nämlich in Seebruck, in deren mittleren Schwingungsbauche in Feldwies und deren westlichen Bauche bei Felden gefunden wurde.

Die nur einmal bei sehr niedrigem Wasserstande gemessene Seiche von 3,8 Min. ist sehr wahrscheinlich die binodale Seiche der Schafwaschener Bucht. Es wurde sonst nirgends eine Schwingung von solcher Dauer gemessen. Das Verhältnis der Perioden ist $6{,}4 : 3{,}8 = 1 : 0{,}59$ und entspricht ganz der konkaven Beschaffenheit des Schafwaschener Winkels.

Die 10,7 Min.-Seiche wurde bei den neuen Beobachtungen nur einmal in Osternach und einmal in Schafwaschen gemessen und beide Male bei einem Pegelstande von rund + 15 cm H. P. Da sie besonders in Seebruck nie mehr auftrat, liegen keine weiteren Vergleichsbeobachtungen vor. Eine Durchsicht der früheren Beobachtungen ergab in Gstadt eine Verwechslung der 11 mit der $12\frac{1}{2}$ Min.-Seiche, so daß also Gstadt die Amplitude 0 hat. Außerdem hat die Seiche

am ganzen Ostufer gleiche Phase. Ich halte sie daher für eine Oberschwingung der $28^{1}/_{2}$ Min.-Seiche und zwar für die trinodale Seiche Chieming—Harras. Die besondere Eigentümlichkeit hiebei ist, daß der östliche Schwingungsbauch infolge Verzweigung der Richtung in zwei solche zerfällt und zwar erstreckt sich der eine gegen Seebruck und der zweite gegen Hagenau. Die östliche Knotenlinie muß hiebei vom Achenzipfel gegen Nordosten ausbiegend nach dem Nordwestufer, ungefähr 1,5 km vor Seebruck, verlaufen. Für den Inselsee liegen zu wenig Vergleichsbeobachtungen vor. Nur einmal wurde die Schwingung früher in einer langen Reihe und größerer Amplitude in Schafwaschen beobachtet (s. P. I, Taf. II Fig. 11), dabei hatte sie übereinstimmend mit Seebruck entgegengesetzte Phase. Sie mußte dann, wie schon früher (P. I, S. 53) betont, vierknotige Seiche Seebruck—Schafwaschen gewesen sein. Auch bei dieser Seiche machte also die Bucht die Schwingungsbewegung nur zeitweise mit.

Für die 7 Min.-Seiche liegen nur einzelne Reihen in Harras und an der Fraueninsel vor. Sie konnte früher als dreiknotige Seiche Seebruck—Hagenau festgelegt werden. Nach den neuen Beobachtungen scheint sie auch zeitweise gegen Westen sich fortzusetzen.

Die $12^{1}/_{2}$ Min.-Seiche konnte bei den neuen Untersuchungen nur vereinzelt aus dem Kailbacher Limnogramme gefunden werden, aber mit einer gegen früher sehr kleinen Amplitude. Sie ist, wie schon früher (P. I, S. 55) angegeben werden konnte, sehr wahrscheinlich eine Schwingung Feldwies—Kailbach und zwar eine binodale.

Die übrigen Schwingungen, das sind die $9^{1}/_{2}$ Min.-Seiche, die 6,5 und 5,5 und 5 Min.-Seiche, sind Schwingungen des Weitsees, können aber auch auf Grund der neuen Beobachtungen nach Zahl und Lage der Knoten nicht näher festgelegt werden.

7. Die Einwirkung der Tieferlegung auf die Seiches.

Dadurch daß der Eintritt der Seespiegelsenkung des Sees in die Beobachtungszeit fällt, war, wie schon einleitend erwähnt, Gelegenheit gegeben die Einwirkung derselben auf die Schwingungen des Sees zu untersuchen, also ein Experiment im Großen anzustellen. Es dürfte angebracht sein diese Einwirkungen hier näher zu besprechen.

Die Tieferlegung selbst bestand darin, daß durch Ausbaggern und Regulieren des Seeabflußes, der Alz, alle Wasserstände um rund 70 cm erniedrigt wurden (in Wirklichkeit beträgt die Senkung bei Hochwasser 60 cm und bei Niedrigwasser 80 cm). Die Seetiefen sind also durchweg um diesen Betrag geringer geworden. Durch die große Sommerdürre des Jahres 1904 trat außerdem ein ungewöhnlich tiefer Wasserstand ein, der bis — 59 cm H. P. zurückging. Bei der Flachheit der Ufer änderte sich daher die Seefläche bedeutend. Die Änderungen sind deutlich aus der Karte auf Taf. II zu ersehen, in welche die neue Uferlinie bereits eingezeichnet und die frühere Umrißlinie durch die punktierte Linie angedeutet ist. Bei — 60 cm wurde einmal die Feldwieser-Bucht vollständig und die Hagenauer-Bucht zum großen Teile trocken gelegt. Weiterhin wurden die Einengungen bei Urfahren und am Rinngang bedeutend verstärkt; erstere hatte, wie schon erwähnt, bei Hochwasser von 100 cm H. P. eine Querschnittsfläche von rund 2000 qm und bei — 60 cm H. P. nur mehr rund 1000 qm, letztere eine solche von 2000 qm und dem seichtem Wasserstande nur 1200 qm. Außerdem wurden zwei kleine Inseln östlich der Herreninsel und mehrere größere Landzungen frei, so an der Nordostspitze der Herreninsel und Krautinsel ein Ufervorsprung von 400 m Länge, bei Seebruck ein solcher von rund 300 m; eine neue Halbinsel erstreckt sich bei Harras und eine weitere etwas südlich Harras 200 m weit in den See hinein und nördlich Stock zwei kleinere von 150 bezw. 120 m Länge. Ferner wurde rings um den See und um die Herreninsel ein 50 bis 100 m breiter Rand

trocken gelegt. Endlich ist jetzt der Ausfluß bei Seebruck etwa 200 m weiter in den See hinein verlegt.

Wie man sieht, sind die Veränderungen immerhin bedeutende, so daß eine Einwirkung auf die Schwingungen schon im voraus zu erwarten war. Dieselbe bestand nun einmal in einer Veränderung der Dauer aller Schwingungen. Um dieselbe überblicken zu können, sind die Mittelwerte der Dauer bei dem früheren und jetzigen Mittelwasserstande in der Tabelle S. 319 zusammengestellt. Darnach hat die Dauer bei den Schwingungen von 41, 36, 28½, 18, 15½, 12 und 6.4 Min. abgenommen und bei denjenigen von 9½, 8 und 7 Min. zugenommen. Die Abnahme der Dauer habe ich bei der 41 Min.-Seiche eingehend besprochen: sie ist durch die Verkürzung der Achse um einen seichten Uferstreifen verursacht. Die gleiche Ursache trifft wohl auch bei den übrigen Schwingungen zu. In der Verlängerung der Dauer bei den anderen Seiches dagegen kommt die Tiefenverringerung mehr zum Ausdruck, weil das eine Ende der Achse in Seebruck nicht verkürzt wird und auch das andere Ende wahrscheinlich nicht auf seichtes Ufer ausläuft. Weiterhin treten mehrere Seiches bei tiefem Wasserstande gar nicht mehr auf, wie besonders die 10,7 Min.-Seiche, welche früher eine ständige Schwingung des Weitsees war, ebenso die 5 und 3 Min.-Seiche und die schon erwähnte 54 Min.-Seiche. Andere Seiches treten dagegen neu auf, wie die von 6,5 und 5,7 Min.-Dauer. Wieder andere sind viel seltener zu erkennen, wie die 28½ Min.-Seiche und die 4 Min.-Seiche und endlich mehrere viel häufiger wie die 36 Min.-Seiche und 6,4 Min.-Seiche in Schafwaschen und die 9½ und 8 Min.-Seiche in Seebruck. Wenn sich auch die Ursache der Veränderungen bei den einzelnen Seiches nicht angeben läßt, so verstehen wir doch die Einwirkung im allgemeinen. Durch Trockenlegung der seichten Ufer wird die Dauer so verändert, daß auch die Lage der Knotenlinien stark verschoben wird und dadurch bei der Bodenunregelmäßigkeit eine stärkere Dämpfung oder eine bessere Abstimmung des Seeteiles auf die einzelne Schwingung erzeugt.

Oder es wird die Einengung an bestimmten Punkten so stark, daß die eine oder andere Seiche von der betreffenden Dauer nicht mehr stabil ist. Lehrreich sind hiefür die Untersuchungen am Waginger-Tachingersee, wo keine binodale Seiche des ganzen Beckens wegen der Lage der starken Einschnürung möglich ist und wegen der Einschnürung bei Horn die binodale Schwingung des Wagingersees instabil ist. Auch die Einengung bei Rapperswyl am Zürichersee ist nach Sarasin wohl die Ursache dafür, daß die uninodalen und binodalen Seiches sich so schlecht entwickeln. Diese Ergebnisse machen es verständlich, warum in unregelmäßigen Seebecken nicht alle Seiches jeder Knotenzahl auftreten.

Zusammenstellung der Hauptergebnisse.

Der Chiemsee stellt in der Seichesforschung in gewisser Beziehung ein vollständiges Novum dar. Während bisher vorwiegend Seen mit ausgesprochener Längsrichtung untersucht wurden, liegt hier zum erstenmal die Untersuchung eines Seebeckens vor, dessen Breitenausdehnungen von fast derselben Größenordnung wie seine Längsdimensionen sind. Man kann, um ein akustisches Analogon heranzuziehen, die Schwingungen der bisher untersuchten Seen mit ausgesprochenem Längstalwege mit denjenigen von Saiten mit variabler Dichteverteilung vergleichen; der Chiemsee mit seinen vielen Schwingungsrichtungen entspricht dagegen einer Chladnischen Klangplatte von sehr unregelmäßiger Umgrenzung, einer Platte, aus der sogar durch die Inseln Teile ausgespart sind. Es kann nicht wunder nehmen, daß bei einem derartig komplizierten, aber immer noch schwingungsfähigen Gebilde überaus mannigfache Einzelformen des Schwingungsbildes zutage treten mußten, deren Charakteristika nach dem Vorausgehenden im wesentlichen aus folgendem bestehen:

1. Am Chiemsee konnten 17 Schwingungen verschiedener Dauer, wobei die unter 3 Min. Periodendauer noch nicht mitgerechnet sind, gefunden und die Lage der Knoten und Bäuche

der häufiger auftretenden Seiches auf Grund von Beobachtungen an 19 verschiedenen Seestellen mittels selbstregistrierender Limnimeter und 12 weiteren Punkten mittels des Zeigerlimnimeters zum Teil ganz genau festgelegt werden.

2. Die Hauptschwingung des Chiemsees von 41 Min. mittlerer Dauer schwingt in der Richtung Schafwaschen—Seebruck mit der Knotenlinie durch die Südostspitze der Herreninsel gegen Urfahren, also unterbrochen durch die Insel. Die Schwingungsachse ist dabei fast halbkreisförmig. Die Amplituden sind im Westen 6 mal so groß als im Osten.

3. Der Chiemsee hat zwei weitere uninodale Seiches, welche nur selten auftreten und zwar eine solche von rund 54 Min. Dauer, mit der Schwingungsrichtung Schafwaschen—Nordseite der Herreninsel—Chieming und eine weitere von ungefähr 36 Min., welche ebenfalls von Schafwaschen nach Chieming schwingt, aber längs der südlichen, tieferen Rinne.

4. Die Anwendung der P. Du Boysschen Berechnungsmethode ergibt für die Dauer der 41- und 36 Min.-Seiche sehr befriedigende Werte, versagt aber bei der Berechnung der 54 Min.-Seiche vollständig. Ein Vergleich mit den uninodalen Seiches in anderen bereits untersuchten Seen liefert das Ergebnis, daß die Dauer nach der P. Du Boysschen Interpolationsformel in symmetrisch konkaven Seen zu groß erhalten wird, wie auch die Chrystalsche Theorie lehrt, daß aber in konkaven asymmetrischen Seen, wo der Knoten gegen die tiefste Stelle stark verlagert ist, die Annäherung eine gute wird, wie im Genfersee und bei der 41- und 36 Min.-Seiche des Chiemsees. Fällt aber der Knoten einer Schwingung an eine konvexe Stelle mit starker Beckeneinschnürung, so wird die Dauer nach der Formel viel zu klein, wie bei der 54 Min.-Seiche des Chiemsees und der 62 Min.-Seiche des Waginger—Tachingersees. Die Anwendung der exakten Chrystalschen Theorie aber ist im Chiemsee wegen der plötzlichen, starken Querschnittsänderungen sowohl als besonders wegen der geringen Längenausdehnung gegenüber derjenigen in der Breite nicht mit Erfolg möglich.

5. Eine $28^1/_2$ Min.-Seiche ist binodale Schwingung zu der 36 Min.-Seiche in der Richtung Ostufer—Schafwaschen, wobei die Wassermasse sowohl südlich wie nördlich der Herreninsel beteiligt ist. Die östliche Knotenlinie läuft von Feldwies östlich der Fraueninsel vorbei, die westliche befindet sich genau am Eingang in die Schafwaschener Bucht. Der mittlere Schwingungsbauch fällt vor Harras. Das anormale Verhältnis von Grund- und erster Oberschwingung, 1 : 0,77, erklärt sich übereinstimmend mit den Ergebnissen an anderen Seen durch das Zusammenfallen der Knotenlinien mit starken Beckeneinschnürungen.

6. Eine weitere Seiche von 18 Min. ist zweiknotig in der stark abgebogenen Richtung Seebruck—Südufer—Kailbach und zugleich auch uninodale Querseiche Mühlen—Weitsee. Zeitweise schwingt auch die Schafwaschener Bucht mit, wobei am inneren Ende des Rinngangs ein weiterer Knoten entsteht, so daß diese Schwingung zeitweise dreiknotige Seiche der Richtung Seebruck—Schafwaschen ist.

7. In einer Seiche von $15^1/_2$ Min. Dauer konnte die binodale Schwingung Seebruck—Harras erkannt werden, wobei die 1. Knotenlinie südlich Arlaching liegt, und die 2. südöstlich der Herreninsel, zusammenfallend mit dem Knoten der Hauptschwingung und unterbrochen durch die Insel, gegen Osternach läuft. Insofern kann sie auch als dreiknotige Seiche Seebruck—Südufer—Mühlen bezeichnet werden. Auch die nächste Oberschwingung zur $15^1/_2$ Min.-Seiche von 8 Min. Dauer wurde beobachtet, welche also vierknotige Seiche Seebruck—Harras ist. Bei höherem Wasserstande, wo die Schafwaschener Bucht eine Eigenschwingung gleicher Dauer hatte, setzte sich die schwingende Bewegung auch in diese Bucht hinein fort als sechsknotige Seiche Seebruck—Schafwaschen. Endlich ist die 4,2 Min.-Seiche sehr wahrscheinlich die nächste Oberschwingung zur 8 Min.-Seiche, welche sich aber nicht in den Schafwaschener Winkel fortsetzte, so daß sie als achtknotige Seiche Seebruck—Harras gelten kann.

8. Eine Schwingung von 10,7 Min. mittlerer Dauer ist dreiknotige Seiche Weitsee – Inselsee; dabei zerfällt der östliche Schwingungsbauch in zwei getrennte Bäuche, einen nordöstlichen bei Seebruck und einen südöstlichen bei Hagenau. Auch diese Seiche teilt sich zeitweise der Schafwaschener Bucht mit und ist dann vierknotige Schwingung Weitsee – Schafwaschen. Diese Seiche ist mit derjenigen von 28½ Min. und von 18 Min. so recht ein Beispiel dafür, welch komplizierte Schwingungsunterteilungen in einem so unregelmäßigen Becken möglich sind.

9. Eine Seiche von 12½ Min. tritt nur im Inselsee auf, außerdem noch in Feldwies auf und ist sehr wahrscheinlich die zweiknotige Seiche Feldwies – Kailbach, eine weitere von 7,1 Min. ist schon früher als trinodale Schwingung Seebruck – Hagenau nachgewiesen worden und setzt sich nach den neuen Beobachtungen auch in den Inselsee fort. Weitere Seiches von 9,5 Min., 6,5 Min., 5,7 Min., 5,0 Min. und 3 Min. treten auf an einzelnen Punkten des Weitsees und da nicht so häufig auf, daß ihre Knoten und Bäuche mit Sicherheit aufgefunden werden konnten.

10. Die Schafwaschener Bucht endlich hat eine uninodale Eigenschwingung von 8,57 Min., welche mit dem Wasserstand bis 6,4 Min. abnahm, wo dann die Bucht für diese Periode gleichsam sehr gut abgestimmt war. Auch die binodale Seiche der 6,4 Min.-Schwingung konnte mit einer Dauer von 3,8 Min. gemessen werden.

11. Einen bedeutenderen Einfluß auf die Schwingungsunterteilung übt nur die Herreninsel, die größte der drei Inseln aus. Einmal teilt sie den Inselsee in zwei Kanäle, welche infolge ihrer Tiefen- und Querschnittsunterschiede Eigenschwingungen verschiedener Dauer bedingen. Bei der Mehrzahl der Schwingungen erfolgen die Schwingungsbewegungen südlich und nördlich der Herreninsel, so daß die Knotenlinien durch die Insel in zwei Teile zerlegt werden. Ferner wird durch die zweite Kommunikation die merkwürdige Erscheinung ermöglicht, daß eine Schwingung, nämlich die 18 Min.-Seiche

zugleich Längs- und Querseiche sein kann. Die Beobachtung auf den Inseln, also mitten im See, ergab eine etwas größere Amplitude, als die korrespondierenden Punkte am Ufer haben, und ermöglichten außerdem die endgültige Festlegung der Knoten mehrerer Schwingungen.

12. Die Seichesuntersuchungen an einem See von so komplizierter Beckengestalt und Umrißform haben ergeben, daß Seichesbewegungen nach den verschiedensten Richtungen möglich sind, daß ferner jede Bucht Ende einer Schwingungsrichtung sein kann, daß weiterhin die Schwingungsrichtungen sich verzweigen können. Wichtig ist endlich das Ergebnis, daß mehrknotige Seiches nur einen Teil des Sees einnehmen können und daß nur zeitweise auch andere Seeteile im nämlichen Rhythmus mitschwingen. Eine Bucht schwingt nicht merklich mit, wenn die Schwingungsachse quer zu derselben verläuft.

13. Der jeweilige Wasserstand des Sees und dessen Veränderungen üben auf die Dauer der Schwingungen einen zum Teil bedeutenden Einfluß aus, indem die Dauer derjenigen Seiches, welche gegen seichte, flache Ufer schwingen, bei Abnahme des Wasserstandes ebenfalls abnimmt, bei anderen zunimmt. Besonders stark änderte sich die Dauer der Hauptschwingung, welche von 44,05 Min. bis 39,34 Min., also um 11 % der mittleren Dauer abnahm, als der Wasserstand nach und nach von 109 cm bis — 57 cm H. P. zurückging. Eben diese starke Veränderung der Dauer läßt schließen, daß flache Ufer auf die Dauer der Seiches auch in sonst konkaven Becken einen merklichen Einfluß ausüben. Endlich bewirken die Veränderungen des Wasserstandes, daß einige Seiches zu Zeiten selten und mit kleiner Amplitude auftreten und rasch gedämpft werden, andere sich überhaupt nicht mehr zeigen. Durch dieses Ergebnis wird verständlich, warum in den einzelnen Seen nicht alle Seiches jeder Nodalität angetroffen werden. Die eben genannten Beobachtungen wurden nur dadurch ermöglicht, daß die Tieferlegung des Chiemseespiegels in die Beobachtungszeit

fiel und hiedurch die Differenz des höchsten und tiefsten Wass
standes den hohen Betrag von 1,66 m erreichte.

Gleichzeitig mit den Untersuchungen der Schwingung
formen des Chiemsees, deren Ergebnisse in vorliegender Schr
mitgeteilt sind, wurden umfangreiche Beobachtungen über d
Ursachen der Seiches angestellt und zugleich andere mit d
Seiches in Zusammenhang stehende Probleme geophysikalisch
Natur in dieselben einbezogen, worüber ich später zu bericht
gedenke.

Traunstein, April 1906.

Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

II.

ie Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(Eingelaufen 5. Mai.)

Nachdem wir in der ersten Abhandlung gezeigt haben, ß das elastische Gleichgewichtsproblem:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -X, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -Y, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -Z, \end{array}\right\} \text{ in dem elastischen Körper } \tau$$

$$\left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = 0, \\ v = 0, \text{ an der Oberfläche } \omega, \\ w = 0, \end{array}\right.$$

$$-1 < k < +\infty$$

i gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die gegebenen nktionen

$$X, Y, Z \text{ von } x, y, z$$

ts ein und nur ein System von Lösungen u, v, w zuläßt,

wollen wir jetzt die Existenz einer abzählbar unendlichen Menge von Funktionentripeln:

$$U_\varkappa\ V_\varkappa\ W_\varkappa$$

beweisen, welche den Differentialgleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \Delta U_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial x} + \lambda_\varkappa^2 U_\varkappa = 0, \\ \Delta V_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial y} + \lambda_\varkappa^2 V_\varkappa = 0, \\ \Delta W_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial z} + \lambda_\varkappa^2 W_\varkappa = 0 \end{cases}$$

genügen und an der Oberfläche verschwinden. Dabei sind die

$$5)\quad \lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots$$

Konstanten, welche wir als die den **elastischen Funktionentripeln** $U_\varkappa V_\varkappa W_\varkappa$ zugehörigen Zahlen bezeichnen wollen.

Zur Bestimmung der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers bei ruhender Oberfläche haben wir Funktionen $U V W$ zu bestimmen, welche in τ den Differentialgleichungen genügen

$$6)\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} \quad (k, \sigma^2 \text{ Konstanten des Mediums})$$

und an der Grenze verschwinden. Jedem elastischen Funktionentripel $U_\varkappa V_\varkappa W_\varkappa$ ist nun eine elastische Eigenschwingung bei ruhender Oberfläche zugeordnet:

$$7)\quad \begin{cases} U = U_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \\ V = V_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \\ W = W_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \end{cases} \quad (\delta \text{ beliebige Konstante}).$$

und die betreffende Schwingungsdauer bestimmt sich aus der dem elastischen Funktionentripel zugeordneten Zahl $\lambda_\varkappa^2$ durch die folgende Relation:

$$T_\varkappa = \frac{\lambda_\varkappa}{2\pi\sigma}. \tag{8}$$

Die Theorie der elastischen Funktionentripel läßt übrigens nicht bloß diese eine Anwendung zu, sondern die Verwendbarkeit derselben ist dieselbe, wie die der Theorie der Poincaréschen harmonischen Funktionen.

Es läßt sich zeigen, wie wir sehen werden, daß sich jedes Funktionentripel u, v, w von gewissen Stetigkeitseigenschaften nach den elastischen Funktionentripeln entwickeln läßt:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \textstyle\sum^\varkappa c_\varkappa U_\varkappa, \\ v &= \textstyle\sum^\varkappa c_\varkappa V_\varkappa, \quad (c_1\, c_2 \ldots \text{ Konstanten}). \\ w &= \textstyle\sum^\varkappa c_\varkappa W_\varkappa, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nach dem Beweise dieser Entwicklungen kann man das System von Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

das System von Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \mu \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \mu \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \mu \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und auch das noch allgemeinere System von Differentialgleichungen:

$$12)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu\dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

in sehr allgemeiner Weise bei gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen integrieren.

§ 1.

Ich stelle der Untersuchung den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz. Es seien

$$u_j v_j w_j \quad (j = 0, 1, 2 \ldots p)$$

$p+1$ Funktionentripel, die mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutig und stetig sind, an der Grenze verschwinden, und von denen sonst nichts vorausgesetzt werde, als daß die $u_j v_j w_j$ derart linear unabhängig sind, daß keine Relationen von der Form stattfinden können:

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^p{}_j\,\beta_j u_j &= 0, \\ \sum_0^p{}_j\,\beta_j v_j &= 0, \\ \sum_0^p{}_j\,\beta_j w_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ im ganzen Innenraum,}$$

wo die β_j reelle Konstanten sind, die der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügen. Man kann dann stets die $p+1$ reellen Konstanten:

$$a_0\, a_1 \ldots a_p$$

so berechnen, daß

$$13)\quad a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

und die Funktionentripel:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sum_0^p{}_j\, a_j\, u_j, \\ v &= \sum_0^p{}_j\, a_j\, v_j, \\ w &= \sum_0^p{}_j\, a_j\, w_j \end{aligned}\right.$$

Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\int_i (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau}{\int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} < \frac{\mathfrak{a}^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ıängende, von den Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ gänzlich unabıgige Länge vorstellt, und wo:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \mathfrak{w} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

ɪetzt ist.

Es ist in der Tat:

$$\left\{\begin{aligned} \int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau &= -\int_i \Big[u \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \right) \right\} \\ &\quad + v \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} \right) \right\} + w \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} \right) \right\} \Big] d\tau, \\ &= -\int_i [u \Delta u + v \Delta v + w \Delta w]\, d\tau, \\ &= \int_i \Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \Big] d\tau, \end{aligned}\right.$$

und wir wissen nach dem Beweise eines Poincaréschen Satzes,[1]) daß bei genügend großem p die Konstanten a_j so bestimmt werden können, daß:

$$19)\quad \begin{cases} \int\limits_i u^2\, d\tau \leqq \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int\limits_i v^2\, d\tau \leqq \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int\limits_i w^2\, d\tau \leqq \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \end{cases}$$

Wir haben in dem bekannten Beweise des Poincaréschen Satzes das Gebiet τ nur in eine Anzahl $\leqq \frac{p}{3}$ Teilgebiete τ_j zu zerlegen, und die Konstanten a_j so zu berechnen, daß für jedes Teilgebiet:

$$20)\qquad \int\limits_{\tau_j} u\, d\tau = \int\limits_{\tau_j} v\, d\tau = \int\limits_{\tau_j} w\, d\tau = 0,$$

dann ergibt jener Beweis auch unmittelbar die obigen Formeln.

§ 2.

Wir stellen uns jetzt das folgende Problem:

Gegeben sind drei (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraums $f_1\, f_2\, f_3$, von denen wir voraussetzen, daß in den Teilgebieten, in denen Stetigkeit vorhanden ist, für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$21)\quad \text{abs.}\,[\,f_j|_2 - f_j|_1\,] < A_j r_{12}^{\lambda},\ j = 1, 2, 3 \quad \left|\ \begin{array}{l} A_1\, A_2\, A_3 \text{ endliche Kon-} \\ \text{stanten, } \lambda \text{ echter Bruch.} \end{array}\right.$$

Es sollen drei mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen $U\ V\ W$ der Stelle des Innenraumes so gefunden werden, daß:

---

[1]) H. Poincaré. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1894; A. Korn, Abh. zur Potentialtheorie 4 (Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag 1902).

$$\begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U\text{[1]}) = -f_1, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3, \end{cases}$$

d λ^2 gegebene Zahlen ($-1 < k < \infty$), und daß an der
ie ω:

$$\begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0. \end{cases}$$

Wir bilden successive, entsprechend den Untersuchungen
r ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie,[2]) die mit ihren
ı Ableitungen in τ eindeutigen und stetigen Funktionen:

$$u_j\; v_j\; w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

aß:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial z} = -f_3, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta u_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial x} = -u_{j-1}, \\ \Delta v_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial y} = -v_{j-1}, \\ \Delta w_j + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -w_{j-1}, \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \text{in } \tau,$$

---

[1]) Wir könnten auch ebenso leicht das allgemeinere Problem be-
ln, in dem statt U, $\varphi^2 U$ steht, ... und φ^2 eine überall von null
iedene, positive Funktion der Stelle des Innenraumes ist, die nur
ähnlichen Bedingung 21) wie die f_j genügt.

[2]) Diese Ber. B. 36, S. 37.

ω stets:

$$\left.\begin{array}{l} u_j = 0, \\ v_j = 0, \\ w_j = 0. \end{array}\right\} j = 0, 1, 2 \ldots$$

Können wir zeigen, daß:

$$\lim_{j=\infty} (\lambda^2)^j u_j = 0$$

daß die Reihen:

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j u_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j v_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j w_j$$

ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen Stelle des Innenraumes vorstellen, dann werden diese Reihen die Lösungen der gestellten Aufgabe repräsentieren. Bevor wir zu diesen Konvergenzbetrachtungen übergehen, wollen wir einige Eigenschaften der aufeinander folgenden Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ kennen lernen.

§ 3.

Wir wollen voraussetzen, es bestehen zwischen den $p+1$ Funktionentripeln

$$u_j\, v_j\, w_j \qquad (j = 0, 1, \ldots p)$$

die Relationen:

$$\sum_0^p {}_j \beta_j u_j = 0,$$

$$\sum_0^p {}_j \beta_j v_j = 0, \tag{26}$$

$$\sum_0^p {}_j \beta_j w_j = 0,$$

wo die β_j reelle, den Gleichungen:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1 \tag{27}$$

genügende Konstanten vorstellen, und wo p eine endliche Zahl ist. Wir wollen zusehen, zu welchen Konsequenzen dies für die drei Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ führen muß. Wir werden zunächst zeigen, daß man aus 26) stets drei Relationen von der Form

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_0^{p-1} {}_j\, \gamma_j\, u_j = 0, \\ &\sum_0^{p-1} {}_j\, \gamma_j\, v_j = 0, \\ &\sum_0^{p-1} {}_j\, \gamma_j\, w_j = 0 \end{aligned}\right. \tag{28}$$

ableiten kann, wo die γ_j ($j = 0, 1, \ldots p-1$) reelle, den Gleichungen:

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1 \tag{29}$$

genügende Konstanten vorstellen, in folgenden drei Fällen:

1. Wenn die Gleichung:

$$\beta_0\, x^p + \beta_1\, x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0 \tag{30}$$

eine komplexe Wurzel:

$$x_1 + i\, x_2 \qquad (x_2 \neq 0)$$

besitzt:

2. wenn diese Gleichung eine reelle, negative Wurzel besitzt;

3. wenn diese Gleichung eine positive Doppelwurzel hat.

In der Tat berechnen wir die $p + 2$ Konstanten

$$\gamma_0\, \gamma_1 \ldots \gamma_{p-1}\, x\, a$$

so, daß:

$$\left|\begin{aligned} a\gamma_0 &= \beta_0, \\ a\gamma_1 &= \beta_1 + a x \gamma_0, \\ a\gamma_2 &= \beta_2 + a x \gamma_1, \\ &\text{— — — — — —} \qquad\qquad a \neq 0, \\ a\gamma_{p-1} &= \beta_{p-1} + a x \gamma_{p-2}, \\ 0 &= \beta_p + a x \gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 &+ \cdots \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{aligned}\right.$$

auf p Weisen möglich ist, entsprechend den p Wurzeln [der] Gleichung 30), so folgt aus 26):

$$32\text{a)} \left\{\begin{aligned} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} &= x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 \\ &\quad + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} &= x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\ &\quad + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} &= x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 \\ &\quad + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) \end{aligned}\right.$$

oder:

$$32\text{b)} \left\{\begin{aligned} &\Delta(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p) + k\frac{\partial}{\partial x}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ &+ \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ &\Delta(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p) + k\frac{\partial}{\partial y}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ &+ \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ &\Delta(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) + k\frac{\partial}{\partial z}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ &+ \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p). \end{aligned}\right.$$

Hat die Gleichung 30) eine komplexe Wurzel

$$x_1 + i x_2 \qquad (x_2 \neq 0),$$

und setzen wir:

$$33) \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p &= X + i\,\Xi, \\ \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p &= Y + i\,H, \\ \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p &= Z + i\,Z, \end{aligned}\right.$$

so folgt, wenn wir die Gleichung 32 b) bezw. mit

$$X - i\Xi, \quad Y - iH, \quad Z - iZ$$

ltiplizieren, addieren und über den Innenraum integrieren:

$$\left\{\begin{aligned} -\int_i \Bigg[& \frac{\partial(X-i\Xi)}{\partial x}\frac{\partial(X+i\Xi)}{\partial x} + \frac{\partial(X-i\Xi)}{\partial y}\frac{\partial(X+i\Xi)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(X-i\Xi)}{\partial z}\frac{\partial(X+i\Xi)}{\partial z} + \frac{\partial(Y-iH)}{\partial x}\frac{\partial(Y+iH)}{\partial x} \\ & + \frac{\partial(Y-iH)}{\partial y}\frac{\partial(Y+iH)}{\partial y} + \frac{\partial(Y-iH)}{\partial z}\frac{\partial(Y+iH)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(Z-iZ)}{\partial x}\frac{\partial(Z+iZ)}{\partial x} + \frac{\partial(Z-iZ)}{\partial y}\frac{\partial(Z+iZ)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(Z-iZ)}{\partial z}\frac{\partial(Z+iZ)}{\partial z} + k\left\{\frac{\partial}{\partial x}(X+i\Xi)\right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y}(Y+iH) + \frac{\partial}{\partial z}(Z+iZ)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(X-i\Xi)\right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y}(Y-iH) + \frac{\partial}{\partial z}(Z-iZ)\right\}\Bigg] d\tau \\ = -(x_1+ix_2) & \int_i (X^2+Y^2+Z^2+\Xi^2+H^2+Z^2)\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

nit, falls $x_2 \neq 0$, da die linke Seite reell ist:

$$\int_i (X^2+Y^2+Z^2+\Xi^2+H^2+Z^2)^2\,d\tau = 0,$$
$$X = Y = Z = \Xi = H = Z = 0,$$

r:

$$\left\{\begin{aligned} & \gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0; \quad \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\ & + \cdots + \gamma_{p-1} v_p = 0; \quad \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p = 0 \end{aligned}\right.$$

d hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} & \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 \\ & + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Hat die Gleichung 30) eine reelle, negative Wurzel

$$x = -x_0^2,$$

so folgt aus 34):

$$-\int_t \Big[\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Y}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Z}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Z}{\partial z}\Big)^2\Big] d\tau$$

$$-k\int_t \Big(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\Big)^2 d\tau$$

$$= x_0^2 \int_t (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau,$$

und hieraus wieder: 35) und 36), da links eine Summe von lauter negativen Gliedern steht.

Hat schließlich die Gleichung 30 b) eine positive Doppelwurzel

$$x = \bar{x}, \tag{37}$$

so können wir die p Konstanten

$$\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_{p-2}\, b$$

so bestimmen, daß sie zusammen mit $\bar{x}$ die Gleichungen erfüllen:

$$\left\{\begin{aligned} b\,\delta_0 &= \gamma_0, \\ b\,\delta_1 &= \gamma_1 + b\,\delta_0\,\bar{x}, \\ b\,\delta_2 &= \gamma_2 + b\,\delta_1\,\bar{x}, \\ &- \; - \; - \; - \; - \qquad b \neq 0 \\ b\,\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\,\delta_{p-3}\,\bar{x}, \\ 0 &= \gamma_{p-1} + b\,\delta_{p-2}\,\bar{x}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 &+ \cdots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

und wir können die Gleichungen 32 a) in der Form schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} F - 2\bar{x} F_1 + \bar{x}^2 F_2 &= 0, \\ G - 2\bar{x} G_1 + \bar{x}^2 G_2 &= 0, \\ H - 2\bar{x} H_1 + \bar{x}^2 H_2 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$
40)\quad \begin{cases}
F = \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-2},\\
F_1 = \delta_0 u_1 + \delta_1 u_2 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-1},\\
F_2 = \delta_0 u_2 + \delta_1 u_3 + \cdots + \delta_{p-2} u_p;\\
G = \delta_0 v_0 + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-2},\\
G_1 = \delta_0 v_1 + \delta_1 v_2 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-1},\\
G_2 = \delta_0 v_2 + \delta_1 v_3 + \cdots + \delta_{p-2} v_p;\\
H = \delta_0 w_0 + \delta_1 w_1 + \cdots + \delta_{p-1} w_{p-2},\\
H_1 = \delta_0 w_1 + \delta_1 w_2 + \cdots + \delta_{p-2} w_{p-1},\\
H_2 = \delta_0 w_2 + \delta_1 w_3 + \cdots + \delta_{p-2} w_p.
\end{cases}
$$

Es folgt aus 39) und 40):

$$
\Delta F + k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} F - \bar{x}^2 F_1 = 0,
$$

$$
\Delta G + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} G - \bar{x}^2 G_1 = 0,
$$

$$
\Delta H + k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} H - \bar{x}^2 H_1 = 0.
$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir bezw. mit

$$
(-F_1), \quad (-G_1), \quad (-H_1),
$$

addieren und integrieren über den Innenraum, dann ergibt sich:

$$
\int_i \{F^2 + G^2 + H^2 - 2\bar{x}(FF_1 + GG_1 + HH_1) + \bar{x}^2(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)\}\, d\tau = 0,
$$

und hieraus:

$$
41)\quad \begin{cases}
F - \bar{x} F_1 = 0,\\
G - \bar{x} G_1 = 0,\\
H - \bar{x} H_1 = 0,
\end{cases}
$$

das sind Gleichungen von der Form:

$$
\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,
$$

$$
\gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0,
$$

$$
\gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0.
$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt, daß man Gleichungen von der Form:

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = 0,$$
$$\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p = 0,$$
$$\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p = 0$$

stets auf Gleichungen:

$$42) \quad \begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m = 0, \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0, \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m = 0 \end{cases}$$

reduzieren kann, in denen die

$$\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_m$$

reelle, der Relation:

$$43) \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen und so beschaffen sind, daß die Gleichung:

$$44) \quad \gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \cdots + \gamma_m = 0$$

m positive, einfache Wurzeln besitzt.

Bezeichnen wir mit $x_1 x_2 \ldots x_m$ diese m Wurzeln, so ist, da eine Doppelwurzel nicht existiert, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ - & - & - & - \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und wir können somit mit Hilfe der Gleichungen:

$$45) \quad \begin{cases} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \ldots ^{1)} \\ u_1 = x_1^{-1} U_1 + x_2^{-1} U_2 + \cdots + x_m^{-1} U_m, \ldots \\ u_2 = x_1^{-2} U_1 + x_2^{-2} U_2 + \cdots + x_m^{-2} U_m, \ldots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ u_{m-1} = x_1^{-(m-1)} U_1 + x_2^{-(m-1)} U_2 + \cdots + x_m^{-(m-1)} U_m, \ldots \end{cases}$$

[1]) Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

die Funktionen

$$\begin{array}{llll} U_1\, U_2 \ldots U_m & \text{linear durch die} & u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}, \\ V_1\, V_2 \ldots V_m & \text{„ \quad „ \quad „} & v_0\, v_1 \ldots v_{m-1}, \\ W_1\, W_2 \ldots W_m & \text{„ \quad „ \quad „} & w_0\, w_1 \ldots w_{m-1} \end{array}$$

definieren. Aus 45) und 42) folgt nun, da $x_1\, x_2 \ldots x_m$ die Gleichung 44) erfüllen, auch:

$$u_m = x_1^{-m} U_1 + x_2^{-m} U_2 + \cdots + x_m^{-m} U_m, \ldots,$$[1]

so daß wir die

$$U_j\, V_j\, W_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m)$$

anstatt durch die Gleichungen 45) auch durch die folgenden Gleichungen definieren können:

46) $$u_j = x_1^{-j} U_1 + x_2^{-j} U_2 + \cdots + x_m^{-j} U_m, \ldots \text{[1]} \quad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Nun folgt aus 46) und 24):

47) $$\begin{aligned} - u_{j-1} = {} & x_1^{-j}\left(\Delta U_1 + k \frac{\partial \Theta_1}{\partial x}\right) + x_2^{-j}\left(\Delta U_2 + k \frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right) \\ & + \cdots + x_m^{-j}\left(\Delta U_m + k \frac{\partial \Theta_m}{\partial x}\right), \ldots \qquad (j = 1, 2 \ldots m), \end{aligned}$$

und da wir die Gleichungen 45) auch so schreiben können:

48) $$u_{j-1} = x_1^{-(j-1)} U_1 + x_2^{-(j-1)} U_2 + \cdots x_m^{-(j-1)} U_m, \ldots \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

auch:

49) $$\left.\begin{array}{|l|} 0 = x_1^{-(j-1)} \left\{ \Delta U_1 + k \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x} + x_1 U_1 \right\} \\ + x_2^{-(j-1)} \left\{ \Delta U_2 + k \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial x} + x_2 U_2 \right\} + \cdots \\ + x_m^{-(j-1)} \left\{ \Delta U_m + k \dfrac{\partial \Theta_m}{\partial x} + x_m U_m \right\}, \ldots \end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots m.$$

Das sind dreimal m lineare und homogene Gleichungen für die m Größen:

[1]) Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

$$\left.\begin{aligned} &\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} + x_j U_j,\\ \text{bezw.}\quad &\Delta V_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} + x_j V_j,\\ &\Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} + x_j W_j, \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m,$$

es folgt somit, da die Determinante dieser Gleichungen $\neq 0$ ist, einzeln:

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -x_j U_j,\\ &\Delta V_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = -x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m.\\ &\Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} = -x_j W_j, \end{aligned}\right.$$

Die erste Gleichung 45) lehrt uns somit: Es ist bei unserer Voraussetzung:

$$51)\quad \left\{\begin{aligned} u_0 &= U_1 + U_2 + \cdots + U_m,\\ v_0 &= V_1 + V_2 + \cdots + V_m,\\ w_0 &= W_1 + W_2 + \cdots + W_m, \end{aligned}\right.$$

wo die $U_j\ V_j\ W_j$ linear durch die $u_j\ v_j\ w_j$ ausdrückbare Funktionen des Innenraumes von w sind, welche in demselben den Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} &\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -x_j U_j,\\ &\Delta V_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = -x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m.\\ &\Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} = -x_j W_j, \end{aligned}$$

Dabei sind die x_j positive Zahlen, welche der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0$$

genügen.

Wir sprechen das Resultat folgendermaßen aus:

I. Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ Relationen von der Form:

$$\begin{aligned}
\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0,\\
\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0,\\
\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0,
\end{aligned}$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0\ \beta_1\ \ldots\ \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man $u_0\, v_0\, w_0$ in der Form darstellen:

$$\begin{aligned}
u_0 &= U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \quad (m < p)\\
v_0 &= V_1 + V_2 + \cdots + V_m,\\
w_0 &= W_1 + W_1 + \cdots + W_m,
\end{aligned}$$

wo die $U_j\, V_j\, W_j$ linear durch die $u_j\, v_j\, w_j$ resp. ausdrückbare, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω sind, die in demselben den Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= -\varkappa_i U_j,\\
\Delta V + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= -\varkappa_j V_j,\\
\Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= -\varkappa_j W_j
\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

und an der Oberfläche den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
U_j &= 0,\\
V_j &= 0,\\
W_j &= 0,
\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

genügen; dabei sind die x_j positive Wurzeln der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0.$$

Die Funktionen $f_1 f_2 f_3$ sind in der Form darstellbar:

$$52)\quad \begin{cases} f_1 = -x_1 U_1 - x_2 U_2 - \cdots - x_m U_m, \\ f_2 = -x_1 V_1 - x_2 V_2 - \cdots - x_m V_m, \\ f_3 = -x_1 W_1 - x_2 W_2 - \cdots - x_m W_m. \end{cases}$$

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus 51) und 50).

Setzen wir bei der Voraussetzung des Satzes I

$$53)\quad \begin{cases} U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_m U_m, \\ V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_m V_m, \\ W = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \cdots + a_m W_m, \end{cases}$$

so genügen diese Funktionen den Differentialgleichungen:

$$54)\quad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3, \end{cases}$$

wenn:

$$55)\quad a_j = -\frac{x_j}{\lambda^2 - x_j},$$

bei der Voraussetzung:

$$\lambda^2 \neq x_j.$$

Die Lösungen 53) unseres Hauptproblems haben somit, als Funktionen von λ^2 betrachtet, einfache Pole an den Stellen:

$$\lambda^2 = x_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Fragen wir, kann es noch ein anderes Lösungssystem $U' V' W'$ der Aufgabe geben, so bemerken wir, daß in dem Falle der Existenz eines zweiten Lösungssystems $U' V' W'$:

$$56)\quad \begin{cases} \Delta(U'-U)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial x}=-\lambda^2(U'-U), \\ \Delta(V'-W)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial y}=-\lambda^2(V'-V), \\ \Delta(W'-W)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial z}=-\lambda^2(W'-W) \end{cases}$$

sein müßte; nur um solche Funktionen $U'-U$, $V'-V$, $W'-W$, die im Innenraume den Gleichungen 56) genügen und an der Oberfläche verschwinden, können sich $U\,V\,W$ und $U'\,V'\,W'$ unterscheiden.

§ 4.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß sich zwischen den successiven Funktionen $u_j\,v_j\,w_j$ keine Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0 \end{aligned}$$

herleiten lassen, wo p eine endliche Zahl ist und $\beta_0\,\beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen.

Wir bilden an Stelle der Reihen $u_j\,v_j\,w_j$ die Reihen, welche entstehen, wenn man anstatt von den Funktionen $f_1\,f_2\,f_3$ von den Funktionen:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 f_1 + \alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \cdots + \alpha_p u_{p-1}, \\ &\alpha_0 f_2 + \alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \cdots + \alpha_p v_{p-1}, \\ &\alpha_0 f_3 + \alpha_1 w_0 + \alpha_2 w_1 + \cdots + \alpha_p w_{p-1} \end{aligned}$$

ausgeht, wo die

$$\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p$$

$p+1$ reelle Konstanten sein sollen, die der Gleichung:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen, und über die wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir bilden also successive die Funktionentripel $\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j$, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$57)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta\pi_0 + k\frac{\partial\sigma_0}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}),\\ &\Delta\chi_0 + k\frac{\partial\sigma_0}{\partial y} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}),\\ &\Delta\varrho_0 + k\frac{\partial\sigma_0}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}),\\ &\left.\begin{aligned} &\Delta\pi_j + k\frac{\partial\sigma_j}{\partial x} = -\pi_{j-1},\\ &\Delta\chi_j + k\frac{\partial\sigma_j}{\partial y} = -\chi_{j-1},\\ &\Delta\varrho_j + k\frac{\partial\sigma_j}{\partial z} = -\varrho_{j-1},\end{aligned}\right\}\ j = 1, 2\ldots\end{aligned}\right| \quad \sigma_j = \frac{\partial\pi_j}{\partial x} + \frac{\partial\chi_j}{\partial y} + \frac{\partial\varrho_j}{\partial z},$$

und an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$58)\quad \left.\begin{aligned} \pi_j &= 0,\\ \chi_j &= 0,\\ \varrho_j &= 0,\end{aligned}\right\}\ j = 0, 1, 2\ldots$$

Wir wollen zeigen, daß wir bei genügend großem p die Konstanten

$$a_0\,a_1\,\ldots\,a_p$$

so wählen können, daß

$$59)\quad \left.\begin{aligned} &\text{abs. } \lambda^{2j}\pi_j \overline{<} A\cdot L^j,\\ &\text{abs. } \lambda^{2j}\chi_j \overline{<} A\cdot L^j,\\ &\text{abs. } \lambda^{2j}\varrho_j < A\cdot L^j,\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&A \text{ endliche Konstante},\\ &L \text{ echter Bruch},\end{aligned}$$

wenn λ^2 eine beliebige positive, festgegebene Zahl vorstellt, so daß die Reihen:

$$60)\quad \left\{\begin{aligned} \pi &= \pi_0 + \lambda^2\pi_1 + \lambda^4\pi_2 + \cdots\\ \chi &= \chi_0 + \lambda^2\chi_1 + \lambda^4\chi_2 + \cdots\\ \varrho &= \varrho_0 + \lambda^2\varrho_1 + \lambda^4\varrho_2 + \cdots\end{aligned}\right.$$

ıit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen er Stelle des Innenraumes von ω vorstellen, die in demselben en Differentialgleichungen:

$$
1)\quad \begin{cases} \Delta\pi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}), \\ \Delta\chi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}), \\ \Delta\varrho + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}) \end{cases}
$$

nd an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$
2)\quad \begin{cases} \pi = 0, \\ \chi = 0, \\ \varrho = 0 \end{cases}
$$

enügen.

Wir betrachten zum Beweise dieser Behauptung den uotienten:

$$
\frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}, \qquad (m \text{ eine endliche Zahl}),
$$

er nach 57):[1])

[1]) Es ist nach 57):

$$
\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau
$$

$$
= \int\limits_i \left[\left(\Delta\pi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta\chi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta\varrho_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau
$$

nd:

$$
\frac{\int\left[(1+k)\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial\varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial\chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\pi_m}{\partial z} - \frac{\partial\varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_m}{\partial x} - \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\right)^2\right] d\tau}{\int(\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int\limits_i \left[\left(\Delta\pi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta\chi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta\varrho_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau},
$$

ımit:

$$< \left[\frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i \left[(1+k)\,\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau} \right]^2$$

und

$$< \frac{\mathfrak{a}^2}{\sqrt[3]{p^4}}$$

wenn wir $a_0\, a_1 \ldots a_p$ in geeigneter Weise wählen, nach dem Hilfssatz auf S. 354, da

$$\pi_m = a_0\, u_{m-1} + a_1\, u_m + \cdots + a_p\, u_{m+p-1},$$
$$\chi_m = a_0\, v_{m-1} + a_1\, v_m + \cdots + a_p\, v_{m+p-1},$$
$$\varrho_m = a_0\, w_{m-1} + a_1\, w_m + \cdots + a_p\, w_{m+p-1}.$$

Das Resultat:

$$\text{63)} \qquad \frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} < \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}$$

gilt somit für jedes bestimmte, endliche m, bei beliebigem p und geeignet gewählten $a_0\, a_1 \ldots a_p$.

Bedenken wir jetzt, daß:

$$\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau = -\int\limits_i \left[\pi_{m-1}\left(\Delta \pi_m + k\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}\right) + \cdots\right] d\tau,$$
$$= -\int\limits_i \left[\pi_m\left(\Delta \pi_{m-1} + k\frac{\partial \sigma_{m-1}}{\partial x}\right) + \cdots\right] d\tau,$$
$$= -\int\limits_i (\pi_m \pi_{m-2} + \chi_m \chi_{m-2} + \varrho_m \varrho_{m-2})\, d\tau,^{1)}$$

$$\frac{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}{}$$

$$> \frac{\left[\int\limits_i \left[(1+k)\,\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau\right]^2}{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}$$

[1] Für $m = 1$ soll

$$\pi_{m-2} \text{ für } a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1},$$
$$\chi_{m-2} \text{ für } a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1},$$
$$\varrho_{m-2} \text{ für } a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}$$

stehen.

so folgt:

$$\Big[\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau\Big]^2$$
$$\overline{\overline{<}} \int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau,$$

oder:

$$64)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \dfrac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} \\ \overline{\overline{<}} \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{cases}$$

Infolge dieses Schlusses von m auf $m-1$ ist allgemein für jedes bestimmte, endliche m bei geeignet gewählten $a_0\, a_1\, a_p$:

$$\frac{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int \{(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdot + a_p u_{p-1})^2 + (a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1})^2 + (a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1})^2\}\, d\tau}$$
$$\overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \cdots \overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}$$
$$\overline{\overline{<}} \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}.$$

Man kann dieses Resultat aber auch für unendlich wachsende m beweisen, nach der bekannten, von Poincaré gefundenen Schlußweise: Man betrachte die für ein beliebiges endliches m unseren Voraussetzungen genügenden

$$a_0^{(m)}\; a_1^{(m)}\; \ldots\; a_p^{(m)}\, ^{1)}$$

als Koordinaten von Punkten der Kugelfläche:

$$66)\qquad a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

inem $p+1$ Raume, dann wird für die

[1] Bezeichnung hinzu.

$$\alpha_0^{(m)}\ \alpha_1^{(m)} \dots \alpha_p^{(m)}$$

eines gewissen Gebietes δ_m der Kugelfläche die Bedingung 65) erfüllt sein. Wir können in gleicher Weise, bei geeignet gewählten

$$\alpha_0^{(m+1)}\ \alpha_1^{(m+1)} \dots \alpha_p^{(m+1)}$$

erreichen, daß:

$$67)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int_i \{(\alpha_0 f_1 + \alpha_1 u_0 + \cdots + \alpha_p u_{p-1})^2 + (\alpha_0 f_2 + \alpha_1 v_0 + \cdots + \alpha_p v_{p-1})^2 + (\alpha_0 f_3 + \alpha_1 w_0 + \cdots + \alpha_p w_{p-1})^2\}\, d\tau} \\ \leqq \dfrac{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} < \dfrac{\int_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} \leqq \cdots \leqq \dfrac{\int_i (\pi_{m+1}^2 + \chi_{m+1}^2 + \varrho_{m+1}^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau} \\ < \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}, \end{cases}$$

wo die endliche Konstante rechts von m und p ganz unabhängig ist. Die Punkte

$$\alpha_0^{(m+1)}\ \alpha_1^{(m+1)} \dots \alpha_p^{(m+1)},$$

welche der Bedingung 67) genügen, werden einem Gebiete δ_{m+1} der Kugelfläche 66) angehören, welches ganz in dem Gebiete δ_m enthalten ist, da die Bedingungen 65) eine Folge von 67) sind; in dieser Weise fortgehend sieht man, daß das entsprechende Gebiet δ_{m+2} ganz in dem Gebiete δ_{m+1}, δ_{m+3} ganz in dem Gebiete δ_{m+2} enthalten ist, und so fort; daraus folgt, daß ein Wertsystem:

$$\alpha_0\ \alpha_1 \dots \alpha_p$$

existiert, für welches die Ungleichungen 67) auch bei unendlich wachsendem m erfüllt sind, und es ergibt sich:

$$68)\qquad \int_i (\pi_j^2 + \chi_j^2 + \varrho_j^2)\, d\tau < B \cdot L_p^{2j},$$

wenn wir

$$69)\qquad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}}$$

setzen und unter B eine endliche Konstante verstehen, die von j ganz unabhängig ist.

Wir folgern aus 68) auch

$$\int_\tau F_j^2\, d\tau \lesssim \text{endl. Konst. } L_p^{2j}$$

(man vgl. die letzte Formel Anm. S. 371), wenn man unter F_j eine der vier Funktionen

$$\sigma_j = \frac{\partial \pi_j}{\partial x} + \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_j}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varrho_j}{\partial y} - \frac{\partial \chi_j}{\partial z}, \quad \frac{\partial \pi_j}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi_j}{\partial x} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y}$$

versteht; denken wir uns um einen Punkt $(x\,y\,z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$F_j = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R}\right] d\tau + \frac{1}{4\pi R^2}\int F_j\, d\omega,$$

wo die Integrale rechts über die Kugel bezw. Kugelfläche zu erstrecken sind, somit:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 F_j = \int F_j\, d\tau - \int_0^R R^2 \int_{(R)} \left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R}\right] d\tau\, dR,$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 |F_j| \lesssim \text{endl. Zahl} \cdot \sqrt{\int F_j^2\, d\tau \cdot R^3}$$

$$+ \int_0^R \text{endl. Zahl } R^2 \sqrt{R} \cdot \sqrt{\int \Delta F_j^2\, d\tau}\, dR,$$

$$\lesssim (\text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{7}{2}})\, L_p^j,$$

also:

$$|F_j| < \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung des Punktes $(x\,y\,z)$ von ω ist. Ferner ist wegen der Formeln:

$$u_j = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

in dem Punkte $(x\,y\,z)$:

$$\text{abs. Max. } (\pi_j \, \chi_j \, \varrho_j) < \text{abs. Max. } F_j + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\sqrt{\mathfrak{r}}},$$

somit, wenn wir mit C_j den absolut größten Wert von $\pi_j \, \chi_j \, \varrho_j \, \sigma_j$ in $(x \, y \, z)$ bezeichnen:

$$C_j < \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}.$$

Andererseits ist nach den Untersuchungen meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie:

$\text{abs.} \, | \sigma_j |_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } C_{j-1} \, r_{12}^{\lambda}$, (vgl. diese Ber. 36, S. 80, 1906), somit

$$C_j \leqq \text{endl. Konst. } C_{j-1} \, \mathfrak{r}^{\lambda} + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

wobei man für $\mathfrak{r}$ eine beliebig kleine Länge einsetzen kann, hieraus in bekannter Weise, daß C_j, somit auch

$$\text{70)} \qquad \text{abs. Max. } (\pi_j \, \chi_j \, \varrho_j \, D_1 \pi_j \, D_1 \chi_j \, D_1 \varrho_j) < A \cdot L_p^j,$$

wo A eine endliche, von j unabhängige Konstante, L_p eine Zahl vorstellt, die durch Vergrößerung von p beliebig klein gemacht werden kann.

Ist nun λ^2 eine beliebige, positive, fest gegebene Zahl, so können wir dadurch, daß wir

$$L_p \leqq \frac{L}{\lambda^2}$$

machen (L irgend ein echter Bruch), erreichen, daß

$$\text{71)} \quad \text{abs. Max. } [\lambda^{2j} \pi_j, \lambda^{2j} \chi_j, \lambda^{2j} \varrho_j, \lambda^{2j} D_1 \pi_j, \lambda^{2j} D_1 \chi_j, \lambda^{2j} D_1 \varrho_j] \leqq A \cdot L^j$$

wird, und es wird dann tatsächlich in den Reihen:

$$\text{72)} \qquad \begin{cases} \pi = \pi_0 + \lambda^2 \pi_1 + \lambda^4 \pi_2 + \cdots, \\ \chi = \chi_0 + \lambda^2 \chi_1 + \lambda^4 \chi_2 + \cdots, \\ \varrho = \varrho_0 + \lambda^2 \varrho_1 + \lambda^4 \varrho_2 + \cdots \end{cases}$$

ein mit seinen ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel gegeben, das im Innenraume den Differentialgleichungen:

$$
)\left\{\begin{aligned}
\Delta\pi + k\frac{\partial\sigma}{\partial x} &= -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + a_2 u_1 + \cdots + a_p u_{p-1}),\\
\Delta\chi + k\frac{\partial\sigma}{\partial y} &= -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + a_2 v_1 + \cdots + a_p v_{p-1}),\\
\Delta\varrho + k\frac{\partial\sigma}{\partial z} &= -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + a_2 w_1 + \cdots + a_p w_{p-1})
\end{aligned}\right.
$$

d an der Oberfläche ω den Grenzbedingungen:

$$
)\qquad \left\{\begin{aligned}
\pi &= 0,\\
\chi &= 0,\\
\varrho &= 0
\end{aligned}\right.
$$

nügt.

§ 5.

Wir definieren jetzt die $p + 1$ Funktionentripel

$U\,U'\,U''\ldots U^{(p)},\quad V\,V'\,V''\ldots V^{(p)},\quad W\,W'\,W''\ldots W^{(p)}$ [1])

rch die dreimal $p + 1$ linearen Gleichungen:

$$
)\left\{\begin{aligned}
a_0 U + a_1 U' + a_2 U'' + \cdots + a_p U^{(p)} &= \pi, \;\ldots^{2)}\\
U - \lambda^2 U' &= u_0, \ldots\\
U' - \lambda^2 U'' &= u_1, \ldots\\
\text{— — — — — — — — — — —}&\\
U^{(p-1)} - \lambda^2 U^{(p)} &= u_{p-1};
\end{aligned}\right.
$$

ın kann dann zeigen, daß für den Fall des Nichtverschwindens r Determinante dieser Gleichungen:

$$
)\left\{\begin{aligned}
D = &\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p\\
1 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0\\
- & - & - & - & -\\
0 & 0 & 0 & \ldots 1 & -\lambda^2
\end{vmatrix},\\
= &(-\lambda^2)^p a_0 + (-\lambda^2)^{p-1} a_1 + \cdots - \lambda^2 a_{p-1} + a_p,
\end{aligned}\right.
$$

---

[1]) Die Zeichen (j) sollen hier als Indizes stehen.

[2]) Je zwei analoge Gleichungen, die dadurch entstehen, daß man U bezw. $V\,W$, für u $v\,w$ schreibt.

die Funktionen $U\,V\,W$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω darstellen, die den Differentialgleichungen:

$$77)\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3 \end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$78)\quad \begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0 \end{cases}$$

genügen. Wir schreiben hierzu die an zweiter bis $p+1$ ter Stelle stehenden Gleichungen 75) in der Form:

$$79)\quad U^{(j-1)} - \lambda^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \ldots \quad (j = 1,^{1)}\, 2 \ldots p)$$

und folgern hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial z},$$

daß:

$$80)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta U^{(j-1)} + k\frac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial x} - \lambda^2\left(\Delta U^{(j)} + k\frac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial x}\right) \\ &\qquad + u_{j-2}{}^{2)}) = 0, \\ &\Delta V^{(j-1)} + k\frac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial y} - \lambda^2\left(\Delta V^{(j)} + k\frac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial y}\right) \\ &\qquad + v_{j-2} = 0, \\ &\Delta W^{(j-1)} + k\frac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial z} - \lambda^2\left(\Delta W^{(j)} + k\frac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial z}\right) \\ &\qquad + w_{j-2} = 0. \end{aligned}\right| \; j = 1, 2 \ldots p$$

---

[1] Im Falle $j = 1$ steht $U^{(j-1)}\,V^{(j-1)}\,W^{(j-1)}$ für $U\,V\,W$.

[2] Im Falle $j = 1$ steht $u_{j-2}\,v_{j-2}\,w_{j-2}$ für $f_1\,f_2\,f_3$.

Während nun die an erster Stelle stehenden Gleichungen 75) mit Rücksicht auf die Gleichungen 73) die Relationen liefern:

$$81^{a})\quad \begin{cases} a_0\left\{\Delta U + k\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1\right\} \\ + a_1\left\{\Delta U' + k\dfrac{\partial\Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0\right\} \\ + a_2\left\{\Delta U'' + k\dfrac{\partial\Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right\} + \cdots \\ + a_p\left\{\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial\Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right\} = 0, \ldots \end{cases}$$

folgen, wenn man die Gleichungen 79) mit λ^2 multipliziert und bezw. zu 80) addiert, die folgenden Gleichungen, die wir für $j = 1, 2 \ldots p$ explicite hinschreiben:

$$81^{b})\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1 \\ -\lambda^2\left(\Delta U' + k\dfrac{\partial\Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0\right) = 0, \ldots \\ \Delta U' + \dfrac{\partial\Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0 \\ -\lambda^2\left(\Delta U'' + k\dfrac{\partial\Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right) = 0, \ldots \\ -\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- \\ \Delta U^{(p-1)} + k\dfrac{\partial\Theta^{(p-1)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p-1)} + u_{p-2} \\ -\lambda^2\left(\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial\Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right) = 0, \ldots \end{cases}$$

Die Gleichungen 81a) und 81b) bilden zusammen ein System von dreimal $p + 1$ linearen, homogenen Gleichungen in Bezug auf die dreimal $p + 1$ Größen:

$$\Delta U + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1, \quad \Delta U' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0,$$
$$\Delta U'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1, \ldots \Delta U^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1};$$
$$\Delta V + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 V + f_2, \quad \Delta V' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \lambda^2 V' + v_0,$$
$$\Delta V'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial y} + \lambda^2 V'' + v_1, \ldots \Delta V^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial y} + \lambda^2 V^{(p)} + v_{p-1};$$
$$\Delta W + k\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W + f_3, \quad \Delta W' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial z} + \lambda^2 W' + w_0,$$
$$\Delta W'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial z} + \lambda^2 W'' + w_1, \ldots \Delta W^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial z} + \lambda^2 W^{(p)} + w_{p-1}.$$

Ist ihre Determinante D (76) $\neq 0$, so müssen sie einzeln verschwinden; im Besonderen genügen also $U\,V\,W$ den Differentialgleichungen 77).

Nach den Definitionsgleichungen 75) sind $U\,V\,W$ in der Form darstellbar:

$$82) \quad \begin{cases} U = \dfrac{P}{D}, \\ V = \dfrac{Q}{D}, \\ W = \dfrac{R}{D}, \end{cases}$$

wenn:

$$83) \quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} \pi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ Q = \begin{vmatrix} \chi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ v_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ v_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ R = \begin{vmatrix} \varrho & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ w_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ w_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ w_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Formeln 82) stellen in jedem Falle die Lösungen unseres Hauptproblems dar, falls nicht λ^2 gerade eine Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

ist; dieser Ausnahmefall bedarf einer besonderen Diskussion.

§ 6.

Wir haben λ^2 bisher als eine bestimmte, festgegebene positive Zahl betrachtet, wir wollen jetzt λ^2 als eine beliebige, positive Zahl unterhalb dieser festen Zahl auffassen. Die Funktionen $\pi \chi \varrho$, somit auch $P Q R$ sind in allen diesen Fällen mit ihren ersten Ableitungen (nach $x y z$) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω; dagegen wachsen die Lösungen $U V W$ unseres Hauptproblems ins Unendliche, wenn sich λ^2 einer Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert und nicht etwa gleichzeitig auch P bezw. $Q R$ zu Null konvergieren.

Die Wurzeln

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2 \qquad (< \lambda^2)$$

der Gleichung:

$$D = 0$$

werden somit Pole der Funktionen $U V W$ in Bezug auf die Variable λ^2 sein, falls dieselben nicht Nullstellen für P bezw. $Q R$ sind.

Unsere wesentliche Aufgabe wird daher jetzt sein, das Verhalten der Funktionen $P Q R$ an den Stellen

$$\lambda^2 = \lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots \lambda_p^2$$

zu untersuchen. Es folgt aus 83):

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta \pi & a_1 & a_2 & \ldots a_{p-1} & a_p \\ \Delta u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

und:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta P+k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\\ \qquad +\lambda^2 P\end{array}\right\}=\left|\begin{array}{lcccc}-(a_0 f_1+a_1 u_0+a_0 u_1+\cdots+a_p u_{p-1}) & a_2 & a_3 & \ldots a_{p-1} & a_p\\ -f_1+\lambda^2 u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots 0 & 0\\ -u_0+\lambda^2 u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots 0 & 0\\ - & - & - & - & -\\ -u_{p-2}+\lambda^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots 1 & -\lambda^2\end{array}\right|$$

oder:

$$84)\quad \left|\begin{array}{l}\Delta P+k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)+\lambda^2 P=-f_1 D.\\ \Delta Q+k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)+\lambda^2 Q=-f_2 D.\\ \Delta R+k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)+\lambda^2 R=-f_3 D.\end{array}\right.$$

Bezeichnen wir die Werte von $P\,Q\,R$ für

$$\lambda^2=\lambda_j^2 \qquad (j=1,2\ldots p)$$

mit $P_j\,Q_j\,R_j$, so folgt:

$$85)\quad \left|\begin{array}{l}\Delta P_j+k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right)=-\lambda_j^2 P_j\\ \Delta Q_j+k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right)=-\lambda_j^2 Q_j\\ \Delta R_j+k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right)=-\lambda_j^2 R_j\end{array}\right.$$

Definition. Wir bezeichnen als elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω 3 mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen [illegible] Stelle des Innenraumes $U_j\,V_j\,W_j$, welche in denselben den Differentialgleichungen genügen:

$$86)\quad \left|\begin{array}{l}\Delta U_j+k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x}+\lambda_j^2\,U_j=0.\\ \Delta V_j+k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y}+\lambda_j^2\,V_j=0.\\ \Delta W_j+k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z}+\lambda_j^2\,W_j=0,\end{array}\right.$$

den Grenzbedingungen:

$$86^{b)}\qquad \begin{cases} U_j = 0, \\ V_j = 0, \\ W_j = 0 \end{cases}$$

und der Beziehung:

$$86^{c)}\qquad \int_i (U_j^2 + V_j^2 + W_j^2)\, d\tau = 1;$$

λ_j^2 bezeichnen wir als die dem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl.

Wir können nach dieser Definition das Resultat 85) auch so aussprechen:

Die Werte, welche $P\,Q\,R$ für

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_p^2$$

annehmen, sind entweder identisch Null oder elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω, multipliziert mit von Null verschiedenen Konstanten.

Die Wurzeln λ_j^2, denen elastische Funktionentripel entsprechen, können nicht Doppelwurzeln der Gleichung

$$D = 0$$

sein. Für eine solche Doppelwurzel wäre:

$$\frac{d\,D}{d\,\lambda^2} = 0,$$

somit nach 84).

$$\lambda_j^2 P_j = -\Delta P_j - k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right), \ldots$$

$$\Delta\frac{d P_j}{d\lambda^2} + k\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{d P_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{d Q_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d R_j}{d\lambda^2}\right\} = -\lambda_j^2\frac{d P_j}{d\lambda^2} - P_j \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. miteinander, addiert und integriert über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf die Relation:

oder:

$$\int\limits_i \left[(1+k)\left(\frac{\partial P_j}{\partial x}+\frac{\partial Q_j}{\partial y}+\frac{\partial R_j}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial R_j}{\partial y}-\frac{\partial Q_j}{\partial z}\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial P_j}{\partial z}-\frac{\partial R_j}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x}-\frac{\partial P_j}{\partial y}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

also:

$$P_j = Q_j = R_j = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist, daß einer Doppe kein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht.

Es ist ferner leicht zu ersehen, daß die Wurz Gleichung

$$D = 0,$$

denen identisch verschwindende $P_j Q_j R_j$ entsprechen, für die Lösungen $U V W$ unseres Hauptproblems sei da in diesem Falle, wenn das betreffende λ_j^2 eine m fac der Gleichung

$$D = 0$$

ist $(m = 1, 2, \ldots p)$:

$$D = \frac{dD}{d\lambda^2} = \frac{d^2 D}{(d\lambda^2)^2} = \cdots = \frac{d^{m-1} D}{(d\lambda^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{(d\lambda^2)}$$

$$d^m P \qquad d^m Q \qquad d^m R$$

stetig sind.[1]) Wir können das Resultat in folgender Weise zusammenfassen:

II. **Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen**

$$u_j\ v_j\ w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

keine Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0, \end{aligned}$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0\, \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man für ein beliebiges

$$\lambda^2 < \frac{1}{L_m}, \quad L_m = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{m^2}},$$

wenn m eine beliebig große, fest gegebene Zahl vorstellt, ein Lösungssystem unseres Hauptproblems in der folgenden Form angeben:

$$87) \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{X(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ V &= \frac{Y(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ W &= \frac{Z(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \end{aligned} \right| \quad 0^{2)} < n < m,$$

---

[1]) Dies ist ohne weiteres klar für $m = 1$; für $m = 2$ folgt aus 84) und $\frac{dD}{d\lambda^2} = 0$, da nun das betreffende λ_j^2 eine Doppelwurzel der Gleichung $D = 0$ ist:

$$\frac{dP}{d\lambda^2} = 0, \ldots \quad \text{somit:} \quad U = \frac{\frac{d^2 P}{(d\lambda^2)^2}}{\frac{d^2 D}{(d\lambda^2)^2}}, \ldots$$

und so fort, für $m = 3, 4 \ldots$

[2]) Für den Fall $n = 0$ soll die rechte Seite einfach für $X(\lambda^2, x, y, z)$, $Y(\lambda^2, x, y, z)$, $Z(\lambda^2, x, y, z)$ stehen.

wo $\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_m^2$ bestimmte, von einander verschiedene positive Zahlen $\left(\overline{\overline{<}}\, \frac{1}{L_m}\right)$ sind, XYZ für jeden Wert von λ^2:

$$0 \overline{\overline{<}}\, \lambda^2 \overline{\overline{<}}\, \frac{1}{L_m}$$

ein mir ihren ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel darstellen und abgesehen von einem konstanten Faktor für

$$\lambda^2 = \lambda_j^2 \qquad (j = 1, 2 \ldots n)$$

in ein elastisches Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehöriger Zahl λ_j^2 übergehen.

Die kurze auf den Satz I folgende Betrachtung (S. 367) zeigt uns, daß der Fall:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0 \end{aligned}$$

(p endlich) keinen Ausnahmefall des vorstehenden Satzes darstellt:

Zusatz 1 zu II. Der Satz II gilt in gleicher Weise, auch wenn zwischen den successiven Funktionen:

$$u_j\, v_j\, w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0 \end{aligned}$$

(p endlich) bestehen.

Zusatz 2 zu II. Für irgend ein von

$$\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_n^2$$

verschiedenes λ^2 kann sich eine andere Lösung $U'V'W'$ unseres Hauptproblems von der Lösung 87) nur um Funktionen

$$U' - U,\ V' - V,\ W - W$$

unterscheiden, die selbst ein elastisches Funktionentripel für den Innenraum von ω mit dem betreffenden λ^2 als zugehöriger Zahl bilden.

Dies folgt genau in derselben Weise, wie in dem Spezialfalle S. 369. Die Frage nach der Existenz der Lösungen unseres Hauptproblems wird durch den Satz II vollständig beantwortet, wir wollen uns nun besonders mit den Polen dieser Lösungen und den elastischen Funktionentripeln beschäftigen, welche diesen Polen entsprechen.

§ 7.

III^a). Die einem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl λ_j^2 ist eine reelle, positive, von null verschiedene Zahl.

Der Beweis von III^a) liegt in der Betrachtung S. 359—362.

III^b). Jedes elastische Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht der Ungleichung:

$$\text{abs. Max. } (U_j V_j W_j) \quad \overline{\gtrless} \, a \cdot \lambda_j^2,$$

wo a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante vorstellt.

Zum Beweise dieses Satzes braucht man eine Verallgemeinerung der Formeln 137) meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie (diese Ber. 36, S. 80, 1906); man kann nämlich ohne Schwierigkeit auch aus den Formeln 103), 105) und 136) folgern,[1]) daß auch in dem Falle

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0$$

die Formeln 136) bestehen. Bedenkt man, daß wegen der Definitionsgleichungen:

---

[1]) In einer Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité", die demnächst in den Ann. de L'Ec. Norm. erscheinen wird, werde ich übrigens etwas ausführlicher auf diese Verallgemeinerung eingehen.

$$U_j = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathfrak{r}}\Theta_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\mathfrak{r}}\mathfrak{W}_j\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\mathfrak{r}}$$

$C_j \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $\frac{\lambda_j}{\sqrt{\mathfrak{r}}}$ + endl. Konst. $\mathfrak{r}\cdot\lambda_j^2\,C_j$, (r belie Läng

somit die Behauptung, wenn man $\mathfrak{r} = \frac{1}{\lambda_j^2} \times$ einer kleinen, endlichen Konstanten setzt.

III[c]) Setzt man:

88[a])
$$\begin{cases} f_1 = U_j, \\ f_2 = V_j, \\ f_3 = W_j, \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ ein elastisches Funktionentripel de raumes von ω, λ_j^2 die zugehörige Zahl vorstell

88[b])
$$\begin{cases} u = u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \dfrac{U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v = v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \dfrac{V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w = w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w^2 + \cdots = \dfrac{W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases}$$

Denn es ist in diesem Falle:

II.

Diese Überlegung beweist zugleich den Zusatz:

Zusatz zu III^c). Setzt man:

$$89^a)\quad \begin{cases} f_1 = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_p U_p, \\ f_2 = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_p V_p, \\ f_3 = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \cdots + a_p W_p, \end{cases}$$

wo $a_1 a_2 \ldots a_p$ Konstanten, $U_j V_j W_j$ $(j = 1, 2, \ldots p)$ p elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω mit den zugehörigen Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ vorstellen, so ist:

$$89^b)\quad \begin{cases} u \equiv u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ v \equiv v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ w \equiv w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \end{cases}$$

solange λ^2 kleiner als die kleinste der Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ und p eine endliche Zahl ist.

III^d). Es existiert für jede stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω und für jeden Wert von $k > -1$ eine endliche, positive Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß, falls p eine beliebige endliche positive ganze Zahl $\gtrapprox m$ vorstellt, die Zahl der überhaupt möglichen, linear unabhängigen elastischen Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehörigen Zahlen

$$\lambda_j^2 < \frac{1}{L_p}, \quad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}},$$

$< p$ sein muß.

Man kann nach unseren früheren Resultaten bei genügend großem p die Konstanten $a_1 a_2 \ldots a_p$ so wählen, daß:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

und die Reihen 89^b) für ein beliebiges

$$u = \sum_1^p \frac{a_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$v = \sum_1^p \frac{a_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$ des voran[illegible] Zusatzes
$$w = \sum_1^p \frac{a_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

diesem Resultate widersprechen, es muß somit weni[illegible] der λ_j^2

$$> \frac{1}{L_p}$$

sein, wenn $U_j V_j W_j$ p linear unabhängige **elastische** [illegible] tripel des Innenraumes von ω **vorstellen.**

Wir können diesem Satze sofort die **folgend** hinzufügen:

Zusatz 1 zu III^d). **Die Anzahl der el** Funktionentripel, die von einander **linear un** sind und zugehörige Zahlen

$$\lambda_j^2 \overline{\overline{<}} m$$

besitzen, wo m eine endliche Zahl **vorstellt, is**

Zusatz 2 zu III^d). **Die Anzahl der m** linear unabhängigen **elastischen Funktionen** derselben zugehörigen, endlichen Zahl λ_j^2 is

Wir multiplizieren zum Beweise die Relationen:

$$\Delta U_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial x} = -\lambda_i^2 U_i,$$
$$\Delta V_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial y} = -\lambda_i^2 V_i,$$
$$\Delta W_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial z} = -\lambda_i^2 W_i$$

bezw. mit $U_k V_k W_k$, addieren und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\lambda_i^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau$$

$$= -\int_i \left[U_k\left(\Delta U_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial x}\right) + V_k\left(\Delta V_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial y}\right) + W_k\left(\Delta W_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= -\int_i \left[U_i\left(\Delta U_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial x}\right) + V_i\left(\Delta V_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial y}\right) + W_i\left(\Delta W_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= \lambda_k^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau;$$

es folgt somit die Gleichung 90), sobald

$$\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2.$$

Zusatz zu IIIe.). Können wir drei Funktionen $f_1 f_2 f_3$ der Stelle des Innenraumes, die an der Oberfläche ω verschwinden, in der Form darstellen:

$$91)\qquad \begin{cases} f_1 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ f_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ f_3 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ $(j = 1, 2 \ldots)$ elastische Funktionentripel mit von einander verschiedenen Zahlen $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots$ vorstellen, so müssen die Konstanten C_j die Werte haben:

$$92)\qquad C_j = \int_i (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \ldots).$$

Wir haben zum Beweise nur die Formeln 91) bezw. mit $U_i V_i W_i$ zu multiplizieren, zu addieren und über den Innenraum zu integrieren, schließlich die Formeln

$$\int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau = 0, \quad (i \neq k)$$

$$\int_i (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)\, d\tau = 1$$

zu beachten.

Die Frage, unter welchen Bedingungen wir vorgelegte Funktionentripel $f_1 f_2 f_3$ nach elastischen Funktionentripeln entwickeln können, soll uns in dem folgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 8.

Die Untersuchung, welche uns zu dem Satze II. führte, hat uns gelehrt, daß jedem Pole λ_j^2 der Lösungen unsers Hauptproblems:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda^2 U &= -f_1, \\ \Delta V_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda^2 V &= -f_2, \\ \Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda^2 W &= -f_3, \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau$$

$$U = V = W = 0, \quad \text{an } \omega$$

(für $0 < \lambda^2 < \frac{1}{L_p}$, wo p eine endliche, im übrigen beliebig große positive Zahl vorstellt), ein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht, und daß die Anzahl dieser Pole höchstens $= p$ ist.

Wir definieren nun die Funktionen $R_p S_p T_p$ durch die Gleichungen:

$$\text{93)} \quad \begin{cases} R_p = f_1 - C_1 U_1 - C_2 U_2 - \cdots - C_p U_p, \\ S_p = f_2 - C_1 V_1 - C_2 V_2 - \cdots - C_p V_p, \\ T_p = f_3 - C_1 W_1 - C_2 W_2 - \cdots - C_p W_p, \end{cases}$$

wo:

$$94)\quad C_j = \int_\tau (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \ldots n,\ 0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} p),$$

entsprechend den n Polen von $U\,V\,W$ im Intervalle

$$0 < \lambda^2 \overline{<} \frac{1}{L_p}$$

während

$$95)\qquad C_j{}^{1)} = 0, \quad (j = n+1,\ n+2, \ldots p)$$

sein soll, und wir wollen jetzt von den Funktionen $f_1\,f_2\,f_3$ voraussetzen, daß sie an der Oberfläche ω verschwinden und in τ eindeutig und stetig sind mit ihren ersten Ableitungen, während ihre zweiten Ableitungen endlich und integrabel vorausgesetzt werden sollen.

Es gilt dann gleiches auch für die Funktionen $R_p\,S_p\,T_p$.[2]

Wir werden von dem Ausdruck

$$\int_\tau (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

zunächst nachweisen, daß er durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

---

[1] Mit der Festsetzung, daß auch

$$C_j\, U_j = C_j\, V_j = C_j\, W_j = 0 \quad (j = n+1,\ n+2, \ldots p).$$

[2] Der Beweis, daß die zweiten Ableitungen von $U_j\,V_j\,W_j$ stetig sind, folgt daraus, daß man in dem in der ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie behandelten allgemeinen Gleichgewichtsprobleme die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u\,v\,w$ stets beweisen kann, falls $f_1\,f_2\,f_3$ von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| f_j \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots,\quad 0 < \lambda < 1.$$

Eine ausführliche Behandlung dieser Dinge wird in meiner demnächst in den Ann. de l'Éc. Norm. erscheinenden Arbeit: Sur les équations de l'élasticité gegeben. Für den Beweis der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u\,v\,w$ ist allerdings noch die Bedingung hinzuzufügen, daß die ersten Ableitungen der Richtungskosinusse der inneren Normalen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auch von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| D_1 \cos(\nu x) \right|_1^2 \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots,\quad 0 < \lambda < 1.$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Lösungen $u\,v\,w$ des folgenden Problems:

$$
96)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda^2 u = -R_p, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \lambda^2 v = -S_p, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \lambda^2 w = -T_p. \\ \quad u = v = w = 0, \quad \text{an } \omega, \end{cases}
$$

welche wir analog der zu dem Satze II. führenden Untersuchung zu finden imstande sind, und wir wollen zunächst zeigen, daß die früheren Werte

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_n^2$$

nicht Pole des Funktionentripels $u\,v\,w$ sein können.

Multiplizieren wir die erste Gleichung 96) mit U_j, die zweite mit V_j, die dritte mit W_j, addieren und integrieren über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf

$$\int_i \left[U_j\left(\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + V_j\left(\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + W_j\left(\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right] d\tau$$
$$= -\lambda_j^2 \int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau$$

und

$$\int_i (R_p\,U_j + S_p\,V_j + T_p\,W_j)\,d\tau = 0,$$

daß:

$$97)\qquad (\lambda^2 - \lambda_j^2)\int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau = 0,$$
$$(j = 1, 2 \ldots n).$$

Ist λ_1^2 das kleinste λ_j^2, so ist, wenn wir $u_j\,v_j\,w_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ durch die Gleichungen definieren:

$$
\text{8)}\quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} = -R_p, \\[2ex]
\Delta v_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} = -S_p, \\[2ex]
\Delta w_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial z} = -T_p; \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial x} = -u_{j-1}, \\[2ex]
\Delta v_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial y} = -v_{j-1}, \\[2ex]
\Delta w_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial z} = -w_{j-1},
\end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots
\end{array}\right\} \text{in } \tau, \\[2ex]
u_j = v_j = w_j = 0, \text{ an } \omega, \quad (j = 0, 1, 2 \ldots),
\end{array}\right.
$$

$$
\text{9)}\quad \left\{\begin{array}{l}
u = u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = U - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\[2ex]
v = v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = V - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\[2ex]
w = w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = W - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}.
\end{array}\right.
$$

Nun ist nach Satz II:

$$
\text{10)}\quad \left\{\begin{array}{l}
U = \dfrac{\gamma_1 U_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + U', \\[2ex]
V = \dfrac{\gamma_1 V_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + V', \\[2ex]
W = \dfrac{\gamma_1 W_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + W',
\end{array}\right.
$$

o γ_1 eine Konstante, U' V' W' Größen darstellen, die ıch für lim $(\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$ endlich bleiben; es folgt somit ıs 99):

$$
101)\qquad \begin{cases} (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, u = (\gamma_1 - C_1)\, U_1 + \varepsilon_1, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, v = (\gamma_1 - C_1)\, V_1 + \varepsilon_2, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, w = (\gamma_1 - C_1)\, W_1 + \varepsilon_3, \end{cases}
$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ durch Verkleinerung von $(\lambda_1^2 - \lambda^2)$ unter
liebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden könn

Es folgt hieraus mit Benützung von 97) —
chung gilt, wie nahe wir auch λ^2 an λ_1^2 heranrücken
durch Übergang zur Grenze $\lim (\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$:

$$
\gamma_1 - C_1 = 0
$$

und

$$
102)\qquad \begin{cases} u = U' - \sum_2^n j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v = V' - \sum_2^n j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w = W' - \sum_2^n j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases}
$$

wo $U'\ V'\ W'$ endlich bleiben, wie nahe wir aucl
heranrücken lassen.

Die Stelle $\lambda^2 = \lambda_1^2$ ist somit kein Pol für die
$u\, v\, w$, dieselben können überhaupt keinen Pol $\gtrless \lambda_1^2$ l
Reihe 99) konvergieren hiernach nicht blos für
von λ^2, die kleiner als λ_1^2 sind, sondern für alle λ^2.

$$103)\qquad \frac{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau} < L_p^2;$$

es bestehen nämlich nach einer früheren Betrachtung die Ungleichungen:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\, d\tau} < \frac{\int\limits_i (u_1^2+v_1^2+w_1^2)\, d\tau}{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\, d\tau} < \frac{\int\limits_i (u_2^2+v_2^2+w_2^2)\, d\tau}{\int\limits_i (u_1^2+v_1^2+w_1^2)\, d\tau} \overline{\gtrless} \cdots;$$

wäre nun:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau} > L_p^2,$$

so würde hieraus folgen:

$$\lambda^{4j} \int\limits_i (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2)\, d\tau > (\lambda^2 L_p)^{2j}$$

und das würde der Konvergenz der Reihen 99) für $\lambda^2 = \frac{1}{L_p}$ widersprechen. Wir haben damit tatsächlich die Ungleichung 103) bewiesen.

Es ist nun andererseits:

$$\int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

$$= -\int\limits_i \left[R_p\left(\Delta u_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\right) + S_p\left(\Delta v_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial y}\right) + T_p\left(\Delta w_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= \int\limits_i \left[(1 + k)\, \tau_p\, \theta_0 + \pi_p\, \mathfrak{u}_0 + \chi_p\, \mathfrak{v}_0 + \varrho_p\, \mathfrak{w}_0\right] d\tau,$$

wo:

$$104)\quad \tau_p = \frac{\partial R_p}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} + \frac{\partial T_p}{\partial z},\ \pi_p = \frac{\partial T_p}{\partial y} - \frac{\partial S_p}{\partial z},\ \chi_p = \frac{\partial R_p}{\partial z} - \frac{\partial T_p}{\partial x},$$

$$\varrho_p = \frac{\partial S_p}{\partial x} - \frac{\partial R_p}{\partial y},$$

somit:

$$105)\qquad \int\limits_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

$$\overline{\gtrless} \sqrt{\int [(1+k)\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\, d\tau \int [(1+k)\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\, d\tau}$$

oder, da:

$$\int_i [(1+k)\,\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\,d\tau = +\int_i [u_0 R_p + v_0 S_p + w_0 T_p]\,d\tau,$$

$$\overline{\gtrless} \sqrt{\int_i (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\,d\tau \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau},$$

$$\overline{\gtrless} L_p \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau, \text{ nach 103)},$$

so folgt aus 105):

$$106)\quad \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau \overline{\gtrless} L_p \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau.$$

Es ist nun weiter nach 93):

$$107)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$

$$= \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \lambda_1^2 C_1^2 - \lambda_2^2 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^2 C_n^2]\,d\tau \overline{>} 0,$$

wo:

$$108)\quad \tau = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},\quad \pi = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\quad \chi = \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\quad \varrho = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Diese stets positive Größe 107) nimmt nach der soeben abgeleiteten Ungleichung mit wachsendem p fortdauernd ab, so daß, wie groß auch p sein möge:

$$109)\quad \begin{aligned} &\int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau \\ &\overline{\gtrless} \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\,d\tau, \end{aligned}$$

somit folgt nach 106):

$$110)\quad \int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau \overline{\gtrless} L_p \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\,d\tau.$$

Diese Formel beweist die Behauptung, daß das Integral:

$$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)$$

durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir wollen nun aber auch zeigen, daß die Funktionen

$R_p S_p T_p$ durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es ist:

111) $$\int_i [(1+k)\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$
$$\leqq \sqrt{\int_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta S_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta T_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial z}\right)^2\right] d\tau},$$

und da:

112) $$\int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$
$$= \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau - \lambda_1^4 C_1^2 - \lambda_2^4 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^4 C_n^2 \geqq 0$$

eine mit wachsendem p stets abnehmende Größe, also:

113) $$\int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau < \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$

ist, so folgt aus 111) und 106):

114) $$\int_i [(1+k)\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau < \text{endl. Konst. } L_p.$$

Wir bemerken weiter, daß nach 112) die Reihe:

$$\lambda_1^4 C_1^2 + \lambda_2^4 C_2^2 + \cdots$$

konvergiert, und daß, wenn wir mit F eine der vier Größen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) + \frac{\partial}{\partial z}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n) - \frac{\partial}{\partial z}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n) - \frac{\partial}{\partial x}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) - \frac{\partial}{\partial y}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$

bezeichnen:

$$\int_{\tau} \Delta \overline{F^2}\, d\tau \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \lambda_p^2;$$

da nun, wenn wir mit F eine der vier Größen $\tau_p \pi_p \chi_p \varrho_p$ be-
zeichnen, (man vgl. die analoge Untersuchung auf S. 375):

$$|F| \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst.} \sqrt{\frac{L_p}{\mathfrak{r}^3}} + \text{endl. Konst.} \sqrt{\mathfrak{r}}\, \lambda_p + \text{endl. Kon}$$

wo $\mathfrak{r}$ eine beliebig kleine Länge sein kann, so ergiebt si
wenn wir:

$$\mathfrak{r} = \text{endl. Konst.} \frac{1}{\lambda_p}$$

setzen:

115) $$\text{abs. Max.} (\tau_p \pi_p \chi_p \varrho_p) \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst.} \frac{1}{\sqrt[4]{L_p}}.$$

Es bestehen nun die Formeln:

116) $$R_p = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\tau} \tau_p \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\tau} \varrho_p \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\tau} \chi_p \frac{d\tau}{r}$$

Sei $(x\,y\,z)$ irgend ein Punkt in τ, wir konstruieren wi
um denselben, ähnlich wie S. 375, eine Kugel mit dem Rad
bezeichnen das Gebiet, das τ und diese Kugel gemein h
mit τ_1, dann ist:

117a) $$\begin{cases} R_p^{\tau_1} < \text{endl. Konst. abs. Max.} (\tau_p \varrho_p \chi_p) \displaystyle\int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^2}. \\ \quad < \dfrac{\text{endl. Konst. } \mathfrak{r}}{\sqrt[4]{L_p}}, \text{ mit Rücksicht auf 115),} \end{cases}$$

wenn wir durch Hinzufügung des Index τ_1 andeuten, da
116) die Integrale rechts nur über τ_1 erstreckt werden so
ferner:

117b) $$\begin{cases} R_p^{\tau-\tau_1} < \text{endl. Konst.} \sqrt{\displaystyle\int_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^4} \cdot \int_{\tau-\tau_1} (\tau_p^2 + \varrho_p^2 + \chi_p^2} \\ \quad < \text{endl. Konst.} \sqrt{\dfrac{L_p}{\mathfrak{r}}}, \text{ mit Rücksicht auf 1} \end{cases}$$

Somit folgt:

8) $$|R_p| \leqq \frac{c_1}{\sqrt[4]{L_p}}\,\mathfrak{r} + c_2 \sqrt{\frac{L_p}{\mathfrak{r}}},$$

c_1 und c_2 endliche Konstanten sind.

Setzen wir daher:

9) $$\mathfrak{r} = \sqrt{L_p}$$

ergiebt sich:

0) $$|R_p| \leqq c \sqrt[4]{L_p}, \ldots$$

c eine endliche Konstante vorstellt.

Wir erhalten das Resultat:

IV. Jedes Tripel von Funktionen $f_1 f_2 f_3$, die an ω rschwinden, in τ mit ihren ersten Ableitungen einutig und stetig sind, und für welche die Ausdrücke:

$$\Delta f_1 + k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$
$$\Delta f_2 + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$
$$\Delta f_3 + k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$

dlich und integrabel sind, kann in Reihen entckelt werden, die nach den elastischen Funktionenpeln $U_j V_j W_j$ fortschreiten:

$$f_1 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots,$$
$$f_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots,$$
$$f_3 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots,$$

Dabei sind die Konstanten dieser Entwicklungen:

$$C_j = \int_\tau (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau.$$

— — —

von Flächen und Räumen. (Diese Ber. B. 31, :

S. 6, Zeile 8 von unten lies:

„größer als echter Bruch $\times r_{12}$" statt „kleiner als r_1

Anm. ²) ist fortzulassen.

S. 9, Zeile 16 von oben lies:

„endl. Konst abs. Max. $H \cdot r_{12}$ statt „2 abs. Max. $H \cdot r_{12}$

Berichtigung zu der Abhandlung I. (Diese Ber. B. 31,

S. 53, in Formel 36) lies: $r_{12}^{\lambda f}$ statt r_{12}.

S. 56, Zeile 12 und 13 von unten lies: „die" statt „deren tungen";

in Formel 45 lies: $|\Xi_j|_1^2$ statt $\left|\frac{\partial \Xi_j}{\partial h}\right|_1^2$;

Zeile 9 von unten ist: „h eine beliebige tangentiale zu streichen.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 9. Juni 1906.

1. Herr JOH. RÜCKERT teilt die Resultate einer mit Herrn Professor Dr. SIEGFRIED MOLLIER ausgeführten Untersuchung: „Über die Entwicklung des Blutes bei Wirbeltieren" mit. Dieselben werden anderweit veröffentlicht.

Das Blut ursprünglich entodermaler Herkunft entsteht bei den gnathostomen Wirbeltieren aus dem ventralen Mesoblast, der seinerseits bei den einzelnen Wirbeltierklassen mehr oder weniger innige genetische Beziehung zum Entoblast besitzt.

2. Herr C. v. VOIT legt eine von dem korrespondierenden Mitgliede JAKOB LÜROTH in Freiburg i. Br. eingesandte Abhandlung: „Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Größen" vor.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man den Weierstraßschen sogenannten Vorbereitungssatz benutzen kann, um die Untersuchung des Extremums einer Funktion auf die Frage zurückzuführen, ob eine algebraische Gleichung nur komplexe Wurzeln hat. Sind die Bedingungen dafür bekannt, so läßt sich bei zwei Variabeln die Untersuchung leicht erledigen; bei mehr Veränderlichen sind, abgesehen vom einfachsten Falle, größere Rechnungen oder Reihenentwicklungen nötig.

Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Grössen.

Von J. Lüroth.

(Eingelaufen 9. Juni.)

§ 1.

Es sei $R(x, y)$ eine Potenzreihe der zwei reellen Veränderlichen x und y, die für $(x = 0,\ y = 0)$ verschwindet. Die Veränderlichen seien durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt. Um zu untersuchen, ob dem Ursprung O ein Maximum oder Minimum von $R(x, y)$ entspricht, kann man den folgenden Weg einschlagen.

Es seien $(x, y)_{2p}$ die Glieder niedrigster Dimension in R. Man kann immer annehmen, daß sie eine der Veränderlichen, etwa y, in der $2p^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, denn wenn dies nicht an sich der Fall ist, kann man es immer durch eine passende lineare Transformation der Veränderlichen erreichen.

Nach dem Weierstraßschen „Vorbereitungssatze"[1]) kann man

$$R(x, y) = C f(x, y) \cdot F(x, y) \tag{1}$$

setzen, wo C eine Konstante, $F(x, y)$ eine Potenzreihe nach x und y ist, die für $x = 0,\ y = 0$ sich auf Eins reduziert, und $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von y bezeichnet, die in Bezug auf y vom Grade $2p$ ist, und deren Koeffizienten Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Dabei hat y^p den Koeffizienten Eins. Soll nun im Punkte O ein

[1]) Weierstraß' Werke, Bd. 2, S. 135. Stickelberger, Math. Annalen Bd. 30, S. 401.

Extremum von R stattfinden, so muß es möglich sein um O ein Quadrat Q so abzugrenzen, daß in ihm R nur in dem Punkte O und sonst nicht verschwindet. Wenn man Q gehörig klein macht, sind die in ihm liegenden Nullen von R mit denen von $f(x, y)$ identisch. Also darf in Q kein von O verschiedener Nullpunkt von f liegen. Wie Weierstraß gezeigt hat, werden aber alle Nullpunkte von R in einem passenden kleinen Bereich erhalten, indem man die Gleichung $f = 0$ nach y auflöst, wobei man x auf ein gewisses Gebiet, $|x| < \delta$, beschränkt. Soll also in O ein Extremum von R eintreten, so muß ein Gebiet von $x, |x| < \delta$, existieren, für welches die Gleichung $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln y liefert, den Punkt $x = 0$ ausgenommen.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt so gibt es ein Gebiet um O, in dem $f(x, y)$ überall positiv ist, R also als Zeichen von C hat und nur für O selbst verschwindet. Dann liefert der Punkt O sicher ein Extremum von R. Ein uneigentliches Extremum findet statt, wenn für eine oder mehrere den Punkt O enthaltende Kurven R verschwindet, ohne daß beim Durchschreiten dieser Kurven ein Zeichenwechsel eintritt. Dies verlangt, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ für y reelle Werte ergiebt, ohne daß in deren Nähe f verschiedene Zeichen hätte. Die entsprechenden Wurzeln besitzen dann eine gerade Vielfachheit. Dies erfordert, daß die Diskriminante von $f(x, y)$ gebildet nach y, identisch Null, und daß $f(x, y)$ von der Form $g(x, y)^2 \cdot h(x, y)$ sei, wo h nur komplexe Wurzeln hat.

Die Bedingungen dafür, daß $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat, können sich in der Form darstellen

$$S_1(x) > 0, \quad S_2(x) > 0, \ldots, \tag{2}$$

wo die S Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Es ist aber auch möglich — und dies tritt z. B. schon ein, wenn $f(x, y)$ vom vierten Grade ist — daß jene Bedingungen nur die alternative Form haben:

$$\text{wenn } S_1(x) > 0 \text{ ist, muß } S_2(x) > 0 \ldots \tag{3}$$

$$\text{wenn aber } S_1(x) < 0 \text{ ist, muß } S_3(x) > 0 \ldots \text{ sein.}$$

Aus den Exponenten der niedrigsten Potenzen von x in den Reihen S und den Zeichen von deren Koeffizienten ist leicht zu entscheiden, ob es für x einen Bereich gibt, der die Bedingungen 2) oder 3) erfüllt.

Als ein Beispiel betrachte ich die Reihe

$$R(x, y) = y^4 + a x^5 y + x^6 + b x^8 y + c x^7 y^2 + d x^6 y^3 + (x, y)_5 y^4 + \cdots$$

Durch unbestimmte Koeffizienten findet man $C = 1$,

$$f(x, y) = y^4 + y^3 (d x^6 + \cdots) + y^2 (c x^7 + \cdots) + y (a x^5 + b x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

$$F(x, y) = 1 + (x, y)_5 + \cdots$$

Schafft man in $f(x, y)$ das Glied mit y^3 fort indem man

$$y = z - \frac{1}{4} (d x^6 + \cdots)$$

setzt, so erhält man

$$z^4 + z^2 (c x^7 + \cdots) + z (a x^5 + b x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

Die Bedingungen, daß eine Gleichung vierten Grades

$$z^4 + r z^2 + s z + t = 0 \tag{4}$$

lauter komplexe Wurzeln habe, sind nun: die Diskriminante

$$16 r^4 t - 4 r^3 s^2 + 144 r s^2 t - 128 r^2 t^2 + 256 t^3 - 27 s^4$$

muß $\geqq 0$, und entweder

$$r^2 - 4 t < 0 \text{ oder } r^2 - 4 t > 0 \text{ und } r > 0$$

sein.

Die Diskriminante wird hier $256 (x^{18} + \cdots)$, also für gehörig kleine x positiv.

Die Funktion $r^2 - 4 t$ wird $= - 4 x^6 + \cdots$ folglich < 0. Somit sind die Bedingungen komplexer Wurzeln für gehörig kleine x erfüllt und daher gibt es ein Gebiet

ersten Betrachtungen des vorigen Paragraphen ebe
führen. An die Stelle der Ungleichungen 2) od
dann änliche, in denen statt der Reihen nach x,
zwei Veränderlichen, etwa x und y, vorkommen.
Bedingungen für komplexe Wurzeln sich stets in
bringen ließen, so könnte man nach dem in § 1
Verfahren untersuchen, ob es einen Bereich gibt,
Ungleichungen erfüllt sind. Schwieriger ist die F
im Falle 3) der alternativen Bedingungen, falls
gibt, für die $S_1 > 0$ und andere in denen $S_1 <$ (
man nach dem Vorbereitungssatze

$$S_1(x, y) = C_1 \cdot f_1(x, y) F_1(x, y)$$
$$S_2(x, y) = C_2 \cdot f_2(x, y) F_2(x, y),$$

wo die C, f, F analoge Bedeutung haben wie in §
man zu untersuchen haben, ob $f_1(x, y) = 0$ als Gle
reelle oder komplexe Wurzeln hat, und ferner ob aus
stets auch $C_2 f_2(x, y) > 0$ folge.

Gesetzt es seien die Bedingungen aufzustell
$F(w) > 0$ folge $G(w) > 0$, wenn $F(w)$ und $G(w)$
tionen von w sind. Man zerlege $F(w) = \Phi(w)$
$= \Psi(w)^2 g(w)$ wo die Funktionen f und g nur ein
haben. Ist $f(w)$ constant oder hat es nur kon

falle. Unter Umständen folgt die eine Aussage aus der anderen. Stellt man sich die beiden Gleichungen auf, von denen die eine die Werte von f für alle — reelle und komplexe — Nullen von g, und die andere die Werte von g in den Nullpunkten von f zu Wurzeln hat, so sind deren Koeffizienten rational durch die Koeffizienten von F und G ausdrückbar. Die eine von ihnen darf dann keine positiven, die andere keine negativen Wurzeln haben, was sich mit Sturmschen Reihen, vielleicht schon mit der Descartes'schen Zeichenregel, entscheiden läßt.

Wendet man diese Methode auf den vorhin erörterten Fall an, so kommt man wieder auf die Betrachtung von Potenzreihen nach x zurück. Hier dürfte es indessen bequemer sein für die Wurzeln von $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$ in bekannter Weise Reihenentwicklungen aufzustellen und mit deren Hilfe die Entscheidung nach den oben gegebenen Kriterien zu treffen.

Als Beispiel diene die Reihe

$$z^4 + z^2(3y^2 - x^3 + (x, y)_4 + \cdots) + y^4 + x^4 + (x, y)_5 + \cdots$$

die schon die Form der Funktion f hat.

In den Bezeichnungen von 4) ist $s = 0$, daher die Diskriminante $= 16(r^2 - 4t)^2 \cdot t$. Damit die Gleichung für z vier komplexe Wurzeln habe, muß also $t > 0$, und entweder $r^2 - 4t < 0$ oder $r^2 - 4t \geq 0$ und $r > 0$ sein. Setzt man

$$(x, y)_5 = d_0 x^5 + d_1 x^4 y + \cdots d_5 y^5$$

so wird

$$t = y^4 + y^3(d_3 x^2 + \cdots) + y^2(d_2 x^3 + \cdots) + y(d_1 x^4 + \cdots)$$
$$+ x^4 + d_0 x^5 \cdots = f_1(x, y).$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{4}(d_3 x^2 + \cdots)$ folgt

$$f_1(x, y) = \eta^4 + \eta^2(d_2 x^3 + \cdots) + \eta(d_1 x^4 + \cdots$$
$$+ x^4 + d_0 x^5 + \cdots$$

gibt sich

$$5\,y^4 - 6\,y^2 x^2 - 3\,x^4 - 4\,(x,y)_5 + 6\,y^2\,(x,y)_4 - 6\,x^2($$

Setzt man diese Reihe $S_4(x\,y)$ und bestimmt d

so wird $C_2 = 5$,

$$f_2(x,y) = y^4 + y^3\left(-\frac{4}{5}d_3 x^2 + \cdots\right) + y^2\left(-\frac{6}{5}x\right.$$

$$+ y\left(-\frac{4}{5}d_1 x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5}x^4 + \cdots$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{5}d_3 x^2 + \cdots$ folgt

$$f_2(x,y) = \eta^4 + \eta^2\left(-\frac{6}{5}x^3 + \cdots\right)$$

$$+ \eta\left(\left(-\frac{4}{5}d_1 + \frac{12}{5}d_3\right)x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5}x^4 +$$

Da die Diskriminante

$$= -\left(16\cdot\frac{6^4}{5^4}\cdot\frac{3}{5} + 128\cdot\frac{6^2}{5^2}\cdot\frac{9}{25} + 256\frac{3^3}{5^3}\right)x^{12}\cdot$$

ist, so hat $f_2(x,y) = 0$ zwei reelle und zwei komple

und folglich kann $r^2 - 4\,t = S_2(x,y)$ positiv oder n

Somit liegt der Fall 3) vor und wir haben noch

zu betrachten. Hier findet sich $C_3 = 3$ und

$r > 0$ oder aus $f_2(x, y) > 0$ $f(x, y) > 0$ folgen. Da $f_2(x, y) = 0$ nur zwei reelle Wurzeln y hat, so genügt es hiezu, daß die Nullen von $f_1(x, y)$ die Funktion $f_2(x, y) < 0$ machen. Jene Nullen haben die Entwickelung

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots \text{ und } y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots$$

Trägt man in $f_2(x, y)$ ein, so erhält man beidemale $-\frac{8}{9}x^4 + \cdots$ Alles zusammengenommen folgt also, daß es für die x, y einen Bereich gibt, in dem die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat und somit stets > 0 bleibt. Aber die Diskriminante kann auch Null werden. Dies tritt ein für $t = 0$ und $r^2 - 4t = 0$, also für die Kurven $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$. Die erstere hat, wie oben bewiesen, außer $(x = y = 0)$ keinen reellen Punkt in der Nähe des Ursprungs. Die zweite geht aber mit zwei reellen Ästen durch den Ursprung, und für sie wird

$$f(x, y, z) = \left(z^2 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

also $= 0$, wenn $z^2 + \frac{r}{2} = 0$ ist. Für die reellen Wurzeln von $f_2(x, y) = 0$ ergibt sich

$$y = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{24}}{5}}\, x + \cdots$$

$$r = \frac{1}{5}(3\sqrt{24} + 4)x^2 + \cdots$$

$$z^2 = -\frac{1}{10}(3\sqrt{24} + 4)x^2 + \cdots;$$

also werden, für kleine x, auch wenn die Deskriminante Null ist, die Wurzeln von $f(x, y, z) = 0$ imaginär, folglich wird diese Funktion in der Nähe des Ursprungs überhaupt nicht Null und bleibt beständig > 0. Sie hat demnach im Ursprung ein eigentliches Minimum.

§ 3.

Wenn man die Bedingungen für komplexe Wurzeln stets durch eine Reihe von Ungleichungen darstellen könnte, ohne Alternative, könnte man das geschilderte Verfahren auf Funktionen von beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Sicher geht dies an, wenn die Glieder niedrigster Dimension in allen vorkommenden Reihen von der zweiten Dimension sind.

Gegenüber den Methoden von Scheeffer, Stolz und Dantscher[1]) hat die obige den Vorteil, daß sie theoretisch übersichtlicher ist und in jedem Fall die Entscheidung liefert. Ein Nachteil ist, wenigstens zur Zeit, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lauter komplexe Wurzeln einer Gleichung nur für Gleichungen der niedrigsten Grade bekannt sind und für Gleichungen höherer Grade erst durch die Sturmschen Reihen gebildet werden müssen. Ferner ist bei Funktionen von mehr als drei Veränderlichen die Anwendung von Reihenentwicklungen nicht stets möglich und damit unter Umständen die Entscheidung nach der im § 2 entwickelten Methode mühsam.

[1]) Zitate findet man in der Enzykl. d. Math. Bd. 2, Teil 1 [illegible]

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 7. Juli 1906.

1. Herr Paul Groth hält einen Vortrag: „Über die Krystallstruktur des Ammoniumjodides und seiner Alkylderivate." Die Abhandlung wird in der Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie veröffentlicht werden.

Auf Grund der neueren Anschauungen über die Krystallstruktur wurde an Modellen erläutert, wie sich von der kubischen Krystallstruktur des Ammoniumjodides die tetragonale Struktur des Tetramethyl- und des Tetraäthylammoniumjodides ableiten läßt, und aus diesen sich die Struktur und somit auch die Krystallform und die Volumenverhältnisse des intramediären Dimethyldiäthylammoniumjodides in einer mit der Erfahrung übereinstimmenden Weise ergeben.

2. Herr Alfred Pringsheim spricht „Über das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen."

Auf gemeinsamer, überaus einfacher Grundlage werden die Additions-Theoreme sowohl der Weierstraß'schen Pe-Funktion als auch der Jacobi'schen Funktionen hergeleitet, ohne daß von deren Darstellung durch Sigma- bezw. Theta-Quotienten Gebrauch gemacht wird.

3. Herr August Rothpletz legt eine Fortsetzung zu den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacher'schen Tian-Schan-Expedition vor; nämlich „III. Die Gesteine des Profiles durch das südliche Musart-Tal im zentralen Tian-Schan" von P. A. Kleinschmidt und P. H. Limbrock, S. V. D. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Über
das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

Die im folgenden mitgeteilte Methode zur Herleitung des Additions-Theorems der elliptischen Funktionen dürfte zwar kaum danach angetan sein, auf prinzipielle Neuheit irgendwelchen Anspruch zu erheben. Immerhin ist sie wohl, wie ich glaube, in der hier angegebenen Weise bisher nicht durchgeführt worden, scheint mir aber andererseits einer solchen Durchführung nicht unwert, da sie auf gemeinsamer, überaus einfacher Grundlage ganz direkt und ohne jeden Kunstgriff nicht nur die verschiedenen Formen des Additions-Theorems für das Weierstraßsche $\wp u$, sondern auch die Additions-Theoreme für die Jacobischen Funktionen $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ liefert. Dabei wird von der Darstellung der Funktionen $\wp u$ bzw. $sn\,u$ durch Sigma- bzw. Theta-Quotienten keinerlei Gebrauch gemacht. Als Beweismittel dienen vielmehr lediglich die bekannten Liouvilleschen Sätze über Anzahl und Summe der Nullstellen bzw. Pole einer doppelt-periodischen Funktion und die Differentialgleichung für $\wp u$ bzw. $sn\,u$.

§ 1.
Additions-Theorem für gewisse doppelt-periodische Funktionen zweiter Ordnung.

Es sei $\varphi(u)$ eine eindeutige doppelt-periodische Funktion, welche im ersten Perioden-Parallelogramm nur für $u=0$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich wird. Es ist dann

also $\varphi(u)$ eine doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung und zwar allemal eine **gerade** Funktion[1]). Denn, da die Summe der im ersten Perioden-Parallelogramm gelegenen Pole den Wert 0 hat, so wird:

$$\varphi(v) = \varphi(u), \text{ wenn: } u + v = 0,$$

d. h. man hat in der Tat:

$$\varphi(-u) = \varphi(u).$$

Es seien ferner u_1, u_2 zwei beliebige Zahlen von der Beschaffenheit, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ **nicht unendlich** und **von einander verschieden**, d. h. man habe, wenn die Perioden von $\varphi(u)$ mit 2ω, $2\omega'$ bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & u_1 \not\equiv 0 & u_2 \not\equiv 0 \\ (2) & u_2 \not\equiv -u_1 & \\ (3) & u_2 \not\equiv u_1 & \end{array}\right\} (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Setzt man sodann:

$$(4) \qquad \frac{\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)} = Q,$$

so besteht die Identität:

$$(5) \qquad \varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) = \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2),$$

und, wenn noch gesetzt wird:

$$(6) \quad \left.\begin{array}{l} \varphi'(u_1) - Q \cdot \varphi(u_1) \\ \varphi'(u_2) - Q \cdot \varphi(u_2) \end{array}\right\} = R, \text{ also: } R = \frac{\varphi(u_1)\varphi'(u_2) - \varphi(u_2)\varphi'(u_1)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)}$$

so folgt zunächst, daß der Ausdruck

$$\varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R$$

die beiden nach den Moduln 2ω, $2\omega'$ inkongruenten Nullstellen $u = u_1$ und $u = u_2$ und folglich, da er eine doppelt-

[1]) In der Tat folgt ja aus der Vorraussetzung, daß die fragl. Funktion von der Form

$$\varphi(u) = A \cdot \wp u + B$$

sein muß, wovon aber im Texte kein Gebrauch gemacht wird.

periodische Funktion dritter Ordnung mit dem dreifachen Pole $u = 0$ darstellt, noch die durch die Gleichung:

(7) $$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

definierte Nullstelle $u = u_3$ besitzen muß. Da hiernach:

(8) $$\varphi'(u) - Q \cdot \varphi(u) - R = 0 \quad \text{für } u = u_1, u_2, u_3,$$

so ergibt sich fürs erste, daß allemal die Relation besteht:

(9) $$\begin{vmatrix} \varphi'(u_1) & \varphi(u_1) & 1 \\ \varphi'(u_2) & \varphi(u_2) & 1 \\ \varphi'(u_3) & \varphi(u_3) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn u_1, u_2, u_3 irgend drei durch die Gleichung (7) verbundene, lediglich den Beschränkungen (1) — (3) genügende Zahlen bedeuten. Sie bleibt überdies auch noch giltig, wenn man die Beschränkung (3) fallen läßt, da im Falle $u_2 \equiv u_1 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ die Determinante (9) wegen Gleichheit zweier Zeilen identisch verschwindet.

Aus Gleichung (8) folgt nun weiter, daß für $u = u_1, u_2, u_3$:

$$\varphi'(u)^2 = (Q \cdot \varphi(u) + R)^2$$

also:

(10) $$\varphi'(u)^2 - Q^2 \cdot \varphi(u)^2 - 2\,Q\,R \cdot \varphi(u) - R^2 = 0.$$

Andererseits muß $\varphi(u)$ als eindeutige doppelt-periodische Funktion zweiter Ordnung mit zweifachem Pol einer Differentialgleichung von folgender Form genügen:[1])

(11) $$\varphi'(u)^2 = a_0 \cdot \varphi(u)^3 + a_1 \cdot \varphi(u)^2 + a_2 \cdot \varphi(u) + a_3$$

Durch Einsetzen dieser für jeden Wert von u giltigen Darstellung von $\varphi'(u)^2$ in die Gleichung (10) ergibt sich, daß die in Bezug auf $\varphi(u)$ kubische Gleichung

[1]) Zur Herleitung dieses Resultates ist es keineswegs erforderlich, den Weg über die Begebung $\varphi(u) = A \cdot \wp\, u + B$ oder irgend eine andere spezielle Darstellungsform für $\varphi(u)$ zu nehmen. Es genügt dazu, außer den Liouvilleschen Sätzen über Anzahl und Summe der Nullen bzw. Pole noch denjenigen heranzuziehen, welcher die Konstanz einer doppelt-periodischen Funktion ohne Pole besagt.

$$(12)\quad a_0 \cdot \varphi(u)^3 - (Q^2 - a_1) \cdot \varphi(u)^2 - (2\,QR - a_2) \cdot \varphi(u) - (R^2 - a_3) = 0$$

die Wurzeln $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ besitzt. Daraus folgt aber,[1]) daß:

$$(\mathrm{I})\qquad \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3) = \frac{1}{a_0} \cdot Q^2 - \frac{a_1}{a_0},$$

$$(\mathrm{II})\quad \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + (\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \cdot \varphi(u_3) = -\frac{2}{a_0} \cdot QR + \frac{a_2}{a_0},$$

$$(\mathrm{III})\qquad \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) \cdot \varphi(u_3) = \frac{1}{a_0} \cdot R^2 - \frac{a_3}{a_0}.$$

Man gewinnt also auf diese Weise drei verschiedene Formeln zur Darstellung von $\varphi(u_3)$, d. h. von $\varphi(u_1 + u_2)$, als rationale Funktion von $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, somit drei verschiedene Formen für das Additions-Theorem der Funktion $\varphi(u)$.

Schließlich kann man noch mit Hilfe einer einfachen Stetigkeits-Betrachtung die ursprünglich eingeführte, lediglich durch die für Q und R gewählte Form geforderte, nach Lage der Sache offenbar aber unnötige Beschränkung $u_2 \neq u_1$ (siehe Gl. (2)) beseitigen. Hierzu hat man Q und R nur in die Form zu setzen:

$$Q = \frac{\varphi'(u_1)^2 - \varphi'(u_2)^2}{(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,(\varphi'(u_1) + \varphi'(u_2))}$$

$$(13)\quad = \frac{a_0(\varphi(u_1)^2 + \varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + \varphi(u_2)^2) + a_1(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) + a_2}{\varphi'(u_1) + \varphi'(u_2)}$$

$$R = \frac{\varphi(u_1)^2 \cdot \varphi'(u_2)^2 - \varphi(u_2)^2 \cdot \varphi'(u_1)^2}{(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,(\varphi(u_1) \cdot \varphi'(u_2) + \varphi(u_2) \cdot \varphi'(u_1))}$$

$$(14)\quad = \frac{-a_0 \cdot \varphi(u_1)^2 \cdot \varphi(u_2)^2 + a_2\varphi(u_1) \cdot \varphi(u_2) + a_3(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))}{\varphi(u_1) \cdot \varphi'(u_2) + \varphi(u_2) \cdot \varphi'(u_1)}.$$

---

[1]) Man bemerke, daß $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_3)$ stets **alle möglichen** Wurzeln der kubischen Gl. (12) darstellen. Denn auf Grund der Voraussetzung (2) und (3) hat man stets $\varphi(u_2) \neq \varphi(u_1)$. Zugleich ist aber auch $\varphi(u_3) \neq \varphi(u_1)$ und $\varphi(\varphi u_3) \neq \varphi(u_2)$, außer wenn $u_2 \equiv -2u_1$ oder $u_2 \equiv -\frac{u_1}{2}$ (mod 2ω, $2\omega'$), in welchen Spezialfällen dann $\varphi(u_3) = \varphi(u_1)$ bzw. $\varphi(u_3) = \varphi(u_2)$ als Doppelwurzel auftritt.

§ 2.

Additions-Theorem der Funktion $\wp u$.

Die Funktion $\wp u$ besitzt offenbar genau den Charakter $\varphi(u)$. Man findet also zunächst, indem man in Gl. (9) $\varphi(u) = \wp u$ setzt:

$$\text{(15)} \quad \begin{vmatrix} \wp' u_1 & \wp u_1 & 1 \\ \wp' u_2 & \wp u_2 & 1 \\ \wp' u_3 & \wp u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (wenn } u_1 + u_2 + u_3 = 0 \text{ bzw. } \equiv 0\text{)},$$

eine Relation, welche sonst gewöhnlich als Folgerung aus dem Additions-Theorem der Funktion $\wp u$ hergeleitet wird[1]) und einer bekannten geometrischen Deutung (geradlinige Lage dreier Punkte der Kurve dritter Ordnung: $x = \wp u$, $y = \wp' u$) fähig ist.

Da die Gl. (11) hier die Form annimmt:

$$\text{(16)} \qquad (\wp' u)^2 = 4 \wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

so daß also:

$$\text{(17)} \qquad a_0 = 4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -g_2, \quad a_3 = -g_3,$$

so liefert die Gleichung (I), wenn man noch $\wp u_3$ durch $\wp(u_1 + u_2)$ ersetzt, das Additions-Theorem in der bekannten Form:

$$\text{(18)} \quad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \right)^2,$$

welche mit Benützung von Gl. (13) in die folgende, auch im Falle $u_2 = u_1$ brauchbare übergeht:

$$\text{(19)} \quad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{4(\wp^2 u_1 + \wp u_1 \cdot \wp u_2 + \wp^2 u_2) - g_2}{\wp' u_1 + \wp' u_2} \right)^2.$$

Die andere bekannte Form des Additions-Theorems resultiert sowohl aus Gl. (II), als aus Gl. (III). Man findet z. B. aus Gl. (III):

---

[1]) S. z. B. H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, p. 62.

sodaß sich ergibt:

$$(20)\ \wp(u_1+u_2)=\frac{\left(2\wp u_1\wp u_2-\frac{1}{2}g_2\right)(\wp u_1+\wp u_2)-\wp' u}{2(\wp u_1-\wp u_2)^2}$$

§ 3.

Die Additions-Theoreme der Funktionen snu,

Aus den Beziehungen

$$sn(u+2K)=-snu \qquad sn(u+2iK')=s$$
$$sn(2mK+2niK')=0 \qquad (m=0,\pm 1,\pm 2,$$

erkennt man, daß sn^2u die Perioden $2K$, $2iK'$ un ersten Perioden-Parallelogramm die einzige Nullst und zwar als zweifache Nullstelle besitzt. Es ist so wiederum eine Funktion vom Charakter $\varphi(u)$[1]) (wen setzt wird: $\omega=K$, $\omega'=iK'$). Aus Gl. (9) folgt d die Substitution von $\varphi(u)=sn^{-2}n$, also: $\varphi'(u)=-2s$

wenn man die betreffende Gleichung noch mit multipliziert:

$$(21)\ \begin{vmatrix} sn'u_1 & snu_1 & sn^3u_1 \\ sn'u_2 & snu_2 & sn^3u_2 \\ sn'u_3 & snu_3 & sn^3u_3 \end{vmatrix}=0\ (\text{wenn } u_1+u_2+u_3=0$$

eine Relation, welche in analogem Zusammenhange, wie die Gl. (15) auftritt, wenn man die Theorie der Kurven dritter Ordnung mit homogenen statt mit rechtwinkeligen Koordinaten behandelt.[1])

Aus der Differentialgleichung:

$$(sn'u)^2 = (1 - sn^2 u)(1 - k^2 sn^2 u)$$

folgt sodann durch Multiplikation mit $(-2 sn^{-3} u)^2 = 4 sn^{-6} u$:

$$(-2 sn^{-3} u \cdot sn' u)^2 = 4 sn^{-2} u (sn^{-2} u - 1)(sn^{-2} u - k^2),$$

sodaß also die Differential-Gleichung für $\varphi(u) = sn^{-2} u$ folgendermaßen lautet:

$$\varphi'(u)^2 = 4\varphi(u)^3 - 4(1 + k^2)\varphi(u)^2 + 4k^2\varphi(u). \tag{22}$$

Man übersieht unmittelbar, daß die einfachste Form des Additions-Theorems hier durch Anwendung der Formel (III) resultieren muß. Man findet (wegen $a_3 = 0$) auf diese Weise:

$$sn^{-2} u_1 \cdot sn^{-2} u_2 \cdot sn^{-2} u_3$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2 sn^{-2} u_1 \cdot sn^{-3} u_2 \cdot sn' u_2 + 2 sn^{-2} u_2 \cdot sn^{-3} u_1 \cdot sn' u_1}{sn^{-2} u_1 - sn^{-2} u_2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{sn\,u_1 \cdot sn' u_2 - sn\,u_2 \cdot sn' u_1}{sn\,u_1 \cdot sn\,u_2 (sn^2 u_2 - sn^2 u_1)}\right)^2$$

und daher:

$$sn^2 u_3 = \left(\frac{sn^2 u_2 \cdot sn^2 u_1}{sn\,u_1 \cdot sn' u_2 - sn\,u_2 \cdot sn' u_1}\right)^2. \tag{23}$$

Daraus folgt, wegen $sn\,u_3 = -sn(u_1 + u_2)$, zunächst:

$$sn(u_1 + u_2) = \varepsilon \cdot \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{sn\,u_1 \cdot sn' u_2 - sn\,u_2 \cdot sn' u_1}, \tag{24}$$

---

[1]) S. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I (1876), p. 606, Gl. (8). (Es muß dort übrigens p. 604, Gl. (5) statt:

$$\varrho\, x_1 = \sin^3 \mathrm{am}\, u$$

heißen:

$$\varrho\, x_1 = k^2 \sin^3 \mathrm{am}\, u).$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Da aber Gl. (23) und somit Gl. (24) infolge der Stetigkeit von $sn\,u$ bei $u = 0$ auch noch für den ursprünglich ausgeschlossenen Fall $u_2 = 0$ gilt, so folgt, wegen $sn'\,0 = 1$:

$$sn\,u_1 = \varepsilon \cdot \frac{sn^2 u_1}{sn\,u_1}, \text{ also } \varepsilon = +1,$$

und somit schließlich:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{sn\,u_1 \cdot sn'\,u_2 - sn\,u_2 \cdot sn'\,u_1}. \tag{25}$$

Um auch diese Formel zu einer für den bisher ebenfalls ausgeschlossenen Fall $u_2 = u_1$ brauchbaren umzugestalten, hat man wieder nur Zähler und Nenner der rechten Seite mit einem passenden Faktor, nämlich $(sn\,u_1 \cdot sn'\,u_2 + sn\,u_2 \cdot sn'\,u_1)$ zu multiplizieren und zu beachten, daß:

$$\begin{aligned} & sn^2 u_1 \cdot sn'^2 u_2 - sn^2 u_2 \cdot sn'^2 u_1 \\ = {} & sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_2) - sn^2 u_2 \cdot cn^2 u_1 \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1) \\ = {} & (sn^2 u_1 - sn^2 u_2) \cdot (1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2), \end{aligned}$$

sodaß sich schließlich das fragliche Additions-Theorem in der zumeist üblichen Form ergibt:

$$sn(u_1 + u_2) = \frac{sn\,u_1 \cdot cn\,u_2 \cdot dn\,u_2 + sn\,u_2 \cdot cn\,u_1 \cdot dn\,u_1}{1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2} \tag{26}$$

Will man hieraus lediglich mit Hilfe der Beziehungen:

$$\begin{cases} cn^2(u_1 + u_2) = 1 - sn^2(u_1 + u_2) \\ dn^2(u_1 + u_2) = 1 - k^2 sn^2(u_1 + u_2) \end{cases} \tag{27}$$

auch noch die entsprechenden Formeln für $cn(u_1 + u_2)$, $dn(u_1 + u_2)$ herleiten, so läßt sich die erforderliche Rechnung etwa in folgender Weise ziemlich einfach durchführen.

Es werde gesetzt:

$$1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2 = N. \tag{28}$$

Die Substitution von $1 = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2$ liefert alsdann für N die beiden Ausdrücke:

$$N = cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \cdot dn^2 u_2 = cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1$$

und somit für N^2 dem symmetrischen Ausdruck:

$$(29) \qquad N^2 = (cn^2 u_1 + sn^2 u_1 \cdot dn^2 u_2)(cn^2 u_2 + sn^2 u_2 \cdot dn^2 u_1).$$

Ebenso ergibt sich aus dem Ausdrucke für N durch Substitution von $1 = dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 = dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2$:

$$(30) \quad N^2 = (dn^2 u_1 + k^2 sn^2 u_1 \cdot cn^2 u_2)(dn^2 u_2 + k^2 sn^2 u_2 \cdot cu^2 u_1).$$

Durch Einführung von (29) bzw. (30) in die rechte Seite der mit N^2 multiplizierten Beziehungen (27) findet man dann aber ohne weiteres:

$$(31) \quad \begin{cases} N^2 \cdot cn^2(u_1 + u_2) = (cn u_1 \cdot cn u_2 - sn u_1 \cdot dn u_1 \cdot sn u_2 \cdot dn u_2)^2 \\ N^2 \cdot dn^2(u_1 + u_2) = (dn u_1 \cdot dn u_2 - k^2 \cdot sn u_1 \cdot cn u_1 \cdot sn u_2 \cdot cn u_2)^2 \end{cases}$$

und, da sich das Vorzeichen der Quadratwurzeln wieder unmittelbar durch Substitution von $u_2 = 0$ bestimmen läßt, so erhält man auf diese Weise in der Tat die bekannten Formeln für $cn(u_1 + u_2)$, $dn(u_1 + u_2)$.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 147. Stiftungstages

am 14. März 1906.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Wir haben im Frühling des vorigen Jahres dem volkstümlichsten Dichter der Deutschen unsere Huldigung dargebracht; wir haben in der Novembersitzung aus Anlaß des bevorstehenden Zentenariums die Schöpfer des modernen Staates Bayern dankbar gefeiert; nun wandeln wir auch den heutigen Stiftungstag in einen Festtag, indem wir das Bild eines Kollegen unter den Laren unseres Hauses aufstellen und seinem Gedächtnis Kränze flechten. Da möchte der ferner Stehende wohl den Eindruck gewinnen, daß wir uns zu Heroenkult und Festgepränge allzu willig „vom Kalender kommandieren" ließen. Doch der Vorwurf wäre nicht berechtigt, denn es gilt heute nicht so fast ein längst verehrtes Ehrenmal zu schmücken, als ein altes Unrecht zu sühnen. Handelt es sich doch um einen Forscher, der in zielbewußter, rastloser Arbeit seine ganze Kraft aufgezehrt, sein Leben lang aber Enttäuschung und Zurücksetzung geerntet hat! Sollte da nicht der Nachwelt die Verpflichtung obliegen, durch einen ehrerbietigen Gruß der Treue den Dank zu erstatten, den die Zeitgenossen kurzsichtig versagt haben?

Freilich, wenn die Bewertung eines Gelehrten davon abhinge, ob sein Name in aller Welt Mund oder doch in weiten Kreisen der Gebildeten bekannt sei, dürfte unser Johann Kaspar

Zeuss kaum zu den Großen gezählt werden. Wie wenige wissen oder wußten bis vor kurzem etwas von der Grammatica celtica und ihrem Verfasser! Da aber der Gradmesser der Bedeutung eines Gelehrten nur darin zu suchen ist, welchen Fortschritt, welche Förderung ihm die Wissenschaft zu danken hat, da nicht in der Celebrität, sondern in der Autorität das maßgebende Moment zu erblicken ist, darf der Maurersohn aus dem fränkischen Dörfchen Vogtendorf im auserlesensten Kreis berühmter Bayern des 19. Jahrhunderts einen Ehrenplatz beanspruchen.

Es ist nicht meine Aufgabe, auf die Werke und Tage des Gefeierten näher einzugehen. Von einem berufeneren Redner wird Ihnen dargelegt werden, wie sich diese geistige Kraft entwickelt, wie Zeuß auf den Gebieten der Sprachkunde, der Ethnologie und der Geschichtswissenschaft als Entdecker in die Nähe und Weite für alle Zeiten gewirkt hat.

Nur mit ein paar Worten möchte ich Zeugnis ablegen, daß auch mir das Herz aufging, als ich aus Anlaß der bevorstehenden Jahrhundertfeier mich eingehender mit unserem gelehrten Landsmann beschäftigte. Welch harmonisches, reines, gerade in seiner rührenden Bescheidenheit bedeutendes Lebensbild! Welche Hingebung an den Forscherberuf! Welche Arbeitskraft! Und ebenso in den Schriften: welche Schlichtheit, welche Größe! Einzelheiten mögen veraltet sein, als Ganzes sind die hier niedergelegten Lösungen wichtiger Probleme unerreicht und unerschüttert.

Doch unter wie trüben Verhältnissen mußten diese Werke geschaffen werden! Eine Passionsgeschichte rollt sich vor uns auf. Auch Zeuß mußte, wie unzählige andere, die Erfahrung machen, daß der Dienst der Wissenschaft mit Entbehrung verknüpft ist und die Sehnsucht nach Wahrheit eine treue Gefährtin nötig hat, die Geduld. Er brauchte ja nicht gerade Not zu leiden, doch aus ärmlichen Verhältnissen konnte er sich niemals emporringen, und peinliche Enttäuschungen begleiteten seine Erdentage mit unbarmherziger Treue. Die für Zeitgenossen und Nachwelt so fruchtbringende Arbeit brachte ihm keinen Lohn. Die Aufnahme in unsere Akademie — er

war von 1842—1847 korrespondierendes Mitglied der philosophisch-philologischen, von 1847—1856 ordentliches, später wieder korrespondierendes Mitglied der historischen Klasse — war fast die einzige Auszeichnung, die ihm zuteil wurde. In der Gelehrtenwelt Deutschlands, der Urheimat der Sprachwissenschaft, wurden zwar die bahnbrechenden Schriften selbstverständlich mit Hochachtung aufgenommen, aber man kümmerte sich nicht um den Verfasser. „Auch im Gelehrtenberuf", sagt Ernst Curtius, „wird das Glück immer als das größte Verdienst anerkannt; nach dem, was man durch stille, entsagungsvolle Arbeit zu stande bringt, fragen nur wenige!"

Wenn es sich um Anstellung handelte, wurde zwar seine „scientifische Bildung" von den maßgebenden Persönlichkeiten gnädig anerkannt, doch die Türen blieben ihm verschlossen. Von der Universität Würzburg wird er abgelehnt, weil eine Professur für deutsche Philologie nicht notwendig sei, — von Erlangen bleibt er ausgeschlossen, weil die philosophische Fakultät den Bewerber nicht genügend kenne, — in Berlin findet er angeblich aus konfessionellen Gründen keine Aufnahme. Vom Archivdienst, für welchen er wie geschaffen gewesen wäre, wurde er von Hormayr mit spöttischen Witzen zurückgewiesen. Endlich verlieh das Ministerium Maurer-Zenetti dem Vierzigjährigen in München eine Professur für allgemeine Weltgeschichte, doch nun vermochte sich der schüchterne, für den Katheder ohnehin wenig geeignete Mann in den neuen Wirkungskreis nicht mehr zu finden. Es war schon nicht mehr zweifelhaft, daß er einer in seiner Familie erblichen, tückischen Krankheit zum Opfer fallen werde; der Arme mußte seinen Benediktinerfleiß mit immer häufigeren Blutopfern bezahlen. Es war ihm nicht mehr möglich, sich im weiten Hörsaal verständlich zu machen; die Zuhörerschaft lichtete sich immer auffälliger; er wurde im Kollegium als Drohne angesehen und vermutlich auch als solche behandelt. Welche Pein für eine feinfühlige Natur! Es begreift sich, daß er eine Versetzung an das Bamberger Lyzeum mit erheblich vermindertem Gehalt als erlösende Wohltat empfand. Einsam verlebte er in der Main-

stadt seine letzten Lebensjahre, doch sie entbehrten nicht der Sonnenstrahlen des Glückes. Ersatz für Familienfreuden und heiteren Lebensgenuß bot ihm die Arbeit, dieser glückselige Fluch, womit Gott das Menschengeschlecht in Wahrheit gesegnet hat. Die Arbeit gab ihm einen Frieden, den Frau Welt nicht zu geben vermag. Die menschliche Sprache war für ihn das Buch des Lebens, und die Erforschung ihrer Gesetze gewährte ihm Anregung, Befriedigung, Erhebung. Sein Umgang beschränkte sich nur noch auf irische Mönche der Merowinger- und Karolingerzeit, deren Glossen ihm den Stoff zu der seit langem in Angriff genommenen keltischen Grammatik boten. Während die Forscher auf anderen Gebieten, wie der Landmann bei günstigem Erdreich, nur den Samen in die Krume zu streuen brauchen, mußte Zeuß erst eine Wildnis urbar machen durch Beseitigung der Auswüchse einer Keltomanie, die das Wissen über die keltische Völkerfamilie nicht bereichert, nur verwirrt hatte. Gott ließ ihn die Freude erleben, daß dichte Saat, wogend im Felde, den Samen zurückgab; er konnte noch die keltische Grammatik vollenden, das monumentale Werk, dem nur die deutsche Grammatik von Jakob Grimm und die Grammatik der romanischen Sprachen von Diez ebenbürtig zur Seite stehen. Kaum war das Tagewerk vollbracht, so erlosch das nur der Wissenschaft geweihte Leben.

Auf eine Persönlichkeit, die sich auf ganz anderem Gebiete Ruhm und Ehre erkämpfte, auf Prinz Eugen, den edlen Ritter, hat der Dichter Jean Baptiste Rousseau das Wort geprägt: „Nie war in andrem Manne so viel Einfachheit mit so viel Größe vereinigt!“ Dieses Wort darf auch auf Sinnesart und wissenschaftliche Taten unseres Zeuß angewendet werden.

Ein Name ohne Makel! Eine Erinnerung ohne Schatten!

Im Jahre 1903 hat die Akademie zur Bewerbung um einen Preis aus dem Zographosfonds folgende Preisaufgabe ausgeschrieben:

„Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums auf Grund der literarischen und monumentalen Überlieferung".

Hiefür sind zwei Bewerbungen eingelaufen.

Die erste mit dem Motto: *Δῖνος βασιλεύει τὸν Δί' ἐξεληλακώς* ist eine hochbedeutsame wissenschaftliche Leistung, welche sich durch gründliche Sachkenntnis, scharfsinnige Kombination und umsichtiges Urteil auszeichnet. Sie bietet neues Material und neue Gesichtspunkte. Gleich im ersten Abschnitt, welcher „über meteorologische Instrumente" betitelt ist, wird ein bei Antikythera im Meere gefundenes Bronzeinstrument als eine Art Planetarium erkannt. Ferner wird unter anderem ein Fragment des Meteorologen Arrian über Ebbe und Flut aus dem Lateinischen des Priscianus Lydus in das Griechische zurückübersetzt und in der Hauptsache auf Poseidonios zurückgeführt. Überhaupt werden verschiedene Quellenschriften der antiken Meteorologie in ihrem gegenseitigen Verhältnis untersucht und wird vor allem die Bedeutung des Poseidonios für die meteorologische Forschung in ihrem vollen Umfange festgestellt.

Leider ist der Verfasser infolge äußerer Hemmnisse nicht über diese Vorarbeiten hinaus zur Hauptsache, zu einer systematischen Feststellung der meteorologischen Theorien gekommen. Deshalb kann ihm der Preis nicht zuerkannt und nur der lebhafte Wunsch ausgesprochen werden, der Verfasser möge seine vielversprechenden Forschungen fortführen und bald in der Lage sein, deren Ergebnisse zu veröffentlichen.

Die zweite Bearbeitung mit dem Motto: *τότε γὰρ οἰόμεθα γιγνώσκειν ἕκαστον κτλ.* besteht aus zwei Teilen. Der Verfasser, welcher Meteorologie im Sinne der Alten auffaßt, so daß auch Fragen der Geophysik und Astronomie diesem Gebiete zufallen, geht von der Ansicht aus, daß nach der Auffassung der griechi-

schen Philosophen alle meteoren Erscheinungen aus der Wirksamkeit der vier Elemente hervorgehen, und gibt deshalb im ersten Teile eine ausführliche Darlegung, wie sich die Vorstellungen von den vier Elementen bei den griechischen Philosophen und Naturforschern gebildet und entwickelt haben. Wenn in dieser Darlegung auch die eine oder andere Aufstellung nicht einwandfrei erscheint, so ist damit doch eine breite Unterlage für den zweiten, den systematischen Teil gewonnen, in welchem eine umfassende Darstellung der alten Meteorologie geboten wird, die den inneren Zusammenhang der Theorien verfolgt und deren Haltbarkeit teilweise an den Ergebnissen moderner Forschung prüft. Hiernach trägt die Akademie kein Bedenken, der mit umfassender Gelehrsamkeit abgefaßten, nahezu druckfertigen Abhandlung den Preis zuzuerkennen.

Als Verfasser ergibt sich Geheimer Regierungsrat, Professor Dr. Otto Gilbert, Bibliotheksdirektor a. D. in Halle a/S.

Aus dem Thereianos-Fonds konnten folgende Unterstützungen gewährt werden:

1. 1500 M. für das von Adolf Furtwängler und Reichhold herausgegebene Werk über „Griechische Vasenmalerei“,

2. 1500 M. für die von Karl Krumbacher herausgegebene „Byzantinische Zeitschrift“,

3. 1000 M. an Professor Spyridion Lampros in Athen für eine wissenschaftliche Reise nach Italien zu Forschungen über die Geschichte des Despotats des Peloponnes unter den Paläologen,

4. 1100 M. für Dr. Paul Marc in München zu einer wissenschaftlichen Reise auf dem Athos zum Zwecke von Handschriftenstudien,

5. 600 M. für Dr. Ludwig Curtius in München zu archäologischen Untersuchungen im westlichen Kleinasien.

Endlich wurde dem Ephoros Georgios Sotiriades in Athen für seine wertvollen Untersuchungen über die Topographie und die älteste Kulturgeschichte von Böotien und Phokis ein Preis von 800 M. zuerkannt.

Im Anschluß an die Mitteilung über den Thesaurus linguae Latinae vom November 1904 ist jetzt mitzuteilen, daß der Reservefonds für den Thesaurus, eine Stiftung Geheimrats von Wölfflin, gegenwärtig 18,500 M. beträgt. Es mag noch hervorgehoben werden, daß der bayerische Staat zu diesem großen Unternehmen, von dem Ostern 1906 der zweite, gleichfalls über 1000 Seiten starke Foliant erscheinen wird, jährlich 5000 M. und außerdem 2500 M. zum Gehalt des ersten Sekretärs, Professor Dr. Hey, beiträgt und daß die philosophisch-philologische Klasse in den letzten Jahren etwa 500 M. für einen vom Thesaurus nur mit 1200 M. honorierten bayerischen Assistenten beigesteuert hat.

Generalredaktor Professor Vollmer ist infolge Übernahme eines Ordinariats an unserer Universität von der Leitung des Thesaurus zurückgetreten und als Mitglied der Kommission kooptiert worden. Als sein Nachfolger wurde Dr. Eugen Lommatzsch, Privatdozent in Freiburg i. Br., berufen. Der zweite Redaktor, Professor Ihm, tritt aus, um einem Rufe nach Halle Folge zu leisten; nach Ablehnung der Stelle durch Professor Hey wurde Privatdozent Dr. Berthold Maurenbrecher von Halle berufen.

Die Zinsen der Savigny-Stiftung standen dieses Jahr unserer Akademie zur Verfügung.

Auf Vorschlag der Kommission der Savigny-Stiftung beschloß unsere Akademie, sie in folgender Weise zu verwenden:

1. 600 M. an das Kuratorium der Savigny-Stiftung zur Unterstützung des Honorarfonds der Savigny-Zeitschrift für Rechtsgeschichte,

2. 4400 M. an den Reichsarchivassessor Dr. Hermann Knapp als Beitrag zu den Druckkosten seines zweibändigen Werkes über die Zentordnungen des Hochstifts Würzburg.

Aus den Zinsen der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung wurden bewilligt:

1. 500 M. für Professor Dr. Oskar Schultze in Würzburg zur Untersuchung der feineren Struktur des elektrischen Organs der Fische,

2. 1500 M. für den Studierenden Hans Prandtl in München zur Untersuchung der Sagittawürmer in der Bucht von Messina,

3. 2500 M. für den Kustos des Botanischen Museums in München, Dr. Hermann Roß, zur Erforschung bestimmter Wechselbeziehungen zwischen Tier- und Pflanzenwelt der Tropen des mittleren Amerika,

4. 500 M. für den Assistenten der anatomischen Anstalt zu München, Dr. Albert Hasselwander, zu einer Forschungsreise nach Dalmatien.

Endlich ist noch der Ehrung eines Mitglieds unserer Akademie Erwähnung zu tun.

Auf Wunsch unseres Kollegen Professor Königs ist die von ihm begründete Stiftung „zur Förderung chemischer Forschungen" aus Anlaß des 70. Geburtstags Adolf von Baeyers umgewandelt worden in eine Adolf von Baeyer-Jubiläumsstiftung.

Zugleich ist das Kapital durch eine neue Spende des Stifters auf 50,000 M. erhöht worden.

Möge der gefeierte Name, den die Stiftung nunmehr trägt, für alle Forschungen, die in Zukunft aus diesem Fonds Unterstützung finden werden, ein glückliches Omen sein!

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit, teilt mit, daß die mathematisch-physikalische Klasse in dem vergangenen Jahre sieben Mitglieder durch den Tod verloren hat:

Das ordentliche Mitglied:

Dr. Carl v. Orff, Generalmajor a. D., gestorben den 27. September 1905.

Die auswärtigen Mitglieder:

Dr. Otto Wilhelm v. Struve, Direktor der russischen Sternwarte in Pulkowa, gestorben am 14. April 1905;

Dr. Albert v. Kölliker, Professor der Anatomie an der Universität zu Würzburg, gestorben am 2. November 1905.

Die korrespondierenden Mitglieder:

Dr. Georg Meißner, Professor der Physiologie an der Universität zu Göttingen, gestorben am 30. März 1905;

Dr. Walther Flemming, Professor der Anatomie an der Universität zu Kiel, gestorben am 4. August 1905;

Dr. Ferdinand Frhr. v. Richthofen, Professor der Geographie an der Universität zu Berlin, gestorben am 6. Oktober 1905;

Dr. Otto Stolz, Professor der Mathematik an der Universität zu Innsbruck, gestorben am 23. November 1905.

Carl v. Orff.[1])

Am 27. September 1905 ist das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, der Generalmajor a. D. Dr. Carl v. Orff im Alter von 77 Jahren verschieden. Ein ungemein reiches Leben liegt hiermit abgeschlossen vor uns, denn der Verstorbene war nicht nur ein hervorragender Offizier, sondern auch ein bedeutender Gelehrter, der durch

[1]) Siehe den Nekrolog von Professor Dr. Karl Oertel, Allg. Zeitung, Beilage vom 1. Oktober 1905, Nr. 227, und Vierteljahrschrift der astron. Ges. 1906, 41. Jahrg., 1. Heft, S. 3.

seine wissenschaftliche Tätigkeit die theoretische und praktische Geodäsie wesentlich gefördert hat.

Er wurde in München als der Sohn eines Kriegsrates am 23. September 1828 geboren und erhielt seine erste Erziehung im K. Kadettenkorps, da die Tradition der Familie ihn für die militärische Laufbahn bestimmt hatte. Schon hier erregte er durch sein Talent und seinen Fleiß die Aufmerksamkeit seiner Lehrer, insbesondere durch seine Befähigung und seine Kenntnisse in der Mathematik. Darum wurde er als 23jähriger Leutnant zur mathematischen Sektion des topographischen Bureaus kommandiert, wodurch er in die Bahn gelenkt wurde, auf welcher er so Ausgezeichnetes leisten sollte. In dieser Stellung machte er unter der Leitung des verdienten Direktors des topographischen Bureaus Friedrich Weiß zunächst umfassende Terrainaufnahmen in der westlichen Pfalz und dann Zenithdistanzmessungen in weiteren Gebieten Bayerns. Ein längerer zur Ausbildung benützter Urlaub führte ihn nach Paris, woselbst er unter anderen den berühmten Mathematiker Cauchy, an welchen er empfohlen war, näher kennen lernte. Als Hauptmann im topographischen Bureau des Generalquartiermeisterstabes machte er den Feldzug des Jahres 1866 mit, in dem er Leiter der Feldtelegraphenabteilung war.

Orff hörte nicht auf, größtenteils durch Selbststudium, an der Vervollkommnung seiner Kenntnisse und Erfahrungen eifrigst zu arbeiten. In diesem Bestreben verbrachte er nach Beendigung des Feldzugs seine Urlaubszeit an der Sternwarte zu Bogenhausen zu, die damals unter der Leitung unseres verstorbenen Mitgliedes, des berühmten Astronomen Johann Lamont stand, der sich insbesondere durch seine erdmagnetischen Untersuchungen große Verdienste erworben hat. Die Bekanntschaft und spätere innige Freundschaft mit diesem hervorragenden Gelehrten war von großem Einfluß auf Orffs Entwicklung; die Anregung zu seinen wertvollen astronomisch-geodätischen Studien und Beobachtungen verdankt er seinem Lehrer Lamont.

Mittlerweile war Orff (1867) zum Dozenten für reine und angewandte höhere Mathematik an der damals gegründeten

Kriegsakademie ernannt worden, welches ihm sehr zusagende Amt er als äußerst beliebter Lehrer 33 Jahre lang ausübte. Im Jahre 1868 erfolgte seine Beförderung zum Major und zum Direktor des topographischen Bureaus an Stelle des verstorbenen Obersten Weiß. Als solcher hat er sich durch seinen unermüdlichen Pflichteifer und durch das volle Verständnis der wichtigen Aufgabe sehr verdient gemacht; es ist ihm durch seine wissenschaftlichen und praktischen Kenntnisse gelungen, das seiner Leitung unterstellte Institut während 22 Jahren ganz auf der Höhe der schnell fortschreitenden Zeit zu erhalten. Namentlich verdankt man ihm die Neubearbeitung und Herausgabe der 50 000-teiligen Blätter des topographischen Atlas von Bayern sowie der 250 000-teiligen Blätter der Karte von Südwestdeutschland (der Generalquartiermeisterstabskarte); als eine praktische Leistung, an welcher Orff den rühmlichsten Anteil hat, darf die bekannte prompte Ausrüstung der bayerischen und teilweise auch der preußischen Armee mit Kriegskarten während des Feldzuges 1870/71 bezeichnet werden. Es fiel ihm dann auch die umfangreiche Aufgabe zu, die Bearbeitung des auf Bayern treffenden Anteils der 100 000-teiligen Karte des Deutschen Reiches in die Wege zu leiten und zu überwachen. Seine Verdienste in dieser Stellung wurden im Inlande und im Auslande voll anerkannt und gewürdigt. Nachdem er im topographischen Bureau bis zum Generalmajor vorgerückt war und 44 Jahre in der Armee gedient hatte, erbat er sich im Jahre 1890 wegen geschwächter Sehkraft die Pensionierung.

Die meisten hätten sich wohl an dieser Tätigkeit genügen lassen, aber dem regen Geiste und dem rastlosen Forschungsdrange Orffs genügte die Direktion des topographischen Bureaus für sich allein auf die Dauer nicht. Er sehnte sich nach rein wissenschaftlicher Arbeit, weshalb er auch noch zehn Jahre, wie vorher erwähnt, die Stelle als Dozent der Mathematik an der Kriegsakademie beibehielt.

Da trat am Ende der sechziger Jahre eine große Aufgabe an ihn heran, seine Beteiligung an der bayerischen Landes-

vermessung. Nach der in Frankreich während der französischen Revolution zur Ermittlung der Gestalt der Erde durchgeführten großen Gradmessung fanden nach dem wiederhergestellten Frieden in vielen Staaten ähnliche Gradmessungen und Landesvermessungen statt; so begann auch in Bayern, nachdem schon 1801 von französischen Offizieren Vorarbeiten für ein Hauptdreiecksnetz gemacht worden waren, eine Landesvermessung mit einer von dem Astronomen Soldner unter Mithilfe von Schiegg nach wissenschaftlichen Prinzipien und mit den zur Zeit besten von Reichenbach und Fraunhofer gebauten geodätischen und astronomischen Instrumenten ausgeführten Triangulation. Es hatte sich dabei seit Anfang des 19. Jahrhunderts ein außerordentlich umfangreiches Beobachtungsmaterial angehäuft, das noch der Verwertung harrte. Orff übernahm, nachdem Bauernfeind die Bearbeitung niedergelegt hatte, freiwillig die Aufgabe. Es waren enorme Schwierigkeiten zu überwältigen, denn es war über die von Soldner erdachte der Landesvermessung zu Grunde liegende genaue Projektionsmethode noch gar nichts veröffentlicht, so daß Orff sich das gesammte Material im Archiv des K. Katasterbureaus erst mühsam zusammensuchen mußte. Nur der beharrlichsten Ausdauer und aufopferungsvollen Hingebung sowie der sichersten Sachkenntnis konnte es gelingen die gewaltige Aufgabe zu bewältigen. Schon im Juni 1873 war die Bearbeitung des von dem K. B. Katasterbureau herausgegebenen großen Werkes: „Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“ in einem 100 Druckbogen umfassenden Quartband vollendet. Es ist die größte Leistung Orffs. Das durchaus selbständige, den Geodäten innerhalb und außerhalb Bayerns unentbehrlich gewordene und allgemein anerkannte Werk nimmt einen hohen wissenschaftlichen Rang ein sowohl durch die äußerst sorgfältige mustergiltige Verarbeitung des ungeheuern Zahlenmaterials als auch durch die vollendete Verwendung der theoretischen Vorschriften.

Nach Abschluß desselben folgten die astronomisch-geodätischen Ortsbestimmungen Orffs an der hiesigen Sternwarte.

Er machte zunächst eine Bestimmung der geographischen Breite der K. Sternwarte bei München nach Talcotts Methode und im ersten Vertikal, welche 1877 in den Annalen der K. Sternwarte veröffentlicht wurde. Dann folgten weitere Breitebestimmungen in Bayern im Auftrage der K. B. Kommission für die europäische Gradmessung, deren Vorsitzender damals Lamont war. Der preußische General v. Baeyer, der Vater unseres verehrten Kollegen, hatte nämlich eine einheitliche mitteleuropäische Gradmessung zwischen dem französischen und russischen Meridian angeregt, zu deren Durchführung sich alle von dem bezeichneten Meridian berührten Staaten, zu denen auch Bayern gehört, anschlossen und die „europäische Gradmessungs-Kommission“ bildeten. Nach dem Beitritt der Vereinigten Staaten von Nordamerika, von Japan und Großbritannien wurde sie zur Kommission der „internationalen Erdmessung“ erweitert; der bayerischen Kommission für die europäische und internationale Erdmessung, welche die auf Bayern treffenden Erdmessungsarbeiten nach den Beschlüssen der allgemeinen Konferenzen zu betätigen hatte, gehörten außer Lamont noch Bauernfeind, Seidel und Seeliger an und nach Bauernfeind's Tod (1894) Orff für die geodätischen Fragen. Auch an diesen Problemen beteiligte sich Orff mit gewohnter Hingebung durch ganz auf der Höhe der Wissenschaft stehende astronomisch-geodätische Arbeiten.

Die vorher erwähnten Beobachtungen zu den Breitebestimmungen in Bayern fanden in Nürnberg, Mittenwald, Holzkirchen, Ingolstadt und der Wülzburg statt und wurden (1880) als astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern von der K. B. Kommission für die europäische Gradmessung herausgegeben.

Daran schlossen sich die 1874 begonnenen, der europäischen Gradmessung dienenden ausgedehnten „telegraphischen Längenbestimmungen für die K. Sternwarte zu Bogenhausen“ an, welche in zwei Teilen (1888 und 1893) von der K. B. Kommission für die internationale Erdmessung herausgegeben wurden und in den Denkschriften unserer Akademie erschienen

sind. Diese Arbeiten sollten die exakte telegraphische Bestimmung des astronomischen Längenunterschiedes möglichst vieler Orte gegen die Münchener Sternwarte liefern, dann die astronomischen Koordinaten einer größeren Anzahl von Punkten innerhalb Bayerns und die in diesen Punkten herrschenden Lotabweichungen ermitteln, und vor allem die genaue Orientierung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes auf dem Erdsphäroid ergeben. Dabei wurden zunächst die Längenunterschiede bestimmt zwischen Bogenhausen einerseits und Wien, dem Pfänder und Prag anderseits, wodurch der Anschluß an die von dem Astronomen v. Oppolzer in Wien geleitete österreichische Gradmessung hergestellt war; dann folgte eine gleichzeitige Längenbestimmung innerhalb des Viereckes Bogenhausen, Wien, Padua und Mailand; ferner eine Bestimmung zwischen den Sternwarten Bogenhausen, Wien und Straßburg, sowie eine solche zwischen Bogenhausen, Wien und Greenwich und endlich die mit Professor Plantamour gemachte zwischen Bogenhausen und Genf.

Von Bedeutung war auch seine ungemein sorgfältige „Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen“ mit dem ihm von Professor v. Oppolzer in Wien überlassenen Reversionspendel (1883).

Zuletzt trat noch eine wichtige Aufgabe an Orff heran, nämlich die Messung der Größe der Schwerkraft der Erde mit dem Pendelapparat des österreichischen Obersten v. Sterneck. Man hat dieselbe an verschiedenen Orten der Erde ermittelt aus der Schwingungsdauer eines Pendels oder aus der Länge des Sekundenpendels und erfahren, daß zwischen den geodätischen und astronomischen Längen- und Breitenmessungen Abweichungen sich finden. Man hat dieselben aus besonderen Lage- und Dichtigkeitverhältnissen der die Erdkruste bildenden Mineralmaßen zu erklären gesucht. Aus diesem Grunde haben insbesondere die Geologen großes Interesse an der Frage genommen. Orff hat daher umfassende Pendelbeobachtungen ausgeführt; es gelang ihm bald die Schwierigkeiten, welche sich dabei einer genauen Zeitbestimmung entgegenstellen, in

einfachster Weise zu überwinden und für Bayern fast abschließende Resultate zu erhalten, die er in einer in den Sitzungsberichten der Akademie (1897) erschienenen Abhandlung: „Bemerkungen über die Beziehungen zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendelmessungen“ niederlegte. Bis kurz vor seinem Tode hat Orff die Erdmessungsarbeiten in Bayern geleitet.

In einer in der Festsitzung der Akademie vom 15. November 1893 gehaltenen Rede: „Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung“ resümierte er die Fortschritte dieser Wissenschaft, die seiner Arbeit so viel verdankt.

Die philosophische Fakultät unserer Universität ernannte ihn (1883) in Würdigung seiner Verdienste um die Wissenschaft zum Ehrendoktor der Philosophie.

Wir haben ihn nicht nur wegen seiner selbstlosen Hingebung für die Wissenschaft verehrt, sondern auch wegen seines reinen und edlen Charakters geliebt; von wahrer Bescheidenheit und Humanität war er stets voll Freundlichkeit und Liebenswürdigkeit gegen Alle.

So ist sein Lebenswerk ein gesegnetes für die Wissenschaft gewesen; der Name „Orff“ wird in der Geschichte der Geodäsie immer in Ehren genannt werden.

Otto Struve.[1]

Am 14. April 1905 ist der berühmte Astronom Otto v. Struve, Direktor der Sternwarte in Pulkowa, im Alter von 86 Jahren gestorben. Er gehörte unserer Akademie seit dem Jahre 1866 als auswärtiges Mitglied und als Nachfolger seines Vaters Wilhelm Struve an. Die Struves sind eine Astronomenfamilie; der Vater Wilhelm Struve hatte sich als Leiter der berühmten Sternwarte in Pulkowa die größten Verdienste er-

[1] Siehe den Nekrolog von M. Nyrén, in der Vierteljahrschrift der Astronom. Gesellschaft 40, S. 286.

worben; der Sohn Otto Struve setzte das Werk des Vaters in rühmlicher Weise fort, indem er auf verschiedenen Gebieten der Astronomie, insbesondere durch seine ausgedehnten Messungen der Doppelsterne, hervorragende Erfolge erzielt hat; auch zwei Söhne Ottos sind bekannte Astronomen.

Otto Struve wurde am 7. Mai 1819 in Dorpat geboren, wo sein Vater, dessen Eltern aus Altona eingewandert waren, Professor an der Universität und Direktor der Sternwarte war; in derselben befand sich der große von Fraunhofer hergestellte, in der öffentlichen Sitzung unserer Akademie vom 10. Juli 1824 beschriebene Refraktor von 9 Zoll Öffnung. Nach Absolvierung des Gymnasiums in Dorpat besuchte er die damals in hoher Blüte stehende Universität daselbst. In der Sternwarte aufgewachsen war er früh entschlossen sich der Astronomie zu widmen, so daß er bald seinem Vater behilflich sein konnte und schon im Alter von 18 Jahren vor Abschluß der Universitätsstudien als Assistent an der Sternwarte angestellt wurde.

Nachdem unter dem Kaiser Nikolaus I. das große astronomische Zentralinstitut in Pulkowa auf einem Bergrücken bei St. Petersburg in den Jahren 1833--1839 entstanden war, wurde W. Struve zum Direktor der glänzend ausgerüsteten, besonders für Stellar-Astronomie bestimmten Anstalt bestellt. Neben anderen vollendeten Instrumenten war daselbst der von den Nachfolgern Fraunhofers, Georg Merz und Mahler verfertigte 14zöllige Refraktor, das mächtigste optische Instrument der damaligen Zeit, aufgestellt. Später ergab sich das Bedürfnis nach einem noch größeren Fernrohr, das 1884 als ein 30 Zöller von Clark fertig gestellt wurde. Otto Struve wurde zugleich neben anderen jungen Gelehrten als Gehilfe des Direktors eingesetzt und nahm von da an hervorragenden Anteil an den Arbeiten des Observatoriums durch vielfache Beobachtungen und Untersuchungen. Das Jahr 1841 brachte ihm den Titel eines Magisters der Astronomie an der Universität zu St. Petersburg.

Als vom Jahre 1845 an bei der ausgebreiteten astronomischen und geodätischen Tätigkeit seines Vaters diesem nicht

mehr die Zeit blieb, sich der Verwaltung der Sternwarte zu widmen, fielen diese zeitraubenden Arbeiten dem Sohne zu, der sich deßhalb noch in jungen Jahren, ehe er das 30. Lebensjahr erreicht hatte, nicht so wie er gewünscht hätte, den eigenen Forschungen hingeben konnte. Er erhielt dann das Amt eines zweiten Astronomen, 1858 das eines Verwalters der Sternwarte und im Jahre 1862 nach dem Rücktritt seines Vaters das des Direktors. Im Jahre 1889 beging er das 50jährige Jubiläum der Sternwarte und trat dann im Alter von 70 Jahren von der Stelle, die er während 28 Jahren ruhmvoll bekleidet hatte, zurück und lebte seitdem größtenteils bei nahen Verwandten in Karlsruhe.

Aus Mangel an Arbeitskräften war es längere Zeit nicht möglich gewesen die vielen mit den Instrumenten gewonnenen Beobachtungen zu bearbeiten; erst vom Jahre 1857 an konnten die dazu nötigen Reduktionen in Angriff genommen werden. Es wurden zuerst mit größtem Fleiße die Konstanten zur Berechnung der Beobachtungen ermittelt: Die Refraktion, die Aberration, die Nutation, die Präzession. Die letztere Aufgabe fiel dem jungen Otto Struve zu, der seine diesbezüglichen Beobachtungen in einer wichtigen Abhandlung: „Bestimmung der Konstante der Präzession mit Berücksichtigung der eigenen Bewegung des Sonnensystems“, welche Bewegung man früher nicht mit in Rechnung gezogen hatte, (1841) veröffentlichte. Über ein halbes Jahrhundert sind diese in Pulkowa bestimmten Konstanten allgemein in Gebrauch gewesen und haben viel dazu beigetragen, die astronomischen Beobachtungen auf ein gemeinschaftliches System zurückzuführen.

Aus allen diesen großen Arbeiten entstanden die „Observations“ durch Otto Struve und seine Mitarbeiter, denen er das gemeinsame Ziel gab und zu denen spätere berühmte Namen der Astronomie zählten. Sie enthalten die Kataloge der Rektaszension, der Deklination der Hauptsterne, der Beobachtungen im ersten Vertikal am Vertikalkreis und am Meridiankreis mit dem Passageinstrument.

Die Haupttätigkeit Otto Struves war die mit dem großen

Refraktor, insbesondere das Aufsuchen neuer Doppelsterne und möglichst scharfer Mikrometermessungen derselben. Diese durch 40 Jahre fortgesetzten Messungen, welche im 9. und 10. Band der Observations enthalten sind, bieten ein ungemein reiches und wichtiges Quellenmaterial für alle Zeiten; sie sind die reifste Frucht der Lebensarbeit Struves. Außerdem stammen von ihm noch viele Monographien über einzelne Resultate seiner Beobachtungen über Doppelsterne, Kometen, Nebelflecke, Sternparallaxen, Planetentrabanten, die Saturnringe.

Bei den Bestimmungen der Doppelsterne bemerkte man auffällige Unterschiede in den Messungen der gleichen Erscheinung bei den verschiedenen Beobachtungen, die man bis dahin zumeist den angewandten Beobachtungsmethoden und nicht den Beobachtern zuschrieb. Struve erkannte die auch für die Physiologie wichtige Tatsache, daß diese Unterschiede vor allem von der Verschiedenheit der Beobachter, von deren persönlichen Messungsfehlern, herrühren. Er machte zur Ermittlung der Größe derselben Beobachtungen an künstlichen Doppelsternen mittelst einer höchst ingeniösen Methode. In einer 2,5 km entfernten schwarzen Tafel waren in verschiedenen Entfernungen und Richtungen vom Zentrum kreisrunde Löcher von verschiedenem Durchmesser angebracht; alle Löcher waren durch schwarze Stöpsel geschlossen bis auf zwei, welche gerade gemessen werden sollten. Da die Entfernung der Tafel von dem Refraktor bekannt war, sowie die Entfernung und Richtung der einzelnen Löcher, so konnte man die gemessenen Zahlen auf ihre Richtigkeit prüfen. Es ergaben sich in der Tat nicht unbedeutende systematische Fehler in den Distanzen und den Positionswinkeln. Mit Hilfe der aus allen diesen Messungen abgeleiteten empirischen Formeln wurden dann die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse korrigiert.

Außerdem war Otto Struve bei einer Reihe wichtiger wissenschaftlicher Unternehmungen beteiligt. Er war es, der die Durchführung der großen russischen Meridianbogenmessung und die Verbindung derselben mit den übrigen europäischen Gradmessungen ermöglichte. Der Vater W. Struve wünschte

nämlich seiner russisch-skandinavischen Breitegradmessung eine Längengradmessung auf dem 47. Parallel zwischen Brest und Astrachan hinzuzufügen. Da er dabei jedoch auf Schwierigkeiten bei den westeuropäischen Staaten stieß, schlug Otto Struve (1860) vor den Bogen auf dem 52. Parallel auf der weiten 69° umfassenden Strecke zwischen Arsk in Sibirien und Valencia auf Island zu messen, welch großartige Arbeit unter Beteiligung aller davon berührten Staaten zustande kam. Auch wirkte er (1843) bei der Bestimmung des Längenunterschiedes Pulkowa—Greenwich mit. Die geodätisch-topographische Aufnahme des russischen Reiches hat er eifrig gefördert.

Er beteiligte sich ferner an zwei Expeditionen zur Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse, 1851 an der nach Polen und 1860 an der nach Spanien. Bei den Vorbereitungen zur Beobachtung des Venusdurchgangs 1874 war er entscheidend tätig. Er regte ferner die neue Reduktion der astronomischen Messungen Bradley's, deren Wert für die Wissenschaft durch Bessel's fundamenta astronomica festgestellt worden ist, durch Auwers an.

Seine Revision und Herausgabe des zweiten Katalogs von Weiße, enthaltend die Sterne der Bessel'schen Zonen zwischen + 15° und + 45° Deklination brachte der praktischen Astronomie großen Nutzen. Ebenso nützlich war die mit Schiaparelli gemachte Bearbeitung und Herausgabe der von Baron Dembowski hinterlassenen Doppelsternmessungen.

Von besonderem Interesse ist seine Schrift über das Verhältnis Keplers zu Wallenstein auf Grund der in der Pulkowaer Bibliothek befindlichen Manuskripte Keplers.

In der alten Schule wurde in Pulkowa nur die messende Astronomie betrieben; Struve verschloß sich aber dem Neuen nicht. Als sich die Bedeutung der Astrophysik erwies, erwarb er alsbald die zu solchen Untersuchungen notwendigen Instrumente und setzte die Schaffung der Stelle eines Astrophysikers bei der Sternwarte durch. Und als die Verwendbarkeit der Photographie für astronomische Zwecke dargetan wurde, nahm er lebhaftes Interesse an der photographischen

Aufnahme des Himmels und war Vorsitzender des internationalen Kongresses hiefür in Paris. In dieser Weise wußte er den alten Glanz der Pulkowaer Sternwarte zu erhalten.

Struve gehörte zu den Begründern der so fruchtbar wirkenden astronomischen Gesellschaft. Er war leider ohne Erfolg bestrebt die Kalenderreform und den Übergang vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender in Rußland durchzusetzen.

Ein besonderes inniges Verhältnis bestand zwischen ihm und seinen zahlreichen Schülern und Mitarbeitern, die ihn wie einen Patriarchen liebten. Überall hat er sich durch seine edlen Charaktereigenschaften Freunde und Verehrer erworben. Er war, trotzdem er gut deutsch geblieben ist, ein treuer Anhänger Rußlands, insbesondere liebte er seine engere Heimat, die baltischen Provinzen, und es war für ihn ein schwerer Schlag, als Dorpat, in dem er die Verkörperung aller guten Eigenschaften einer deutschen Universität erblickte und in der so viele hervorragende Deutsche gewirkt hatten, den Namen Jurjew erhielt.

Albert Kölliker.[1])

Am 2. November 1905 starb in Würzburg der Anatom Albert Kölliker im 89. Lebensjahre, der Senior der Würzburger Universität, eine der größten Zierden der Alma Julia und der letzte jener Männer, die den Ruhm ihrer medizinischen Fakultät begründet haben. Er hat als einer der Tätigsten mitgearbeitet an der Vermehrung der Kenntnisse in der mikroskopischen Anatomie und in der Entwicklungsgeschichte des Menschen und der Tiere, aus denen die heutigen Lehren in diesen Wissenschaften hervorgingen. Mit seinem Tode ist ein

---

[1]) Siehe die Nachrufe von: W. Waldeyer, Anatomischer Anzeiger 1906, Bd. 28 Nr. 21, S. 539.
J. Sobotta, Münchener mediz. Wochenschr. 1905, Nr. 51.
O. Schultze, mediz. Klinik 1905, Nr. 50.
O. Taschenberg, Leopoldina 1906, Heft 42, Nr. 5, S. 75.
A. Kölliker, Erinnerungen aus meinen Leben 1899.

Gelehrtenleben vollendet, welches wohl eines der köstlichsten genannt werden darf; alles, die äußeren Bedingungen sowie die körperlichen und geistigen Veranlagungen, und die Gunst des Geschickes waren vereint, um ein harmonisches Dasein zu bilden: Gesundheit an Leib und Seele, unermüdliche Arbeitskraft und Schaffensfreude bis ins höchste Alter hatten es ermöglicht, daß er ein erschöpfendes Wissen und Können in allen anatomischen Wissenschaften sich aneignen konnte und durch äußerst fruchtbare Arbeit ein zuverläßiger allverehrter Führer der Anatomen seiner Zeit wurde; und dann kam nach diesem gesegneten Leben ein sanftes Ende ohne Empfindung der Schwächen des Alters. So steht er vor uns, der uns allen Lehrer und Vorbild in Fleiß und Ausdauer war.

Albert Kölliker wurde am 6. Juli 1817 als Sohn eines angesehenen Kaufmanns in Zürich geboren; die Mutter war eine Frau von hervorragender geistiger Begabung und feiner Bildung, die ihren zwei Söhnen eine vortreffliche Erziehung zuteil werden ließ; von ihr hatte der ältere Sohn Albert die Schönheit des Körpers, die große Sprachenkenntnis und die vornehme Erscheinung mit den Formen des Umganges des Weltmanns. Er hatte auch das große Glück, daß die äußeren Lebensverhältnisse ihm keine Beschränkung auferlegten und ihm in Anschaffung von Büchern und Instrumenten, sowie in Unternehmung von weiten Reisen freie Hand gegeben war.

Er entschloß sich bald zum Studium der Medizin, zu welchem ihn die früh aufgetretene Neigung zu den sogenannten beschreibenden Naturwissenschaften geführt. Die letztere war wohl wie bei so vielen seiner Landsleute genährt durch die Schönheiten der Natur seines Vaterlandes, dem er immer als treuer Sohn in Liebe anhing. Schon als Knabe sammelte er eifrig Schmetterlinge und im Gymnasium Pflanzen; an der Universität zu Zürich, an die er 1836 übergetreten war, betrieb er daher besonders die Naturwissenschaften; für die praktische Medizin hatte er von Anfang an ein geringeres Interesse und Verständnis. Er fand dort vortreffliche Lehrer, den Physiker Mousson, den Chemiker Löwig, den Mineralogen Julius

Fröbel, den Anatomen Friedrich Arnold, den Geologen Escher von der Lindt, den Botaniker Oswald Heer und den früher unserer Akademie angehörenden Zoologen und Naturphilosophen Lorenz Oken. Besondere Anregung erhielt er durch von der Lindt und Oken, vor allem aber durch den geistvollen Heer, der in ihm das lebhafteste Interesse für die heimische Flora erweckte. Mit ihm und mit seinem Freunde, dem späteren berühmten Botaniker Karl Nägeli durchforschte er die Flora seines Heimatkantons und legte ein umfangreiches Herbarium an; die Frucht dieser Beschäftigung war die erste Schrift des zwanzigjährigen Studenten, ein „Verzeichnis der phanerogamischen Gewächse des Kantons Zürich, 1839", das nicht nur eine Aufzählung der Arten und Fundorte war, sondern auch auf klimatische und Bodenverhältnisse Rücksicht nahm. Es ist sehr zu beklagen, daß unsere Mediziner dieses vorzügliche Mittel an Naturobjekten beobachten zu lernen wegen Überbürdung mit als wichtiger angesehenen Fächern nur wenig mehr benützen.

Nach einem in Bonn zugebrachten Semester begab er sich mit seinem Freunde Nägeli für drei Semester nach Berlin (1839). Er bezeichnete diesen Aufenthalt als einen Wendepunkt in seinem Leben, der seinen Studien von nun an die Richtung gab. Durch Johannes Müller, Jacob Henle und Robert Remak empfing er vollständig neue Eindrücke. Der mit seinem umfassenden Geist noch immer fortwirkende Johannes Müller zeigte ihm den Zusammenhang der Formen der Tiere und führte ihn in die vergleichende Anatomie besonders der wirbellosen Tiere ein. Bei Jacob Henle lernte er die Lehren von C. Th. Schwann, der kurz vorher (1839) durch die Entdeckung der Zellen als Grundlage aller Gewebe des Tierkörpers eine neue Ära der anatomischen Disziplin eröffnet hatte, kennen und durfte er in dessen Demonstrationen zum erstenmale mit dem Mikroskop Blutkörperchen, Epithelien, Samenfäden etc. sehen. Von dem talentvollen Robert Remak erhielt er in Vorlesungen und in Demonstrationen über die Entwicklung des Hühnchens die ersten Anregungen auf dem

Gebiete der Entwicklungsgeschichte, die durch die Forschungen von Döllinger, Karl Ernst v. Baer und Theodor Bischoff mächtig gefördert worden war. Man kann sich denken, wie dies alles auf den jungen Kölliker wirkte; er sah ein großes Arbeitsfeld vor sich, das zu bebauen er fest entschlossen war.

In seinem 9. Semester schaffte er sich in Berlin zu diesem Zweck ein Mikroskop von Schiek an, mit dem er halbe Nächte lang arbeitete. So entstand (1841), seine erste mikroskopische Arbeit: „Untersuchungen über die Geschlechtsverhältnisse der wirbellosen Tiere und über die Bedeutung der Samenfäden", mit welcher er sich in Zürich den Grad eines Doktors der Philosophie erwarb; ein Jahr später wurde er in Heidelberg zum Doktor der Medizin promoviert unter Vorlage einer vergleichend-embryologischen Untersuchung an Fliegenlarven: „Beobachtungen über die erste Entwicklung der Insekten".

Von Berlin aus machte Kölliker mit Nägeli seine erste wissenschaftliche Reise nach Föhr und Helgoland zum Studium der Fauna und Flora des Meeres, von wo sie ein reiches Material zurückbrachten. Auf der Heimreise nach Zürich suchten die beiden den Botaniker Schleiden in Jena auf, um den Entdecker der Zellen in den Pflanzen kennen zu lernen.

Unterdessen war Henle (1841) als Professor der Anatomie nach Zürich berufen worden; derselbe nahm den ihm schon bekannten jungen Kölliker, dessen Wert er erkannt hatte, als Hilfsassistent auf; ein Jahr darauf wurde er Prosektor bei dem Manne, den er als den hervorragendsten Anatomen seiner Zeit pries und später seinen Freund nennen durfte, von dem er in der Gewebelehre die größte Förderung empfing.

Durch seine Studien war Kölliker bald auf die Bedeutung der Beobachtung der niederen Tiere des Meeres für die vergleichende Anatomie und Entwicklungsgeschichte geführt worden; er ging daher in richtiger Einsicht auf ein halbes Jahr mit Nägeli nach Neapel und Messina. Es waren zwar schon vor ihnen solche Reisen an die Meeresküste von Tiedemann, Stannius, Joh. Müller und Anderen gemacht worden, aber sie wurden doch erst von da an für einen wissenschaftlichen Biologen als

notwendiges Rüstzeug angesehen. Kölliker war begeistert von der Manigfaltigkeit der Formen und bereicherte mit größter Energie und reinstem Genusse seine Kenntnisse der Seetiere, deren Erlangung damals noch mit großen Schwierigkeiten verbunden war. Insbesondere interessierten ihn die Tintenfische; die Hauptfrucht seiner Arbeiten war außer zahlreichen kleineren Veröffentlichungen die Entwicklungsgeschichte der Cephalopoden: es war sein erstes größeres, wahrhaft grundlegendes Werk, die erste umfassende Darstellung einer ununterbrochenen Reihe von Entwicklungsstadien eines wirbellosen Tieres; ich stehe nicht an dieses Werk als eine seiner bedeutendsten Taten zu bezeichnen.

Nach der Rückkunft von seiner Reise habilitierte sich Kölliker (1843) in Zürich mit einem Probevortrag als Privatdozent, aber schon ein Jahr darauf wurde er, nachdem Henle nach Heidelberg gegangen war, zum außerordentlichen Professor der Physiologie und vergleichenden Anatomie ernannt. Da kam, als er eben 30 Jahre alt war (1847), durch Rineckers Einfluß der ehrenvolle Ruf nach Würzburg als ordentlicher Professor der Physiologie, vergleichenden und mikroskopischen Anatomie und Entwicklungsgeschichte; im Jahre 1849 erhielt er noch die Professur der deskriptiven Anatomie mit den Präparierübungen dazu, so daß er längere Zeit 14 - 16 Stunden in der Woche Vorlesungen hielt. Der Würzburger Universität hätte kein größeres Glück widerfahren können, aber auch Kölliker bekam die Gelegenheit eine Lehr- und Forschertätigkeit ohne Gleichen zu entwickeln. Er hat zum damaligen Aufblühen der medizinischen Fakultät neben Virchow das Meiste beigetragen. Es entfaltete sich dadurch in Würzburg ein außerordentliches wissenschaftliches Leben unter den Lehrern und Studierenden. In den Instituten sammelten sich strebsame Schüler, die ihre ersten wissenschaftlichen Arbeiten machten und mit Stolz auf die Entdeckungen ihrer Lehrer blickten. Die Universität Würzburg war ihm dadurch so lieb geworden, daß er verschiedene Berufungen, nach Breslau, Bonn und auch nach München, ablehnte. Er hatte auch das Glück,

talentvolle junge Forscher zu finden, die ihn in seinem Amte unterstützten; es war namentlich der unvergeßliche, frühverstorbene Heinrich Müller, der durch seine anatomischen und physiologischen Arbeiten über die Netzhaut berühmt geworden war; dann der noch lebende vortreffliche vergleichende Histologe Franz Leydig und der spätere große Anatom Carl Gegenbaur. Mit Leydig wurde der erste, in später Abendstunde abgehaltene mikroskopische Kursus in Deutschland eingerichtet, Spezialvorlesungen über vergleichende Gewebelehre und vergleichende Entwicklungsgeschichte gehalten, für welche sich immer ein Kreis wissensdurstiger Zuhörer fand; heutzutage, mit dem einzigen Streben bei den Meisten die Prüfung mit Not zu bestehen, ist dies leider ganz anders geworden. Ich erinnere mich mit den Gefühlen des tiefsten Dankes an die schöne Zeit, in der ich bei ihm als junger Mediziner 1851/52 die Vorlesungen über Anatomie, Gewebelehre, Physiologie, Entwicklungsgeschichte, vergleichende Anatomie und vergleichende Entwicklungsgeschichte hören durfte und in der Handhabung des Mikroskops unterrichtet wurde zu einer Zeit, wo uns an der Münchener Universität noch keine Gelegenheit gegeben war die feineren Formen mit dem Mikroskop zu beobachten oder Entwicklungsgeschichte zu lernen. Durch seine Vorlesung wurde, obwohl sie keine Experimente und Apparate brachte, zuerst die Lust zur Physiologie in mir erweckt.

Nach dem Tode von Heinrich Müller (1864) gab er die Physiologie ab und behielt die Leitung des anatomischen und des zootomischen Instituts mit den Vorlesungen bei. Erst 1897 an seinem 80. Geburtstag, den er noch in voller geistiger Kraft und Schaffensdrang feierte, und nach 50jähriger Wirksamkeit als Professor in Würzburg überließ er die Professur für Anatomie seinem langjährigen Schüler Philipp Stöhr, las aber noch über vergleichende Anatomie, Mikroskopie und Entwicklungsgeschichte; vom 85. Lebensjahre ab prüfte er noch im Doktorexamen und war regelmäßig mit mikroskopischen Arbeiten im anatomischen Institut bis wenige Tage vor seinem Tode beschäftigt, so daß er 64 Jahre lang im Dienste der Wissen-

schaft verbrachte. Seine letzte einige Tage nach seinem Tode erschienene Arbeit handelte über die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. Er genoß die Freude, daß viele der von ihm aufgestellten Lehren sich Bahn brachen und von Einfluß auf die weitere Entwicklung der morphologischen Wissenschaften waren. Auch im hohen Alter verschloß er sich dem Neuen nicht, sondern machte sich dasselbe schnell zu eigen, so daß er immer einer der Modernsten blieb.

Die größten wissenschaftlichen Erfolge Köllikers liegen auf dem Gebiete der mikroskopischen Anatomie und der Entwicklungsgeschichte. Man muß bedenken, welche gewaltigen Fortschritte in beiden Disziplinen in den 60 Jahren seit dem Eingreifen Köllikers gemacht worden sind; zu keiner Zeit war die Umwandlung derselben größer als in dieser, hervorgerufen durch die Ausbildung der Schwannschen Zellenlehre. Er hat die Fortschritte alle mitgemacht und tätig dabei mitgewirkt; keine Zeit war aber auch günstiger für einen jungen Forscher, wo jedes Bemühen reiche Früchte trug.

Sein Hauptverdienst besteht in der ungemein umfassenden und äußerst sorgfältigen Detailarbeit, der Ermittlung einer Fülle neuer Beobachtungstatsachen, die nötig waren um zu allgemeinen Schlußfolgerungen und Fragen zu gelangen; er hat dadurch den größten Nutzen geschaffen, wenn er auch keine neuen Probleme aufstellte und seiner Wissenschaft keine ganz neuen Wege erschloß. Jede auftauchende Beobachtung griff er alsbald voll Eifer auf, prüfte dieselbe nach und verfolgte sie weiter; durch seine reichen Erfahrungen wirkte er bei wichtigen Fragen von allgemeiner Bedeutung klärend und scharf kritisierend und trug so zur Lösung derselben bei.

Die Bedeutung Köllikers kann nicht schöner und wahrer geschildert werden als dies in der ihm von der physikal. mediz. Gesellschaft in Würzburg zum 80. Geburtstag gewidmeten Adresse durch Boveri geschehen. Es heißt darin: „Mit einer unvergleichlichen Allseitigkeit und seltenem Scharfblick begabt, haben Sie überall sofort die Fruchtbarkeit und Tragweite eines neuen Gedankens, einer neuen Beobachtung, einer

neuen Methode erkannt; mit immer gleichbleibender Jugendlichkeit haben Sie stets in das Neue sich hineingelebt, um alsbald allen Arbeitsgenossen voran zu schreiten. An jeder großen wissenschaftlichen Bewegung haben Sie führend Teil genommen."

Es gibt kaum einen Körperteil oder ein Gewebe der höheren und niederen Tiere, woran sich nicht eine wichtige mikroskopisch-anatomische Entdeckung Köllikers knüpft. Es sei nur erinnert an den ersten Nachweis der Bildung der Samenfäden, an den Nachweis des zahlreichen Vorkommens der glatten Muskelfasern und ihre erste isolierte Darstellung, an die Untersuchung der Vorgänge bei der Bildung und der Resorption der Knochen, an die Studien über den Nervenfaserverlauf in dem zentralen Nervensystem, dann an die wichtige Arbeit: „Die Selbständigkeit und Abhängigkeit des sympathischen Nervensystems durch anatomische Untersuchungen bewiesen". Bei seinen vergleichend-anatomischen Untersuchungen finden sich genaue Angaben über die feineren Formen vieler Gruppen, namentlich der wirbellosen Tiere; er wurde dadurch zu einem der Begründer der wissenschaftlichen Zoologie.

Auch bei seinen entwicklungsgeschichtlichen Arbeiten waren es weniger morphogenetische Fragen, die ihn beschäftigten, sondern wiederum außerordentlich sorgfältige mikroskopisch-anatomische Befunde. Er war, wie vorher schon erwähnt wurde, der Erste, der die Entwicklungsgeschichte eines wirbellosen Tieres, der Cephalopoden, eingehend verfolgte, nachdem vor ihm fast nur an Wirbeltieren von Pander, Baer, Remak, Rathke und Bischoff Beobachtungen gemacht worden waren.

In der ersten Zeit hat er auch physiologischen Vorgängen seine Aufmerksamkeit geschenkt. In der Arbeit über die Bildung der Samenfäden wurde dargetan, daß die Bewegungen derselben vitaler Natur sind und daß zur Ruhe gekommene Fäden durch kaustische Alkalien wieder zu lebhaften Bewegungen angeregt werden. Mit dem Chemiker Loewig tat er

das Vorkommen der Cellulose im Mantel der Tunikaten dar. Er zeigte, daß durch Eintrocknung unerregbar gewordene Nervenfasern durch Wasser wieder erregbar werden, was allerdings durch Eckhardt in anderer Weise gedeutet worden ist. Den Mechanismus der Erektion erklärte er zuerst durch Erschlaffung der glatten Muskeln der corpora cavernosa des Penis. Er studierte die Wirkung verschiedener Gifte (des Curare, Strychnin, Morphium, Coniin) auf die Muskeln, das Nervensystem und die Herzbewegungen; er machte ferner Beobachtungen über die Resorption der Fette, über Gallensekretion und über das elektromotorische Verhalten des schlagenden Froschherzens.

Durch seine mikroskopischen Beobachtungen erlangte Kölliker einen guten Anteil an der Ausbildung der Zellenlehre und namentlich auch an der Beantwortung der Frage nach der Herkunft der Zellen. Schleiden und Schwann glaubten noch, daß die Zellen aus unorganisiertem Material entständen; Kölliker waren schon früh Zweifel an dieser „Cytoblastenlehre“ gekommen, und er ließ die Gewebszellen aus den Furchungskugeln des Eies entstehen; später sprach er sich, wie auch Remak und Leydig, bestimmt dahin aus, daß es keine freie Zellenbildung gäbe, sondern alle Elementargebilde aus der Eizelle durch Teilung hervorgehen und zwar bevor Virchow, auf pathologische Beobachtungen gestützt, seine geflügelten Worte „omnis cellula e cellula“ aussprach. Er gab dabei eine genaue Darstellung des wichtigen Furchungsprozesses am Ei und beteiligte sich auch an der näheren Untersuchung der Form und Bedeutung des Zellkerns, woraus sich später, namentlich durch W. Flemmings Beobachtungen, die neue Lehre von den merkwürdigen Wandlungen des Zellkerns entwickelte.

Das lebhafteste Interesse nahm Kölliker an der durch Camillo Golgi 1894 eingeführten eigentümlichen Färbungsmethode, durch welche sich die histologischen Elemente des Nervensystems in großer Klarheit darstellen lassen; er war wiederum einer der Ersten, der die Wichtigkeit des neuen Hilfsmittels erkannte und dasselbe anwendete. Darum er-

schließend, war es die aus den Untersuchungen mit der Golgischen Methode hervorgegangene Neuronenlehre von Ramón y Cajal, die er mit jugendlicher Begeisterung erfaßte und durch unermüdliche Untersuchung des zentralen Nervensystems zu stützen suchte. Es handelt sich dabei um die prinzipiell wichtige Frage, ob die Leitung der Erregung im Nerven durch Kontinuität oder durch Kontakt sich vollziehe; Kölliker entschied sich noch in seiner letzten Untersuchung, entsprechend der Neuronenlehre, für die Übertragung durch Kontakt, während Eduard Pflüger in neuester Zeit auf das Entschiedenste gegen die Neuronentheorie auftrat und sie für unbegründet und den Erfahrungen der Physiologie widersprechend hält.

Er nahm ferner mit Waldeyer Stellung gegen die His'sche Parablastenlehre und beteiligte sich dadurch an der Lösung der schwierigen Frage nach der Quelle des Blutes und des Bindegewebes; er sucht sie in dem mittleren Keimblatt, welches aus dem Zellenmaterial des Primitivstreifens abstammt, das im Wesentlichen aus dem Ektoblasten hervorgeht.

Der berühmte Botaniker Jul. Sachs hatte die Teile der Pflanzenzelle nach ihrer Dignität geschieden und das vom Kern beherrschte Protoplasma, also den mit Leben ausgestatteten Teil der Zelle, die tätige Energide derselben genannt. Kölliker griff diese für die pflanzlichen Zellen aufgestellte Energidenlehre auf und dehnte sie auf die tierischen Gewebe aus. Unser Kollege Kupffer hat diese Vorstellungen für die tierische Zelle in seiner Rektoratsrede noch schärfer durchgeführt.

Auf Grund der Beobachtungen von Oskar Hertwig trat Kölliker für die hohe Bedeutung der Kernsubstanzen für die Vererbung ein.

Er lieferte auch wertvolle Beiträge zu der viel diskutierten Deszendenzlehre; er war wie die meisten Naturforscher gegen die einseitige Darwin'sche Selektionstheorie, die Theorie der natürlichen Zuchtwahl, zur Erklärung der Entstehung und Umwandlung der Arten, er war geneigt die Umwandlung im Wesentlichen auf innere, in der Organisation begründete Ursachen zurückzuführen.

Kölliker erwarb sich außerdem ein großes Verdienst durch seine ausgezeichneten Lehrbücher der mikroskopischen Anatomie, in welchen die feinere Struktur aller Teile des tierischen Organismus geschildert wird. Es war seinen Werken die Allgemeine Anatomie von J. Henle 1841 und das Handbuch der allgemeinen und speziellen Gewebelehre von J. Gerlach 1848 vorausgegangen. Zuerst kam 1850 und 1852 die große mikroskopische Anatomie oder Gewebelehre des Menschen in zwei Bänden, aber nur die spezielle Gewebelehre, während der in Aussicht genommene allgemeine Teil ausblieb; das Buch enthält die gründliche und vollständige Darstellung alles damaligen Wissens der Histologie. Es folgte dann 1852 die erste Auflage des Handbuches der Gewebelehre des Menschen, von dem 1867 die fünfte Auflage erschien. Durch die großen Fortschritte in der Erkenntnis des mikroskopischen Baues des Körpers war die „Gewebelehre“ allmählich veraltet; der Siebenzigjährige begann die sechste Auflage derselben, welche ein völlig neues großes Werk wurde, das in drei Bänden erschien; in dem zweiten sind seine umfassenden Untersuchungen des feineren Baues des Zentral-Nervensystems mittelst der Golgischen Imprägnationsmethode enthalten; den dritten Band übergab er V. v. Ebner in Wien zur Vollendung.

Nicht minder wichtig ist seine Entwicklungsgeschichte des Menschen und der höheren Tiere, welche 1861 in erster Auflage erschien; für die zweite Auflage von 1879 hatte er alles auf Durchschnitten nochmals nachuntersucht und geprüft. Das Buch ist eine Fundgrube für die späteren Forscher über die Entwicklung des Hühnchens und Kaninchens und für die Organentwicklung der Säugetiere. In abgekürzter Form hat er dasselbe für weniger Geübte als Grundriß 1880 und 1884 in zweiter Auflage bearbeitet.

Diese ausgezeichneten Lehr- und Handbücher, welche die Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen weithin bekannt machten, werden noch für lange Zeit unentbehrliche Ratgeber für den Forscher sein. Das in ihnen zuerst eingeführte System der Gewebelehre ist überall angenommen worden.

Als er schon die Achtzig überschritten hatte, schrieb er 1899 seine Selbstbiographie „Erinnerungen aus meinem Leben“ mit einer eingehenden Analyse seiner Arbeiten.

Durch die mit Siebold 1848 unternommene Gründung der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie trug er viel dazu bei die Zoologie aus einer blos beschreibenden Wissenschaft zu einer erklärenden zu erheben.

Mit Kiwisch und Virchow gründete er 1849 die angesehene physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg, an deren Gedeihen und Wirksamkeit er wesentlich beteiligt war. Neunmal führte er den Vorsitz in derselben.

Er war auch eines der tätigsten Mitglieder der durch die Initiative von Julius Kollmann im Jahre 1886 begründeten so ungemein nützlichen anatomischen Gesellschaft.

Es ist selbstverständlich, daß dem verdienten Mann viele Ehrungen dargebracht wurden. An seinem 70. Geburtstag feierten ihn die medizinische Fakultät, die physikalisch-medizinische Gesellschaft und fünfundzwanzig Schüler durch Festschriften; bei seinem 50jährigen Doktorjubiläum erhielt er acht Festschriften von der Universität und dem eidgenössischen Polytechnikum in Zürich mit dreizehn Abhandlungen, von der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, dem anatomischen Institut in Würzburg und seinen Schülern Merkel, Bonnet, Gegenbaur, His und Waldeyer.

Es mag noch bemerkt werden, daß Kölliker großen Wert auf die Pflege und Ausbildung des Körpers durch Leibesübungen aller Art legte. Durch vielfache Reisen suchte er die angesehensten Fachgenossen kennen zu lernen und seine Kenntnisse zu bereichern. Er war von feiner universeller Bildung, eine vornehme ehrwürdige, sympathisch berührende Persönlichkeit, freundlich entgegenkommend, namentlich auch der Jugend gegenüber; die größten Ehrungen änderten nichts an seinem schlichten leutseligen Wesen.

Schon im Jahre 1849, zwei Jahre nach seiner Berufung nach Würzburg, wurde er in unsere Akademie auf Vorschlag von Philipp v. Walther aufgenommen, der den damals noch

jungen Gelehrten als genauen Beobachter und verdienstvollen Arbeiter in der vergleichenden Anatomie pries; es war die erste Auszeichnung, die er durch eine Akademie erhielt. In diese Zeit und wohl auch von derselben Seite fiel die Anfrage, ob er nicht nach München kommen wolle.

Der Name Kölliker wird in der Geschichte der anatomischen Wissenschaft stets mit hoher Ehre genannt werden.

Georg Meissner.[1])

Unsere Akademie beklagt das in Göttingen erfolgte Ableben des Professors der Physiologie Georg Meißner, der am 30. März 1905 im Alter von 76 Jahren gestorben ist. Er war einer der wenigen noch lebenden Biologen, welche das von Johannes Müller uns hinterlassene große Erbe angetreten und weiter entwickelt haben. Vom reichsten Wissen und Können hat er noch einen großen Teil des weiten Gebietes der biologischen Wissenschaft übersehen und dasselbe mit wertvollen Gaben bereichert: er war als fein beobachtender Morphologe in der Zoologie der niederen Tiere, der Histologie und der Embryologie tätig und ebenso als experimentierender Physiologe in der Lehre von den Sinnesempfindungen, von den physikalischen und chemischen Vorgängen im Muskel, von der Verdauung des Eiweißes im Darmkanal und den Veränderungen vieler Stoffe im Stoffwechsel. Er ist also kein einseitiger Physiologe wie so viele der heutigen Zeit gewesen, denn er verstand es noch, zur Erforschung der physiologischen Vorgänge alle Hilfsmittel, das Mikroskop, die physikalischen und chemischen Methoden sowie das Experiment am Tier anzuwenden. Als in die Wissenschaft eingreifender Forscher war er den Jüngeren kaum mehr bekannt; denn schon seit

[1]) Siehe: Prof. H. Boruttau, Archiv für die ges. Physiologie 1905, Bd. 110, S. 351 und die medizinische Woche 1905, Nr. 18. — Otto Weiss, Münchener mediz. Wochenschrift 1905, Nr. 25, S. 1206. — M. Verworn, Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, geschäftl. Mitteil. 1905, Heft 1, S. 45.

35 Jahren hat er keine Arbeiten mehr veröffentlicht, obwohl er bis zu seinem Ende wissenschaftlich sich beschäftigte; durch einige in unwürdiger und beklagenswerter Form geführte verletzende Angriffe gegen mehrere seiner wertvollen Arbeiten, die er mit Aufbieten seiner ganzen bedeutenden Kraft durchgeführt hatte, war der mit einem äußerst lebhaften Temperament Begabte gekränkt und verbittert, so daß er zu dem Entschluß kam sich solchen Urteilen nicht mehr auszusetzen. Man kann dies bedauern, da vieles Wichtige in seinen Aufzeichnungen verschlossen blieb, aber man kann es verstehen; es ließe sich vielleicht gegen seinen Standpunkt geltend machen, daß wir auf der Erde die Pflicht haben, nach unseren Fähigkeiten an dem Ausbau der Wissenschaft ohne Rücksicht auf unsere Person mitzuarbeiten.

Meißner wurde am 19. November 1829 als Sohn eines Obergerichtsrates zu Hannover geboren und studierte an der ehrwürdigen, der wissenschaftlichen Tätigkeit so günstigen Göttinger Universität von 1849—1853 Medizin und Naturwissenschaften. Er hatte dabei als Lehrer Männer wie Friedrich Wöhler, Wilhelm Weber und Rudolf Wagner; vor allem wirkte letzterer auf ihn ein. Dieser geistvolle, ungemein anregende Physiologe, der in der Zoologie, der vergleichenden Anatomie und Embryologie umfassende Kenntnisse besaß, gab ihm zuerst den weiten Ausblick auf die ganze Biologie, besonders in der vergleichend-anatomischen Richtung. Man hatte damals erkannt, welche große Bedeutung das Studium der einfachen niederen Seetiere für die Beurteilung der Lebenserscheinungen besitzt; auf einer zu diesem Zwecke 1851 unternommenen Reise an die Meeresküste von Triest durfte Meißner noch als Student seinen Lehrer begleiten, was seine frühe Reife dartut.

Unter Wagners Leitung arbeitete er sodann im physiologischen Institut, und es glückte ihm 1853, bis dahin unbekannte Sinnesorgane in der äußeren Haut, die Tastkörperchen, zu entdecken; dieser schwierige Nachweis bezeugt, wie scharf Meißner damals schon beobachtete. Die Widmung seiner als Doktordissertation erschienenen Schrift an Rudolf Wagner: „Durch

Sie erhielt Sinn und Bedeutung, was dem Schüler der Zufall entdeckte" beweist die Bescheidenheit und Selbsterkenntnis des jungen Forschers, die heutzutage wohl nur selten Nachahmung finden dürfte. Er ging dann (1853) nach Berlin zu Johannes Müller, der die ganze Biologie seiner Zeit umfaßte und von dem er, wie alle seine Schüler, den nachhaltigsten Eindruck erhielt; wie kaum bei einem anderen, wächst seine Bedeutung immer mehr.

Von da wanderte Meißner nach München, wohin ihn der Ruhm des vergleichenden Anatomen Karl Theodor v. Siebold, der eben mit seinen Arbeiten über die Parthenogenesis beschäftigt war, gelockt hatte; hier machte er vergleichend-anatomische und embryologische Untersuchungen an niederen Tieren, insbesondere an gewissen Fadenwürmern.

Durch diese Arbeiten wurde die Aufmerksamkeit auf den begabten und vielversprechenden jungen Gelehrten gelenkt, so daß der erst 26 Jahre alte (1855) einen Ruf als ordentlicher Professor der Anatomie und Physiologie nach Basel erhielt, wo er mit dem eigenartigen hervorragenden Chemiker Schönbein zusammentraf, dessen Forschungen über das Ozon Meißners spätere Untersuchungen in dieser Richtung veranlaßt haben. Aber schon nach zwei Jahren folgte er einem Rufe als Professor der Physiologie und Zoologie an die Universität Freiburg im Breisgau als Nachfolger von Alexander Ecker und als sein einstiger Lehrer Rudolf Wagner wegen Kränklichkeit das Lehrfach der Physiologie in Göttingen aufgab, wurde mit glücklichem Griff Meißner (1860) an seine Stelle gewählt; er wirkte daselbst über 40 Jahre als um die Wissenschaft höchst verdienter Forscher und als pflichterfüllter beliebter Lehrer, der in äußerst lebendigem anschaulichem Vortrag den Studierenden das richtige Verständnis über das Zustandekommen der Lebenserscheinungen beizubringen und sie zu naturwissenschaftlichem Denken anzuleiten wußte.

Zu Ende der neunziger Jahre mußte er wegen Kränklichkeit seine wissenschaftliche Tätigkeit mehr und mehr einschränken, er hielt aber noch seine Vorlesungen, bis er im Jahre 1901 die Enthebung von dieser Verpflichtung erhielt.

Überblicken wir nun die hauptsächlichsten Leistungen Meißners in annähernd chronologischer Folge.

Seine ersten Arbeiten bezogen sich, wie schon erwähnt, auf die feinere Anatomie der äußeren Haut, insbesondere auf die genaue Beschreibung der von ihm aufgefundenen und nach ihm benannten Tastkörperchen. Man kannte bis dahin die Endigungen der sensiblen Nerven in der äußeren Haut nicht, nur die dem Muskelgefühl dienenden Vater-Pacinischen Körperchen im Unterhautzellgewebe. Und nun zeigten sich in den Papillen der Lederhaut der Innenfläche der Hand und der Fußsohle, also der mit dem feinsten Tastgefühle versehenen Teile, besondere Endorgane, eine Klasse neuer Sinnesorgane. Er schrieb ihnen den Tastsinn, d. i. die Berührungsempfindung zu, und nicht die Temperatur- und die absolute Druckempfindlichkeit, welche an allen Stellen der Haut zustande kommen können; auch versuchte er später eine Theorie ihrer Erregung, die er durch Ungleichheiten des auf ihnen lastenden Druckes entstehen ließ, und prüfte dieselbe durch Experimente.

Von Bedeutung sind seine auf neue Versuche gestützten Erörterungen (1854 und 1859) über die komplizierten Bewegungen des Augapfels, die durch physiologische für die Orientierung im Raume wichtige Anordnungen beschränkt sind. Wie Donders und Listing gezeigt haben, ist mit jeder Lage der Gesichtslinie zum Kopfe eine ganz bestimmte Augenstellung verbunden und jedem Erhebungs- und Seitenwendungswinkel entspricht ein bestimmter Raddrehungswinkel. Indem Meißner die Neigung der Doppelbilder eines vertikalen Stabes bei den verschiedenen Augenstellungen untersuchte oder auch die Lagenveränderungen betrachteter Objekte bestimmte, wenn sie in jeder Augenstellung im blinden Fleck verschwinden, konnte er die von Donders und Listing aufgestellten Gesetze bestätigen. Bei der so viel erörterten Frage nach den Punkten des Raumes, welche mit beiden Augen einfach gesehen werden, waren bekanntlich durch Johannes Müller die Punkte einer durch den fixierten Punkt und die Knotenpunkte der beiden Augen gezogenen Kreislinie erkannt worden; alle Punkte dieses

sogenannten Horopterkreises entwerfen ihr Bild auf unter gleichen Länge- und Breitegraden liegenden Netzhautstellen oder auf die identischen Netzhautstellen; dies war aber nur der auf eine horizontale Ebene beschränkte Horopter und nicht die Horopterfläche. Meißner unternahm es durch feine Versuche, die Form der Horopterfläche zu bestimmen und zeigte, daß der Horopter verschieden ist, abhängig von der Richtung der Gesichtslinien und der dieser Richtung entsprechenden Orientierung beider Augen.

Von Wichtigkeit war ferner die Auffindung (1857) von Nerven und nervösen Zentralorganen in der Submukosa des Darmes, des nach ihm benannten Meißnerschen Plexus; er hat ihn uns hier im physiologischen Institut gleich nach seiner Entdeckung an frischen Holzessigpräparaten mit den damaligen einfachen Mitteln mit großer Gewandtheit gezeigt.

Seine vorher erwähnten, zum Teil bei Siebold ausgeführten vergleichend-anatomischen, embryologischen und physiologischen Untersuchungen an Fadenwürmern (an Ascaris mystax, an Mermis albicans und an Gordius) führten ihn zu der damals viel umstrittenen Frage nach dem Eindringen der Samenfäden in das Ei bei der Befruchtung. Er war einer der ersten (1856), der die von Keber am Ei der Flußmuschel gefundene Mikropyle, mit Samenfäden bedeckt, beim Seeigel wahrnahm und das von M. Barry bei den Kaninchen und von Newport bei den Fröschen behauptete Vorkommen von Samenfäden innerhalb der Eihülle bestätigte.

In die Jahre 1858—1862 fallen seine grundlegenden chemischen Untersuchungen über die Veränderungen des Eiweißes bei der Verdauung. C. G. Lehmann hatte das von ihm bei der Magenverdauung aus Eiweiß erhaltene, in Wasser lösliche Endprodukt Pepton genannt; Meißner zeigte, daß es mancherlei Übergangsstufen gibt, die er als Para-, Meta- und Dyspepton bezeichnete; das Parapepton ist das beim Neutralisieren der sauren Lösung ausfallende, nicht in Pepton übergehende Produkt; das Metapepton fällt bei der Syntonin- und Kaseinverdauung aus der neutralen Lösung durch 0,1 prozentige Säure heraus; das Dyspepton ist durch längere Einwirkung der Säure unlös-

lich gewordenes Parapepton. Das schließlich erhaltene Pepton ist nach ihm ein Gemisch von mehreren Peptonen, und er unterscheidet ein durch konzentrierte Salpetersäure sowie durch schwache Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes a. Pepton, ein durch Salpetersäure nicht, aber durch starke Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes b. Pepton und ein weder durch Salpetersäure noch durch Essigsäure und Ferrocyankalium ausfallendes c. Pepton. Man hat seitdem in der Erkenntnis dieser Produkte Fortschritte gemacht, und man würde jetzt das a. und b. Pepton als Albumosen, das c. Pepton als eigentliches Pepton und den unverdaulichen Rückstand des Dyspeptons als Nuklein bezeichnen. Meißner hat jedoch die Grundtatsachen festgestellt und es ist ein großes Unrecht, seine Verdienste in dieser Richtung zu unterschätzen, denn es ist schwieriger, eine neue Bahn zu brechen als auf einer solchen weiter zu wandeln. Auch an der Feststellung der Wirkung des Pankreassaftes auf Eiweiß war Meißner beteiligt; nachdem Corvisart erkannt hatte, daß der Bauchspeichel für sich allein aus Eiweiß die nämlichen löslichen Peptone wie der Magensaft macht, hielten viele diese Umwandlung für die Folge einer Fäulnis durch niedere Organismen; Meißner bestätigte als einer der ersten Corvisarts Angaben, aber er meinte noch, nur das schwach sauere Sekret habe ohne Fäulnis verdauende Wirkung. Durch langes Kochen von Eiweiß mit Wasser bekam er Stoffe wie bei der Magen- und Pankreasverdauung. Die Verdauung war ihm eine Umprägung der aus den verschiedenen Eiweißstoffen der Nahrung im Darm entstandenen Peptons zu dem spezifischen Bluteiweiß des betreffenden Tieres; er ist in diesem Gedanken seiner Zeit vorausgeeilt, nur ging er nicht so weit, wie es jetzt von manchem geschieht, welche das Eiweißmolekül im Darm zersplittern lassen, um es dann wieder aus den Trümmern aufzubauen.

Es ist Meißner in einer ungemein feinen Untersuchung gelungen in dem Muskelfleisch kleine Mengen eines echten reduzierenden und gärungsfähigen Zuckers, den Fleischzucker, aufzufinden. Nebenbei sei bemerkt, daß er mit seinem Schüler

Ritter, ebenso wie der Engländer Pavy gegen Claude Bernard, während des Lebens keinen Übergang des Glykogens der Leber in Traubenzucker annahm, da sie in der ganz frischen Leber keinen Zucker nachzuweisen vermochten; die letztere Tatsache ist vollständig richtig, aber nicht die Schlußfolgerung, denn während des Lebens wird der entstandene Zucker alsbald durch das Blut weggeschwemmt.

Ein ganz anderes Gebiet betreten die elektrophysiologischen Untersuchungen Meißners. Zu diesen hat er sich eines neuen Meßinstrumentes bedient; er führte nämlich mit dem geschickten Göttinger Mechaniker Meyerstein die nach dem Prinzip von Wilhelm Weber gebaute Spiegelbussole ein, bei der zur Eliminierung des Erdmagnetismus die Annäherung von zwei Magneten und zur Dämpfung der Magnetschwingungen das Induktionsverfahren von Gauss verwendet wurde; dieselbe übertraf an Empfindlichkeit die älteren Apparate. Zunächst prüfte er mittelst Elektroskop und Kondensator das elektrische Verhalten der Oberfläche des menschlichen Köpers; er suchte die Ursache dafür unter der Haut, vor allem in den Muskeln. Dann ging er an die Prüfung der elektrischen Erscheinungen des zusammengedrückten und gedehnten Muskels im Vergleich mit denen bei der Muskelkontraktion, die durch Du Bois Reymonds Untersuchungen über tierische Elektrizität auf die Wirkung während des Lebens präformierter elektromotorischer Moleküle zurückgeführt worden waren. Meißner fand nun, daß der Wadenmuskel des Frosches bei der Kompression in der Längsrichtung eine Verminderung des ruhenden Muskelstromes, bei der Dehnung eine Verstärkung desselben zeigt, und er war daher geneigt, die sogenannte negative Schwankung bei dem Tetanus des Muskels nicht von der Erregung des Muskels, sondern von der Formveränderung desselben abzuleiten. Du Bois Reymond, der dieses Gebiet als seine Domäne betrachtete und keinen Widerspruch ertrug, übte an Meißners Angaben eine ungemein gereizte und ungerechte Kritik; es muß dagegen betont werden, daß die interessanten Beobachtungen von Meißner nicht widerlegt worden sind.

Man hat vielfach trophische Nerven im Körper angenommen, welche der Ernährung der Teile vorstehen sollen, namentlich war es die nach der Durchschneidung des sensiblen Nervus trigeminus oder seines Augenastes am Auge des Kaninchens eintretende Augenentzündung, welche zu einer solchen Annahme führte. Man meinte andererseits, es handle sich dabei um die Folgen äußerer Schädlichkeiten an dem unempfindlich gewordenen Auge und in der Tat trat die Entzündung nicht ein, als Meißner mit Büttner das Auge durch eine Kapsel vor solchen Läsionen schützte. Der erste Beobachter der Erscheinung, der Niederländer Snellen, hielt die Empfindungslosigkeit für die Ursache der Entzündung, Schiff dagegen die Lähmung der Gefäßnerven und die Ausdehnung der Blutgefäße, während Meißner längere Zeit die Lähmung für die Ernährung der Gewebe nötiger Nerven annahm. Er hat mancherlei Beobachtungen als Beweise für seine Anschauung beigebracht, namentlich daß bei Erhaltung eines Teiles der Nervenfasern im Augenaste die Entzündung trotz völliger Empfindungslosigkeit ausblieb. Neuere Beobachtungen haben jedoch die Existenz besonderer trophischer Nerven widerlegt.

Es folgten nun die in der zweiten Hälfte der sechziger Jahre mit Hilfe chemischer Methoden gemachten umfassenden Arbeiten Meißners über das Entstehen einer Anzahl von Zersetzungsprodukten im Körper beim Stoffwechsel; ich halte dieselben für seine bedeutendsten und reifsten Leistungen. Er hat durch dieselben gezeigt, was eigentlich physiologische Chemie ist (worüber man heutzutage den merkwürdigsten Vorstellungen begegnet), nämlich die Anwendung der Chemie zur Untersuchung und Erklärung der Lebensvorgänge, nicht die chemische Untersuchung der Konstitution isolierter chemischer Verbindungen, wenn sie auch im Organismus vorkommen, und ihrer Zersetzungsprodukte im chemischen Laboratorium, welche der reinen Chemie zugehören, wie die klassischen chemischen Arbeiten von Emil Fischer über die Harnsäure, die Zuckerarten und das Eiweiß dartun, die für die Entwicklung der Physiologie allerdings von größter Bedeutung sind. Meißners

[illegible] gehörige Untersuchungen beginnen mit dem mit F. Jolly geführten Nachweis der Bernsteinsäure im Harn mit Fleisch und viel Fett gefütterten Hunden; dieselbe geht offenbar aus dem Fett hervor, da sie zunimmt mit der Menge des gereichten Fettes. Beim Kaninchen trat viel Bernsteinsäure im Harn auf nach reichlicher Fütterung mit Mohrrüben, welche äpfelsauren Kalk enthalten, oder beim Kaninchen, Hund und Menschen nach Darreichung von äpfelsaurem Kalk sowie auch nach Aufnahme von viel Spargeln. Es fand sich im Hundeharn bei Fütterung mit Fleisch stets etwas Harnsäure vor, bei vegetabilischer Nahrung nur Spuren; bei eigentlichen Pflanzenfressern war sie entgegen den gewöhnlichen Angaben stets vorhanden.

Im Jahre 1828 hatte der Chemiker F. Wöhler die denkwürdige Entdeckung gemacht, daß nach Darreichung von Benzoesäure im Harn Hippursäure erscheint, deren Zerlegung in Benzoesäure und Glykokoll 1845 Dessaignes gelang. Es war dieses Entstehen der im Harn der pflanzenfressenden Säugetiere vorkommenden, komplizierter gebauten Hippursäure aus zwei einfacheren Verbindungen das erste Beispiel einer Synthese im Tierkörper. Meißner suchte nun (1866) mit seinem Schüler Shepard nach dem Ort dieser Synthese und der Herkunft der Benzoesäure, des aromatischen Komplexes der Hippursäure des Harns der Pflanzenfresser. Nach Ausschaltung der Nieren fand sich im Blut keine Hippursäure vor, woraus sie schlossen, daß die Synthese der Hippursäure in der Niere stattfindet und nicht, wie Kühne und Hallwachs glaubten, in der Leber. Das Glykokoll der Hippursäure wird nach ihnen bei den Zersetzungen im Körper gebildet, die Benzoesäure stammt dagegen aus der Kutikularsubstanz der verzehrten oberirdischen Pflanzenteile; denn wenn die Kaninchen die Schalen von Äpfeln und fleischigen Blättern oder die Hülsen von Cerealien und Leguminosen erhielten, schieden sie reichlich Hippursäure aus, aber keine nach Verabreichung der inneren abgeschälten Teile.

Als die Bildungsstätte des Harnstoffes betrachtete man

lange Zeit die verschiedenen Organe und nicht die Nieren, da hervorragende Chemiker nach Entfernung der Nieren eine Anhäufung von Harnstoff im Blut gefunden hatten; später (1865) behauptete namentlich Zalesky, der bei Hoppe-Seyler arbeitete, daß nach Unterbindung der Harnleiter sich im Blute Harnstoff anhäufe, aber nicht nach Ausschneidung der Nieren, woraus er schloß, daß in der Niere der Harnstoff entstehe. Meißner trat alsbald dieser Anschauung entgegen, da er bei Kaninchen nach Exstirpation der Niere die gleiche Harnstoffansammlung im Blute beobachtete wie nach Unterbindung der Uretheren. Ich habe um dieselbe Zeit bei Kaninchen und Hunden nach Entfernung der Nieren beträchtliche Ansammlungen von Harnstoff im Blut und allen Organen gefunden und dadurch ebenfalls bewiesen, daß der Harnstoff nicht erst in der Niere etwa aus Kreatin gebildet wird. Die Untersuchungen Meißners über die Ausscheidung von Kreatin und Kreatinin ergaben im wesentlichen die auch von mir erhaltenen Resultate.

Meißner machte bei dieser Gelegenheit auch Versuche über die Ursache der urämischen Erscheinungen, indem er Tieren nach Unterbindung der Harnleiter verschiedene Zersetzungsprodukte wie Kreatin, Kreatinin, bernsteinsaures Natron und Harnstoff in die Venen einspritzte; nur größere Mengen des letzteren beschleunigten den Tod. Ich habe dargetan, daß der Harnstoff an und für sich nicht giftig ist, sondern nur seine Nichtausscheidung aus dem Körper schädlich wirkt.

Da er in der Leber beim Säugetier stets viel Harnstoff, beim Vogel viel Harnsäure fand, so vermutete er, daß der Harnstoff in der Leber der Säugetiere, die Harnsäure in der Leber der Vögel direkt aus der Zersetzung von Eiweiß und zwar aus dem in diesem Organ zerfallenen Eiweiß der Blutkörperchen hervorgeht; wir wissen jetzt, daß der Harnstoff und die Harnsäure allerdings in der Leber entstehen, aber nicht direkt aus Eiweiß, sondern aus von anderen Organen zugeführten stickstoffhaltigen Zersetzungsprodukten, den Vorstufen des Harnstoffes und der Harnsäure.

Nachdem ich nachgewiesen hatte, daß bei der Muskel-

arbeit direkt nicht mehr Eiweiß zerfällt, wohl aber mehr stickstofffreie Stoffe zu Grunde gehen, war die Frage entstanden, ob auch die stickstofffreien Stoffe als Quellen der Muskelarbeit dienen können; Meißner sprach schon im Jahre 1868 aus, daß außer dem stickstofffreien Material der Nahrung auch das Eiweiß oder wenigstens die aus ihm abgespaltenen stickstofffreien Stoffe die Energie für die Muskelarbeit liefern. Wir wissen jetzt mit Sicherheit, daß beide Klassen von Stoffen sich bei der Entstehung der Muskelkraft beteiligen.

Durch seinen Umgang mit Schönbein in Basel war Meißner auf das Ozon und sein merkwürdiges Verhalten zum Organismus, besonders zu dem Blute, aufmerksam geworden; dadurch kam er zu seinen umfangreichen, Schönbein gewidmeten Untersuchungen über den elektrisierten oder ozonisierten Sauerstoff. Es wurde dabei das vollständig trockene Ozon zunächst in einer konzentrierten Jodkaliumlösung absorbiert; sowie man es nun durch Wasser gehen ließ, so traten dichte Nebel auf von dem Antozon Schönbeins oder dem Atmizon nach Meißner; letzterer hielt das Ozon für negativ elektrisch geladenen, das Antozon für positiv elektrisch geladenen Sauerstoff, welche bei der Elektrisierung immer zusammen auftreten, während andere die Nebel für bei der Ozonzerstörung entstandenes Wasserstoffsuperoxyd ansahen. Bei weiteren Untersuchungen meinte er, daß das Ozon nicht eine, wie man glaubte, durch eine andere Atomzahl im Molekül bedingte allotropische Modifikation sei, sondern daß eine Veränderung des Molekularbewegungszustandes vorliege. Es war eine fein durchdachte, mit äußerster Sorgfalt ausgeführte experimentelle Untersuchung.

Eine große Anzahl von Arbeiten ging von seinen zahlreichen Schülern auf seine Anregung und unter seiner Leitung aus seinem Laboratorium hervor.

Eines wesentlichen Verdienstes Meißners muß noch Erwähnung getan werden, nämlich des mit dem Anatomen Jakob Henle für die Jahre 1856—1871 herausgegebenen Jahresberichtes über die Fortschritte der Anatomie, Entwicklungsgeschichte und Physiologie, der in rein sachlicher Weise und

doch streng kritisch die Resultate der Forschung brachte; ich war ihm für seine Berichte über die Stoffwechselversuche der hiesigen Schule dankbar, da er ihnen volles Verständnis zu einer Zeit entgegenbrachte, in der sie von anderen Seiten kaum Beachtung fanden.

Das größte Interesse zeigte er für die die Lebensvorgänge nahe berührenden hygienischen Arbeiten Pettenkofers; indem er die Bedeutung hygienischer Kenntnisse für den Mediziner und Arzt richtig schätzte, hielt er vom Jahre 1874 an eine Vorlesung über öffentliche Gesundheitspflege, die erste der Art an einer norddeutschen Universität. Er führte auch Untersuchungen des Brunnenwassers von Göttingen aus und wirkte mit, den Gesundheitszustand der Stadt zu verbessern.

Meißner war, wie gesagt, noch nach dem Jahre 1872, in dem er seine Publikationen abbrach, bis zuletzt mit wissenschaftlichen Arbeiten beschäftigt. Sein Assistent Boruttau berichtet über Arbeiten zur Widerlegung der Urzeugung und zum Beweis der Notwendigkeit von Mikroorganismen für Gärung und Fäulnis, wobei es ihm gelang, frische tierische Organe in Wasser ohne irgend einen desinfizierenden Zusatz nur durch Abhalten der Keime mittelst gebogener Glasröhren und Watteverschluß jahrelang unverändert aufzubewahren. Dann über Untersuchungen der anatomischen Beziehungen zwischen Ohrlabyrinth und Kleinhirn der Vögel. Ferner über die Analyse der Vokalklänge der menschlichen Stimme und der Klänge vieler Musikinstrumente vermittelst der phonautographischen Methode, wozu er als feiner Kenner der Musik, der jahrelang in der Karwoche hierher kam, um an klassischer Kirchenmusik sich zu erquicken, besonders geeignet war. Dann über rein mathematische Studien über das Newtonsche Fallgesetz.

So zeigt sich uns Meißner als einer der scharfsinnigsten und verdientesten Physiologen seiner Zeit, der unverlöschliche Spuren seiner Wirksamkeit hinterläßt. Erfüllt von dem Drang nach Erkenntnis war er von unbestechlicher Wahrheitsliebe und Gewissenhaftigkeit; streng gegen sich und andere war der etwas verschlossen erscheinende Mann doch von wahrer

Herzensgüte und tiefem Gemüt, wie mir ein rührender Brief zeigte, den ich nach dem Tode seiner Frau, einer Tochter unseres unvergeßlichen Kollegen Kobell, erhielt. Wenn ich in die Vergangenheit blicke, wo wir vor 50 Jahren in die Wissenschaft eingetreten sind, so erinnere ich mich an die reine Freude, die ich an den Fortschritten unserer Wissenschaft hatte, an denen mein edler Freund einen so großen Anteil besaß.

Walther Flemming.[1])

Das korrespondierende Mitglied der Akademie Walther Flemming, Professor der Anatomie an der Universität zu Kiel, ist am 4. August 1905 im Alter von 62 Jahren aus dem Leben geschieden. Er war ein hervorragender Histologe, der durch seine Beobachtungen mit dem Mikroskop die Kenntnis des feineren Baues der Zelle in vorher nicht geahnter Weise vertieft und durch die Aufhellung dieses Gebildes, aus dem alles Organisierte hervorgeht und an welches das Leben geknüpft ist, Zoologie wie Botanik, Entwicklungsgeschichte wie pathologische Anatomie in gleichem Grade gefördert hat.

Er wurde am 21. April 1843 in Schwerin geboren als Sohn des verdienten Psychiaters und Leiters der Irrenanstalt Sachsenberg Karl Friedrich Flemming. Der Sohn Walther Flemming zeigte frühzeitig eine besondere Neigung für die schöne Literatur sowie ein Talent für Dichtung und Sprache, so daß er anfangs sich der Philologie widmen wollte; er wandte sich aber dann der Medizin zu, die er an den Universitäten zu Göttingen, Tübingen, Berlin und Rostock studierte. Bald begann er sich mit mikroskopischen Untersuchungen zu beschäftigen, zuerst unter der Leitung von F. E. Schulze, damaligen Prosektors bei dem Anatomen Henke in Rostock, deren erste Frucht (1868) seine Doktordissertation über den Ziliarmuskel der Haussäugetiere war. Nachdem er bei dem Zoologen

[1]) Siehe die Nekrologe von Friedrich Meves in der Münchener Medizinischen Wochenschrift 1905, Nr. 46, S. 2232. — Und von Dr. F. Graf v. Spee im Anatomischen Anzeiger 1906, Bd. 28, S. 41.

Semper in Würzburg und bei dem Physiologen W. Kühne in Amsterdam kurze Zeit Assistent gewesen, wurde er Prosektor am Anatomischen Institut in Rostock und habilitierte sich (1871) daselbst als Privatdozent der Anatomie und Entwicklungsgeschichte mit einer Arbeit über Bindesubstanz und Gefäßwandung bei Mollusken. 1872 ging er mit Henke nach Prag, woselbst er im folgenden Jahre die Ernennung zum außerordentlichen Professor mit dem Lehrauftrag für Histologie und Entwicklungsgeschichte erhielt; dorten schon sammelte sich um ihn eine Anzahl von talentvollen Schülern, die zum Teil ihre ersten Arbeiten unter seiner Leitung machten. Im Jahre 1876 folgte er dem Rufe als Nachfolger unseres verstorbenen Kollegen C. Kupffer als ordentlicher Professor der Anatomie nach Kiel, wo er 26 Jahre lang als Zellforscher und Lehrer überaus tätig war.

Flemming ist seiner Arbeitsrichtung nach ausschließlich Histologe, aber als solcher bahnbrechend gewesen und zwar vorzüglich auf einem Gebiete, der bis an die Grenze des Sichtbaren gehenden feinsten Struktur der Zelle, das zu den schwierigsten Objekten der mikroskopischen Forschung gehört. Er war einer der größten Meister in der Kunst der mikroskopischen Beobachtung, ebenso scharf blickend als Beobachter, wie vorsichtig und gewissenhaft in seinen Generalisationen.

Ein Meister auch in der Technik, rastlos an stetiger Vervollkommnung seiner Methoden arbeitend, hat er am lebenden Objekt sowie an dem mit Reagentien und mit den Hilfsmitteln der Färbung behandelten die zartesten Strukturen enthüllt.

Dadurch hatte er sich in kurzer Zeit zu einem der berühmtesten Histologen aufgeschwungen.

Nach seiner Doktordissertation folgten zoologisch-histologische Arbeiten, Beobachtungen über Sinnesepithelien und Bindegewebe bei Mollusken und die auch für die Physiologie wichtigen Aufschlüsse über Bildung und Rückbildung der Fettzelle im Bindegewebe; nach Toldt soll das Fettgewebe ein besonderes Organ sein, welches nicht aus dem Bindegewebe

hervorgeht, Flemming suchte dagegen nachzuweisen, daß die Fettzellen sich aus den gewöhnlichen Bindegewebszellen bilden und das Fett als Produkt der Stoffwechselvorgänge in der Zelle entsteht.

Beobachtungen über die ersten Entwicklungserscheinungen am Ei der Teichmuschel und der Najaden führten ihn auf sein eigentliches Forschergebiet, zu dem Studium des Baues und der Lebenserscheinungen der Zelle, das ihn von nun an während seines ganzen Lebens beschäftigen sollte. Mit der größten Ausdauer untersuchte er den Leib der Zellen und insbesondere ihres Kerns in der Absicht aus der genauen Kenntnis der Form auch die Erscheinungen ihres Lebens, eine Zellularphysiologie, zu entwickeln. Seine zahlreichen grundlegenden Arbeiten hierüber hat er 1882 in seinem Hauptwerke: „Zellsubstanz, Kern und Zellteilung" zusammengefaßt; dasselbe bildete die Grundlage für alle weitere Zellforschung, die wohl manche neue Tatsachen zufügte, aber keine Irrtümer nachwies.

Bis zu Flemmings Eingreifen glaubte man, die Zellsubstanz oder das Protoplasma wäre eine gleichmäßige feinkörnige Masse, von einer Struktur derselben war kaum und nur in einzelnen Fällen etwas bekannt. Es waren allerdings schon von einigen, z. B. von unserem Kollegen C. Kupffer, Fadenstrukturen in der Zellsubstanz beschrieben worden; aber erst Flemming hat die verschiedenen Zellen daraufhin eingehend geprüft und überall im Inhalt derselben ein eigentümliches Fadenwerk vorgefunden, eine Filarmasse und eine Interfilarmasse; er hielt es für wahrscheinlich, daß es sich dabei um ein feines Gerüst handelt.

Noch merkwürdigere Strukturen und Vorgänge erkannte er am Zellkern, den man lange für ein homogenes Gebilde oder für ein mit Flüssigkeit gefülltes Bläschen gehalten hatte. Es waren wohl schon hie und da in den Kernen strangförmige Bildungen gesehen worden; Flemming gelang es jedoch (1875) eine gerüstförmige Struktur an der frischen Eizelle von Muscheln mit Sicherheit zu erkennen und dann sich zu überzeugen, daß dieses Gerüstwerk im lebenden Kern ein allgemeines Vor-

kommen ist; seine Beobachtungen lieferten die Grundlage zu dem heutigen Wissen von dem Bau des Zellkerns.

Von größter Bedeutung sind die von ihm an lebenden Objekten beobachteten Veränderungen bei der Teilung der Zellen und Zellkerne, der Mitose. Bei der ausschließlich durch Teilung stattfindenden Vermehrung der Zellen zeigen sich die ersten Phänomenr bekanntlich am Kern; nach der alten Lehre von Remak soll sich dabei der Kern nach Verdoppelung des Nukleolus in zwei Hälften durchschnüren; Flemming war einer der ersten, der dabei an sich furchenden lebenden Eizellen wirbelloser Tiere viel kompliziertere Vorgänge fand. In seinen berühmten Beiträgen zur Kenntnis der Zelle und ihrer Lebenserscheinungen (1878) wurde von ihm der ganze merkwürdige Verlauf der Kernteilung Schritt für Schritt verfolgt und festgestellt, daß der Kern dabei nicht zu Grunde geht, wie es anfangs schien, sondern auf Umwegen durch sogenannte indirekte Mitose sich teilt. Diese Erkenntnisse legten den Grund zu einer neuen Epoche in der Zellenlehre, besonders in der Struktur und der biologischen Bedeutung des Kerns.

Die gleiche mitotische indirekte Zellteilung und Zellvermehrung wies er dann auch nach bei der Regeneration fertiger Gewebe, z. B. an den Lymphzellen in den Keimzentren der Lymphknötchen sowie bei den Epithelzellen und bei den Samenfäden, wobei das Chromatin der Hodenzelle zum Sperminkopf, die achromatische Substanz des Kerns zu dessen Hülle und der Zellleib zum Sperminschwanz wird.

Noch eine besonders wichtige, im Jahre 1891 gemachte Untersuchung muß erwähnt werden, nämlich die der zellulären Zentren in Gewebs- und Wanderzellen. Flemming hatte 1875 im Zentrum der Radiensysteme bei der Teilung des Eies von Anodonta besondere körperliche Gebilde gesehen, welche dann auch andere an sich furchenden Eiern beobachteten und Polkörperchen nannten, die in der Zellsubstanz erst nach Beginn der Teilung auftreten sollen. Nach van Beneden und Boveri finden sich die Polkörperchen oder Zentrosomen schon vorher und sind allgemeine und dauernde Teile der Zelle; im Innern

der Zentrosomen wurde noch ein winziges Zentralkorn, der Zentriol, erkannt. Flemming fand nun im Zentrum der Strahlung in verschiedenen Gewebszellen neben den völlig ruhenden Kernen kleinste Doppelkörnchen, die aber nicht, wie man meinen könnte, Zentrosamen sind, sondern den Zentriolen entsprechen; die Zentriolen sind demnach allgemeine und permanente Zellorgane und nicht die Zentrosomen.

Sehr verdienstvoll sind ferner seine in den Jahren 1892 bis 1898 in den Merkel-Bonnetschen Ergebnissen veröffentlichten Berichte über die neuen Arbeiten über die Morphologie der Zellen, die nur er mit solcher Sachkenntnis und Kritik schreiben konnte.

Es wären ja noch viele wichtige Arbeiten Flemmings aufzuzählen, z. B. die zur Kenntnis des Ovarialeies, die er Karl Kupffer zum 70. Geburtstag gewidmet hat. Er hatte anfangs wohl manche Gegner, aber später schlossen sich viele Mitarbeiter an ihn an, die auf der von ihm geschaffenen Grundlage weiter bauten. Zahlreiche junge Anatomen kamen nach Kiel, um bei dem bewährten Meister sich in der histologischen Forschung auszubilden.

Ein im Jahre 1892 auftretendes schweres Nervenleiden beeinträchtigte seine gewohnte Tätigkeit, ohne jedoch seinen Verstand und sein Gedächtnis zu alterieren, so daß er 1901 um Enthebung von seinem Amte nachsuchen mußte.

Alle, welche ihm näher traten, verehrten den edlen Mann von unabhängiger Gesinnung und wahrer Herzensgüte.

Ferdinand Frhr. v. Richthofen.[1])

Durch das am 6. Oktober 1905 erfolgte Ableben des ordentlichen Professors für Geographie an der Universität zu Berlin Ferdinand v. Richthofen hat die geographische Wissenschaft ihren bedeutendsten Vertreter verloren. Aus regster Tätigkeit

[1]) Siehe den Nekrolog von Dr. E. Frhr. Stromer v. Reichenbach, Beilage zur Allgem. Ztg. 1905, Nr. 238, und „Gedächtnisfeier für Ferd. Frhr. v. Richthofen“, Beilage zur Allgem. Ztg. 1905, Nr. 262.

wurde er im Alter von 72 Jahren abberufen. Er ist von der Geologie, in der er zuvor Bedeutendes geleistet und seinen Sinn für Naturforschung ausgebildet hatte, zur Geographie geführt worden.

Am 5. Mai 1833 zu Karlsruhe, einem kleinen Orte Schlesiens geboren, studierte er an den Universitäten zu Breslau und Berlin Geologie, zu der er schon früh besondere Neigung gefaßt hatte; mit einer geschätzten Dissertation „de Melaphyro“ trat er 1856 zuerst vor die Öffentlichkeit. Nach einer geologischen Studienreise durch Dalmatien und die benachbarten Teile der Balkanhalbinsel begab er sich nach Wien, um an den praktischen Aufnahmsarbeiten der geologischen Reichsanstalt Teil zu nehmen. An diesem berühmten, damals unter der Leitung von Ferdinand v. Hochstetter stehenden Institut fand er wie so viele junge Geologen die beste Ausbildung. Gleichsam als Probeaufgabe übernahm der junge Praktikant im Sommer 1856 die geologische Durchforschung eines der wichtigsten, zugleich aber auch schwierigsten Gebiete in den südtiroler Alpen, nämlich die Umgebung der berühmten Fundstätte von Versteinerungen in St. Cassian und des höchst interessanten Fassatals mit dem glänzendsten Erfolge, so daß schon diese erste größere geologische Publikation als Grundlage für die geologische Auffassung der gesamten südlichen Kalkalpen gelten kann; sie zeichnet sich durch scharfe und kritische Beobachtung der so verwickelten Gebirgsverhältnisse, durch klare und übersichtliche Darstellung sowie durch geistreiche Versuche aus, die außergewöhnlichen Erscheinungen alpiner Gesteinsbildungen naturgemäß zu erklären; für die viel umstrittene Theorie der Dolomitbildung, welche in Südtirol durch die plötzlich zu enormer Mächtigkeit anschwellende Ausbildung noch besondere Wichtigkeit erlangt, fand er eine neue Erklärung in der Annahme ihrer Entstehung aus umgewandelten Korallenriffen. In den folgenden Jahren beteiligte sich Richthofen an den Arbeiten der geologischen Reichsanstalt in verschiedenen Gegenden Österreichs und gewann überall, wo er mit seinem eminenten Fleiß und scharfem Blick seine For-

schungen vornahm, neue Erfolge. Sorgsam in der Einzelbeobachtung ließ er gleichwohl nie unversucht, einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt zu gewinnen, indem er im Überblick über das Ganze allgemeine Gesetze ableitete und auf diese Weise die geologische Wissenschaft wesentlich förderte. So wußte er namentlich mit vielem Glück aus den Ergebnissen seiner Forschungen in den vulkanischen Gebieten Ungarns eine tiefere Gliederung der bis dahin fast zusammenhangslos betrachteten trachytischen Gebilde zu gewinnen. In den tiroler Kalkalpen, wo er gleichzeitig mit der bayerischen geognostischen Aufnahme beschäftigt war, trugen seine Arbeiten nicht wenig dazu bei, diese Teile des Hochgebirges in beiden Ländergebieten in einheitlichem Sinne zur geologischen Darstellung zu bringen.

Eine Wendung in der wissenschaftlichen Tätigkeit Richthofens brachten hierauf seine großen Reisen hervor, die ihn der Geographie zuführten. Er wurde nämlich im Jahre 1860 aufgefordert, die preußische außerordentliche Gesandtschaft des Grafen zu Eulenburg, die mit den ostasiatischen Reichen Japan, China und Siam Handelsverträge abschließen sollte, als Geologe mit dem Range eines Legationssekretärs zu begleiten. Zahlreiche wichtige Reiseberichte, welche bereits während der Expedition erschienen, z. B. über den Gebirgsbau an der Nordküste von Formosa, Bemerkungen über Ceylon, die Nummuliten-Formation in Japan und auf den Philippinen legen Zeugnis ab von seiner unermüdlichen und erfolgreichen Tätigkeit. Als die Expedition von Siam heimwärts ging, blieb Richthofen zurück, um allein und selbständig weitere Aufgaben zu lösen: er wandte sich nach Hongkong, Schanghai, besuchte Formosa, die Philippinen, Celebes, Java und wollte von Bangkok zum Ganges vordringen, um über Kaschmir durch China zum Tian-Schan zu kommen, was ihm aber erst vier Jahre später gelang. Er begab sich daher nach Kalifornien und die Sierra Nevada, die er durchforschte. Die Ergebnisse dieser ausgedehnten Reisen wurden in zahlreichen wichtigen Publikationen niedergelegt, so die über das Alter der Gold führenden Gänge und

der von ihnen durchsetzten Gesteine, über die Metallproduktion Kaliforniens und insbesondere die Principles of the natural system of volcanit rocks, in welcher Abhandlung er eine generelle Klassifikation aller auf der Erde auftretenden vulkanischen Gesteine mit dem ihm eigentümlichen Scharfsinn und auf Grund seiner ausgedehnten Erfahrungen aufstellt, auch die Gesetze der gegenseitigen Beziehungen zwischen Massen-Eruptionen und vulkanischer Tätigkeit einer gründlichen Erörterung unterzieht und endlich die Beziehung der Verteilung vulkanischer Gesteine zur Gestaltung der Erdoberfläche klar legt.

Von da zog er nun 1868 nach Schanghai, um während vier Jahren sich der umfassenden Erforschung Japans und Chinas zu widmen, die er in den verschiedensten Richtungen durchzog; von den 18 Provinzen Chinas lernte er dabei 13 kennen. Seine Forschungen in China lieferten ihm nach der im Jahre 1872 erfolgten Rückkehr nach Europa das reichste Material zu der bis jetzt eingehendsten und gründlichsten Schilderung der damals noch wenig bekannten geographisch-geologischen Verhältnisse dieses ausgedehnten Landes. Mit diesem großartigen Reisewerk über China, der Frucht Jahre langer Arbeit, welches nach allen Beziehungen den bedeutendsten auf diesem Gebiete erschienenen Publikationen ebenbürtig zur Seite gestellt zu werden verdient, hat sich Richthofen einen Ehrenplatz unter den hervorragendsten Geologen und Forschern auf geographischem Gebiete gesichert; es enthält die Grundzüge des geologischen Aufbaus Ostasiens und ist bahnbrechend für die wissenschaftliche Erschließung des fernen Ostens gewesen. Außerdem waren von Wichtigkeit seine Briefe über China an die ihn unterstützende Handelskammer in Schanghai mit gründlichen Schilderungen der politischen, sozialen und wirtschaftlichen Verhältnisse Chinas; dann die Schrift: Aufgaben und Methoden der heutigen Geographie, die Anleitung zur praktischen geographischen Arbeit und der im Jahre 1886 erschienene „Führer für Forschungsreisende", worin er die Prinzipien seiner Forschung darlegte.

Nach Abschluß seiner großen Reise erhielt er 1875 einen Ruf als ordentlicher Professor der Geologie an die Universität Bonn mit der Zusage, die Stelle erst nach Vollendung des ersten Teils seines Reisewerkes (1879) antreten zu dürfen; 1883 erfolgte die Berufung als Professor der Geographie nach Leipzig und 1886 die nach Berlin in gleicher Eigenschaft.

Wie er vom Geologen zum Geographen sich allmählich entwickelte, beschrieb er in seiner vor der Akademie der Wissenschaften in Berlin im Jahre 1899 gehaltenen Antrittsrede mit folgenden Worten: „Mein Studium war die Geologie. Ihre praktische Anwendung auf den Gebirgsbau heimischer und fremder Länder stellte ich mir früh als Ziel der Forschung. Das Streben, die Gesamtheit der Erscheinungen zu erfassen, welche dem Wesen und den natürlichen Veränderungen von mir untersuchten Erdräumen zugrunde liegen, führte mich zur physischen Geographie, inbesondere zu deren wichtigstem Zweig, der Geomorphologie.“ Er setzte dabei die geologischen, physischen, historischen, wirtschaftlichen und kulturellen Probleme stets zu einander in Beziehung und zog aus seinen wissenschaftlichen Untersuchungen die praktischen Folgerungen.

So ist er zum angesehendsten Geographen seiner Zeit und zum Richtung gebenden Führer in seiner Wissenschaft geworden. Es gingen außerdem von ihm noch andere wichtige Anregungen hervor. So war er der Gründer und erste Direktor des Instituts für Meereskunde in Berlin, in dem die deutsche Meeresforschung sich konzentrierte. Das geographische Institut der Universität erhob er auf die Höhe einer Musteranstalt. Mehr als 30 Jahre war er der eifrigste Förderer der Gesellschaft für Erdkunde und 17 Jahre lang ihr erster Präsident, der er den Geist ernster wissenschaftlicher Forschung einzupflanzen wußte. Auf dem Geographentage in München 1884 beantragte er die Schaffung eines Repertoriums, das dann als „Bibliotheca geographica“ von der Berliner Gesellschaft für Erdkunde verwirklicht wurde.

Er war auch ein ungemein eifriger und beliebter Lehrer, der eine große Anzahl von Schülern um sich versammelte, die

er für die Wissenschaft zu begeistern wußte. In seiner viel besuchten Vorlesung der vergleichenden Übersicht der Kontingente gab er aus dem reichen Schatze seines Wissens ein anschauliches Bild von dem Zusammenhang des geologischen Aufbaues der Gestalt der Erdoberfläche, den klimatischen Verhältnissen, der Flora und Fauna und der wirtschaftlichen Entwicklung der Bewohner. Von besonderer Bedeutung war das Colloquium für Vorgerücktere, einem Seminar für ältere Studierende und junge Gelehrte aller möglichen Wissensgebiete, in dem er sein Bestes gab und seine Schule erzog. Ein edler Mensch von schlichter sittlicher Größe und unabhängigem Charakter ist mit ihm dahingegangen.

Otto Stolz.

Am 23. November 1905 starb in Innsbruck der Professor der Mathematik an der Universität daselbst Dr. Otto Stolz im Alter vom 63 Jahren. Er wurde am 2. Juli 1842 zu Hall in Tirol als der Sohn des Direktors der Landesirrenanstalt geboren und studierte in Innsbruck und Wien Mathematik und Astronomie. Nachdem er 1864 promoviert hatte, habilitierte er sich 1867 an der Wiener Universität als Privatdozent für Mathematik und wurde zugleich als Assistent an der Wiener Sternwarte angestellt. Im Jahre 1869 verließ er diese Stellung, um mit Hilfe eines Reisestipendiums bei Kummer, Weierstraß und Kronecker in Berlin, sodann bei Clebsch in Göttingen seine Studien fortzusetzen. 1871 nahm er seine Lehrtätigkeit in Wien wieder auf, wurde aber schon im folgenden Jahre nach Innsbruck berufen, wo ein zweiter Lehrstuhl für Mathematik errichtet worden war; 1876 erhielt er die ordentliche Professur daselbst. Trotz mehrfacher verlockender Rufe nach Wien ist er doch seiner Landesuniversität treu geblieben. Er war wirkliches Mitglied der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien und seit 1900 korrespondierendes Mitglied [illegible] ...ie.

Als Schüler von Clebsch wandte er sich zunächst der analytischen Geometrie zu. Seine erste größere Arbeit auf diesem Gebiete: „Über die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der Geometrie“ (1871) löste in überaus glücklicher Weise das Problem, gewisse rein geometrische Ergebnisse der Staudtschen Forschungen dem Gebiete der analytischen Geometrie einzuverleiben. Es folgten eine Reihe weiterer analytisch-geometrischer Arbeiten, die wie die ebengenannte während der siebenziger Jahre in den Mathematischen Annalen erschienen sind und sich auf singuläre Punkte, Assymptoten und Schnittpunkte algebraischer Kurven beziehen. Eine tiefere kritische Untersuchung gewisser Grundlagen der Geometrie, wie sie in seiner Abhandlung: „Über die Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes“ (1883) zutage tritt, sodann wohl auch seine Lehrtätigkeit und die in der Berliner Studienzeit empfangenen Anregungen führten ihn allmählich ganz jener Richtung zu, welche man wohl allgemein als die Weierstraßsche zu bezeichnen pflegt und deren Endziel in der strengen arithmetischen Begründung und lückenlosen Ausgestaltung der Funktionenlehre besteht. Die Mathematischen Annalen der letzten zwanzig Jahre und die Sitzungsberichte der Wiener Akademie enthalten eine ansehnliche Zahl Stolzscher Arbeiten über Gegenstände des ebenbezeichneten Gebietes: Grenzwerte, Punktmengen, Doppelreihen, gleichmäßige Konvergenz, unendlich kleine Größen, Maxima und Minima, bestimmte Integrale u. a.

Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, sei nur hervorgehoben, daß der für die Theorie der ein- und mehrfachen Integrale fundamentale Begriff des Inhalts einer Punktmenge zuerst von Stolz formuliert worden ist (1884). Die Resultate seiner eigenen Forschungen und die Früchte einer ungewöhnlich ausgedehnten Literaturkenntnis faßte er in zwei größeren Werken zusammen: Den zweibändigen „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ (1885—1886) und den „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung“ (3 Bände, 1893—1899); ihnen folgte die „Theoretische Arithmetik“; dieselben haben

nicht wenig dazu beigetragen, die schärferen Methoden der neueren Analysis und deren schwierige Untersuchungsgebiete weiteren Kreisen zugänglich zu machen, und sind jedem Fachmann zu unentbehrlichen Handbüchern geworden. In unseren Sitzungsberichten vom 7. Januar 1905 erschien noch eine Abhandlung von ihm: „Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals."

Stolz hatte auch das Bestreben, die Lehren der Wissenschaft dem Volke zugänglich zu machen; dahin gehört sein vortreffliches Buch „Die Sonne" sowie seine Rede über „Größen und Zahlen", in welche er einige Wesensbegriffe der Mathematik mit philosophischen Betrachtungen in geistvoller Weise entwickelt.

Er war ein ausgezeichneter Lehrer, zu dessen Schülern viele Studierende der Theologie gehörten.

Seine Freunde, zu denen ich mich zu zählen das Glück hatte, haben ihn als echte Tiroler Natur, begeistert für die Schönheiten seines Vaterlandes, trotz seines großen Wissens als einfachen und biederen Mann von zuverlässigem Charakter und großer Liebenswürdigkeit gekannt.

Generalmajor Karl v. Popp.

In dem am 22. Oktober 1905 im 81. Lebensjahre in München verstorbenen Generalmajor a. D. Karl von Popp verlor die Akademie einen um die Erforschung der Urgeschichte Bayerns höchst verdienten Mitarbeiter. Popp war nicht nur ein hervorragender tapferer Offizier, er war auch ein Gelehrter, der sich mit großer Ausdauer und Sachkenntnis der Erforschung des Limes und seiner fortifikatorischen Anlagen und Straßen widmete. Als Militär, anfangs dem Topographischen Bureau des Generalquartiermeisterstabes zu gleicher Zeit mit unserem Mitgliede v. Orff zugeteilt, interessierte er sich schon früh lebhaft für diese Reste der altrömischen Befestigungen in Deutschland und er hatte durch deren genaue Untersuch-

die Kenntnisse über dieselben sehr gefördert. Da war es selbstverständlich, daß die Akademische Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns sich 1890 als technischen Beirat den Mann erwählte, welcher der erfahrenste für ihre römischen Untersuchungen war. In der Festrede am 141. Stiftungstage der Akademie im Jahre 1900 hat Herr Johannes Ranke die höchst ersprießlichen Leistungen Popps für die Kommission nach den Berichten des damaligen Vorsitzenden der Kommission Heinrich v. Brunn geschildert. Popp wird darin als eine für seine Aufgabe in seltener Weise qualifizierte Persönlichkeit bezeichnet: „Gewöhnt im Gelände überall persönlich zu untersuchen, Terrainstudien und Aufnahmen in technisch und künstlerisch vollendeter Weise selbst auszuführen, vollkommen vertraut mit jeder Einzelheit der vorliegenden Aufgaben, seit lange überall in Stadt und Land bekannt und verehrt als Förderer der urgeschichtlichen topographischen Untersuchungen." Er übernahm die Beaufsichtigung und Leitung sowie die selbstständige Untersuchung der römischen Altertumsreste; als solcher nahm er von neuem den Limes mit seinen fortifikatorischen Anlagen topographisch auf, wodurch mehrere ältere Annahmen berichtigt werden konnten. Außerdem wurden von ihm die römischen Fundplätze und Straßen im Lande besucht, genau untersucht und kartographisch festgelegt. Er hatte ferner die Angaben der Mitarbeiter über neu gemachte Römerfunde zu prüfen und ihre Untersuchungen zu überwachen. Auch die vorrömischen und mittelalterlichen Befestigungen nahm er unter seinen Schutz. Unausgesetzt war der liebenswürdige Mann bereit, seine Mitarbeiter durch Rat und Tat zu unterstützen, neue Mitglieder der Sache zu gewinnen und die historischen Vereine und Altertumsgesellschaften zur Tätigkeit anzuregen. In dieser Weise hat er die urgeschichtlich-archäologische Landesaufnahmen neu belebt. Er war auch der Vorsitzende der Kartenkommission, welche genaue topographische Aufnahmen der urgeschichtlichen Bodenaltertümer machte und sie in die Katasterblätter eintrug, um für spätere Zeiten ihren Ort festzustellen. Als die Erforschung des römischen Limes

auf das Deutsche Reich überging, wurde Popp stimmführendes Mitglied der Reichslimes-Kommission und ihres engeren Ausschusses.

Die Akademie verlieh Popp im Jahre 1899 an seinem 80. Geburtstage für seine vielseitige und ergebnisreiche Tätigkeit bei der Kommission die goldene Medaille „Bene Merenti" als höchste Auszeichnung. Wir werden des verdienstvollen treuen Mitarbeiters stets in Dankbarkeit und Hochachtung gedenken.

Berichtigungen.

1. Zu der Abhandlung „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen" von Edmund Landau.

Auf S. 156, Z. 6 v. u. lies: $|c_n - c_{n+1}|$ statt $(c_n - c_{n+1})$.

Auf S. 159, Z. 10 v. o. lies: $\dfrac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}}$ statt $n^{\frac{1}{1+\Re(x_1-x_0)}}$.

Auf S. 161, Z. 12–14 v. o. lies:

$$\Re(x_0)+\gamma_1 \leq u \leq \Re(x_0)+\gamma_2,\quad \gamma_4 \leq v \leq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vier reelle Größen bezeichnen ($0<\gamma_1<\gamma_2$, $\gamma_4<\gamma_3$), die so gewählt sind, daß etc.

Auf S. 161, Z. 6–5 v. u. lies:

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der fünf Zahlen $|x_0|$, $|\Re(x_0)+\gamma_1|+|\gamma_3|$, $|\Re(x_0)+\gamma_2|+|\gamma_3|$, $|\Re(x_0)+\gamma_1|+|\gamma_4|$ und $|\Re(x_0)+\gamma_2|+|\gamma_4|$ gewählt wird, so etc.

2. Zu der Abhandlung „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen" von F. Hartogs.

S. 224 Z. 10 v. o. ist hinter „welche" einzuschalten: (abgesehen von dem einfachsten, die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen betreffenden Falle)

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 3. November 1906.

1. Herr Sebastian Finsterwalder legt eine Abhandlung von Herrn Moritz v. Rohr, wissenschaftlichen Mitarbeiter der Firma Zeiß in Jena, vor über: „Die beim beidäugigen Sehen durch optische Instrumente möglichen Formen der Raumanschauung."

Der Charakter der natürlichen Perspektive mit einem Auge besteht darin, daß das Projektionszentrum vom Objekt aus gesehen gegen den Beobachter zu liegt und nahe Dinge größer erscheinen als gleich große ferne. Beim einäugigen Sehen durch optische Instrumente können aber auch alle gleich großen Gegenstände in gleicher Größe erscheinen, ja sogar die fernen größer als die nahen. In solchen Fällen kann man um einen konvexen Körper herumsehen und z. B. von einem Würfel 5 Flächen von einem Punkt aus überblicken. Beim beidäugigen Sehen hängt die zustande kommende Raumanschauung außerdem von der Art und Weise ab, wie durch das optische Instrument die beiden Augen in den Objektraum hinausprojiziert werden, ob ihre gegenseitige Stellung dabei ungeändert bleibt, ob sie

zusammenfallen oder vertauscht sind. Es entstehen so neun Formen der Raumanschauung, von denen sechs bereits bekannt sind.

2. Herr Herm. Ebert überreicht eine Arbeit seines Schülers, des Herrn Dr. C. W. Lutz, Assistenten am erdmagnetischen Observatorium, welcher die luftelektrischen Beobachtungen an der hiesigen Sternwarte durchführt: „**Über einen neuen Flammen-Kollektor und dessen Prüfung im elektrischen Felde.**“

Zu den wichtigsten luftelektrischen Messungen gehört die Bestimmung des elektrischen Spannungsunterschiedes zwischen der freien Atmosphäre und der Erde. Man gebraucht hiezu besondere Apparate „Kollektoren“ genannt, welche den elektrischen Spannungszustand oder das „Potential“ der sie umgebenden Luft annehmen. Vor allem sind in Verwendung die Flammenkollektoren, denen aber seither zwei bedeutende Nachteile anhafteten: sie verlöschen schon bei mäßiger Luftbewegung und ihre Angaben werden vom Winde beeinflußt, wodurch unter Umständen erhebliche Fehler in die Potentialmessungen hineingebracht werden. Verfasser hat nun einen neuen besonders wirksamen Flammenkollektor konstruiert, der mit Sicherheit bei jedem Winde brennt, leicht transportabel und sparsam im Verbrauche ist.

Dieser Apparat wurde in einem künstlich hergestellten elektrischen Felde einer eingehenden Prüfung unterzogen und insbesondere der Einfluß der Luftbewegung auf seine Angaben untersucht. Auf Grund seiner Messungen kommt der Verfasser zu dem Schlusse, daß sich durch Anwendung zweier, völlig gleichgebauter Kollektoren der beschriebenen Art, die in verschiedener Höhe isoliert im freien Terrain aufgestellt werden, eine einwandsfreie Messung des dort bestehenden luftelektrischen Potentialgefälles ermöglichen läßt.

3. Herr Herm. Ebert berichtet über Versuche, welche er in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Max Edelmann im Laufe des verflossenen Jahres über „Pulsationen von kurzer Dauer in der erdmagnetischen Feldkraft" angestellt hat.

Schon früher waren regelmäßige Schwingungen bei Gelegenheit erdmagnetischer Störungen beobachtet worden, welche in den Feinregistrierungen oft sehr entfernter Stationen in auffallender Übereinstimmung hervortraten und Eschenhagen glaubte (1896) in solchen Pulsationen von ca. 30 Sekunden Periodendauer die „erdmagnetischen Elementarwellen" gefunden zu haben. Indessen wurden bald Anzeichen dafür erhalten, daß in den erdmagnetischen Elementen regelmäßige Schwankungen von noch viel kürzerer Dauer vorkommen. Um diese zu verfolgen wurde auf störungsfreiem Terrain im Walde (zwischen Icking und Wolfratshausen) ein vieladriges Kabel zu einer größeren Schleife ausgelegt und mit einem empfindlichen Edelmannschen Saitengalvanometer verbunden, dessen überaus dünner Metallfaden jeder Schwankung der elektrischen Kraft genau folgt, welche durch das Ein- oder Austreten von erdmagnetischen Kraftlinien in oder außer der Leiterschleife geweckt wird; die interessanten Schwingungsbilder, die sich hierbei auch an störungsfreien Tagen ergaben, konnten auf rotierenden Filmstreifen auch photographisch fixiert werden; einige derselben wurden in der Sitzung vorgelegt.

4. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Herrn Dr. J. B. Messerschmitt, Observators des erdmagnetischen Observatoriums bei der Sternwarte: „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern" (2. Mitteilung) vor.

Ein über das ganze Land ziemlich gleichmäßig verteiltes Netz von Stationen wurde für die magnetische Landesaufnahme durchbeobachtet. Die Ergebnisse lassen im Zusammenhang mit den vor 50 Jahren von Lamont angestellten Messungen die seither stattgefundenen Änderungen der magnetischen Elemente genau ermitteln. Weiterhin konnten die wichtigsten magneti-

schen Störungsgebiete festgestellt und ein Zusammenhang mit den Anomalien der Schwerkraft und mit den geologischen Verhältnissen festgestellt werden.

5. Herr Alfred Pringsheim legt eine Note des Herrn Dr. Georg Faber in Karlsruhe vor: „Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten."

Der Verfasser gibt ein sehr einfaches Beispiel für die von Herrn E. Fabry bemerkte Tatsache, daß gewisse Potenzreihen mit unendlich vielen, unbegrenzt sich erweiternden Lücken nur eine einzige singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreise besitzen.

Die beim beidäugigen Sehen durch optische Instrumente möglichen Formen der Raumanschauung.

Von **Moritz v. Rohr.**

(Eingelaufen 3. November.)

(Mit Tafel IV.)

Wenn man die Formen der Raumanschauung, die durch die verschiedenen binokularen Instrumente vermittelt werden, systematisch ordnen will, so stößt man bei der Pseudoskopie auf eine gewisse Schwierigkeit. Diese Erscheinung ist nicht nur auf eine gewissermaßen zufällige Art entdeckt worden, sondern sie wird auch heute noch in einer recht indirekten, an den Einzelheiten der pseudomorphen Instrumente haftenden Weise der Orthoskopie gegenübergestellt.

Die Betrachtung der Strahlenbegrenzung schien hier ein einfaches Einteilungsprinzip an die Hand zu geben, und die eingehende Behandlung der verschiedenen Fälle lieferte auch eine Erweiterung der Erkenntnis für die beim einäugigen Sehen auftretenden Möglichkeiten.

Wenn man mit freien Augen ein Objekt betrachtet, so sind stets zwei Bedingungen ohne weiteres erfüllt, und zwar ist ihre Erfüllung so selbstverständlich, daß ihr Bestehen bei der Behandlung des Sehvorganges meistens übersehen wird. Einmal liegt im Sinne der Lichtbewegung das Objekt in Bezug auf jedes Einzelauge vorn, und dann ist die Lage der beiden Augen zueinander stets so, daß ihre Medial- oder Nasenseiten einander zu-, ihre Lateral- oder Schläfenseiten voneinander abgewandt sind. Beide Bedingungen sollen in der neben-

stehenden Figur 1 als erfüllt kenntlich gemacht sein. Die erste von ihnen ist die Bedingung des einäugigen, die zweite die des beidäugigen natürlichen Sehens. Es ist auch ganz unmöglich, sich beim Gebrauch der unbewaffneten Augen den Objekten gegenüber von der Einhaltung dieser Bedingungen frei zu machen.

O

Fig. 1. Die Betrachtung des Objekts O mit unbewaffneten Augen.

Der Charakter der natürlichen Perspektive.

Die soeben erwähnte Lage des Einzelauges zum Objekt hat zur Folge, daß sich das Projektionszentrum jenes flächenhaften Bildes, das allein dem Auge zugänglich ist, im Beobachter oder zwischen Objekt und Beobachter befindet; dabei ist es für den Charakter der Perspektive gleichgültig, ob sie durch die Mitte der Augenpupille oder — im freien, direkten Sehen — durch den Augendrehungspunkt bestimmt wird. Ja, es ändert sich der perspektivische Charakter — die geringere Größe weiter entfernter Gegenstände — nicht, wenn die Strahlenbegrenzung durch ein enges Loch zwischen dem Objekt und dem Auge vorgenommen wird, während die Beobachtung bei ruhig gehaltenem Auge durch die weit geöffnete Pupille, oder bei bewegtem Kopfe und entsprechend bewegtem Auge als eine reine Schlüssellochbeobachtung zustande kommt.

Das Gemeinsame für alle diese Fälle soll dadurch hervorgehoben werden, daß man überall da, wo es sich um die gewöhnliche Perspektive handelt, dieselbe Bezeichnung für den Strahlengang anwendet. Da in diesen Fällen stets das Zentrum der Projektion vom Objekt aus gerechnet in der Richtung auf den Beobachter zu liegt, so sei der Strahlengang als ein entozentrischer (von *ἐντός* = diesseits) eingeführt.

Dieser Charakter der natürlichen Perspektive, daß vom Objekt aus gesehen das Zentrum nach dem Beobachter zu in endlicher Entfernung liegt, und daß daher ein näheres Objekt

dem Beobachter unter einem größeren Gesichtswinkel erscheint als ein gleichgroßes ferneres, ist unumgänglich nötig, wenn die Erscheinungsformen der Umgebung auf Grund der Erfahrung schnell und zutreffend gedeutet werden sollen. Man geht kaum zu weit, wenn man der natürlichen Perspektive für die Raumvorstellung eine noch größere Bedeutung beilegt als sogar dem Sehen mit beiden Augen.

Die Aufhebung der natürlichen Perspektive.

Die optischen Instrumente bieten die Möglichkeit, sich von den verschiedenen soeben aufgezählten Beschränkungen frei zu machen, sei es, daß das sie verlassende Licht nur gebrochen oder nur gespiegelt oder gebrochen und gespiegelt wurde. Bei der Unvollständigkeit, mit der die Wirkung solcher optischen Vorkehrungen betrachtet zu werden pflegt, erscheint es zweckmäßig, hier einen kurzen Exkurs einzuschalten, wobei auf die ausführlicheren Darstellungen verwiesen sei, die sich an anderen Stellen[1]) finden.

Die Wirkung eines optischen Instruments auf einer Schirmfläche (meistens einer Schirmebene) beschränkt sich stets auf die Abbildung eines flächenhaften Objektgebildes oder meistens der Einstellungsebene. Alle nicht in dieser Einstellungsebene liegenden Objektpunkte werden von der Eintrittspupille des Instruments durch Büschel endlicher Öffnung in sie hineinprojiziert, so daß sie in ihr unscharf, d. h. als Zerstreuungskreise, erscheinen. Für die Perspektive kommt es allein auf

---

[1]) Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik. Bearbeitet von den wissenschaftlichen Mitarbeitern an der optischen Werkstätte von Karl Zeiß P. Culmann, S. Czapski, A. König, F. Löwe, M. von Rohr, H. Siedentopf, E. Wandersleb. Herausgegeben von M. von Rohr. 8°. XX, 587 Seiten mit 133 Textfig. Berlin, J. Springer, 1904, S. 466–507.

Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Von S. Czapski. 2. Aufl. Unter Mitwirkung des Verfassers und mit Beiträgen von M. von Rohr. Herausgegeben von O. Eppenstein. (Sonderabdruck aus A. Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. 6.) Leipzig, J. A. Barth, 1904. gr. 8°. XVI, 479 Seiten mit 176 Textfig., S. 248–261.

die Mittelpunkte dieser Zerstreuungskreise an, und zwar werden diese durch alle die Strahlen bestimmt, die von der Mitte der Eintrittspupille ausgehen. Die so auf der Einstellungsebene entstehende Darstellung, das objektseitige Abbild, wird dem Auge dargeboten — unter Umständen unter verändertem Gesichtswinkel und in abweichendem Maßstabe —, doch kann stets die Wirkung des optischen Instruments für das unbegrenzt akkommodierende Auge in theoretischer Strenge durch das objektseitige Abbild ersetzt werden, wenn man die Gesichtswinkel w' kennt, die durch das Instrument auf der Bildseite hervorgebracht werden.

Je nach der Größe der Augenpupille im Verhältnis zu der Austrittspupille des Instruments sind auch bei den optischen Instrumenten die beiden schon für das unbewaffnete Auge wichtigen Fälle möglich, nämlich der des unbehinderten Sehens, wo der Augendrehungspunkt die Perspektive bestimmt, und der der Schlüssellochbeobachtung, wo die Pupille des Instruments für die Perspektive bestimmend ist.

Eine Abweichung von der bisher allein betrachteten entozentrischen Perspektive ergab sich, als Systeme konstruiert wurden, bei denen die Eintrittspupille im Unendlichen lag, oder mit anderen Worten, die nach der Objektseite telezentrisch gemacht worden waren. Es scheint, daß eine solche Regulierung des Strahlenganges (wobei die Abblendung in der hinteren Brennebene des den Objekten zugekehrten Systemteils vorgenommen wird) bewußt zuerst von E. Abbe eingeführt worden ist. Jedenfalls hat er zuerst ganz allgemein die Folgen angegeben, die ein solcher Strahlengang für die Maßverhältnisse hat, unter denen körperliche Objekte einem durch ein solches System schauenden Auge erscheinen. Da das Projektionszentrum der Objekte im Unendlichen liegt, so muß sich auf der Einstellungsebene eine Parallelprojektion einstellen, eine Erscheinungsform, die E. Abbe[1]) im Falle des zusammen-

---

[1]) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. Med. Naturw. 1878, 11—17, S. 14. Siehe auch in: Gesammelte Abhandlungen von Ernst Abbe. Bd. I. G. Fischer, Jena 1904, S. 168

gesetzten Mikroskops sehr deutlich beschrieben hat. Und in der Tat finden sich bei diesem Instrument die Bedingungen für den telezentrischen Strahlengang sehr häufig verwirklicht. Herr S. Finsterwalder hat den Verfasser darauf hingewiesen, daß man sich des telezentrischen Strahlenganges mit Vorteil bedienen könne, um mit Hilfe der Photographie exakte Grund- und Aufrisse von kleinen Gegenständen herzustellen. Die Korrektionsbedingungen, die in diesem Falle an die optischen Systeme zu stellen sind, lassen sich ohne Schwierigkeit erfüllen.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und sich bemühen, die Eintrittspupille vor die Objekte zu legen, so daß gerade die vom Beobachter weiter entfernten Objekte unter größeren Gesichtswinkeln erscheinen. Ein solcher Versuch erscheint zunächst aussichtslos, weil er im Widerspruch zu der Erkenntnis zu stehen scheint, daß alle durch optische Mittel realisierbaren Abbildungen rechtläufig[1]) sind. Da nun das normale Auge hinter den Bildern liegen muß, wenn es sie wahrnehmen soll, so müßte auch die Eintrittspupille des Systems hinter den Objekten liegen. Dieser Schluß ist ganz bündig, wenn Bilder und Auge nicht durch die Unstetigkeitsebene des Bildraums getrennt sind. Ist das aber der Fall, so kann infolge der gegenseitigen Durchdringung des Objekt- und des Bildraums die gewünschte Lage des Projektionszentrums herbeigeführt werden. Das Ergebnis zeigt sich in der Figur 2. Es handelt sich dabei um ein kleines Hausmodell von 40 mm Länge, 7 mm Breite, 10 mm Seitenwand- und 15 mm Firsthöhe. (In der Figur 3 ist es in gewohnter Weise aufgenommen dargestellt.) Es war hinter einer Linse von 8 cm Brennweite und dem zweckmäßigerweise besonders großen Öffnungsverhältnis von 1 : 1 aufgestellt und durch sie hindurch mit einem photographischen Objektiv aufgenommen worden, dessen Eintrittspupille um mehr als 8 cm von der Vorderfläche der

[1]) Unter „Rechtläufigkeit" ist dabei diejenige Eigentümlichkeit der Abbildung zu verstehen, nach welcher die Bildpunkte im Sinne der Lichtrichtung dieselbe (nicht die entgegengesetzte) Reihenfolge einnehmen wie die zugehörigen Objektpunkte.

Linse entfernt war. Da die hinteren Teile des Modells größer erscheinen als die vorderen, so gestattet dieser Strahlengang,

Fig. 2. Das Hausmodell in unnatürlicher Perspektive.

Fig. 3. Das Hausmodell in natürlicher Perspektive.

mit einem Auge „um das Objekt herumzusehen", wie Herr S. Finsterwalder das Auffallende dieser Darstellungsart kurz bezeichnet.

Geht man nun auf den Abbildungsvorgang etwas näher ein, so mag dazu die rein schematische, einen Meridianschnitt darstellende Figur 1 dienen. Die Linse L mit den Brenn-

Fig. 1. Eine schematische Darstellung des hyperzentrischen Strahlenganges durch die Wiedergabe des Meridianschnitts.
P Objektauge, P' Auge im Bildraum. Die auf den Objektraum bezüglichen Geraden sind ausgezogen, die den Bildraum betreffenden gestrichelt.

punkten F und F' sei vor dem als Objekt dienenden Würfelskelett $O O_1 O_1 O$ aufgestellt. Das beobachtende Auge befinde

sich in dem Achsenpunkte P' und werde durch die Linse reell und umgekehrt in dem Objektauge P, also anscheinend vor dem Objekt abgebildet. Es sei ferner angenommen, daß auf die dem Beobachter zugekehrte, durch O_1 gehende Würfelfläche akkommodiert werde. Alsdann ist die Konstruktion des objektseitigen Abbildes einfach: von P aus werden alle Punkte des Würfelskeletts in die durch O_1 gehende Einstellungsebene projiziert, und man sieht ohne weiteres, daß die durch O gehende Würfelfläche $O\,O$ in der Einstellungsebene größer wird $\{O_1 \Omega\}$ als die durch O_1 gehende, näherliegende $O_1\,O_1$. Es ist außerdem des leichteren Verständnisses wegen das Bildrelief des Würfelskeletts gezeichnet worden, so daß man auch einsieht, wie dieser Effekt im Bildraume zustande kommt. Der scheinbare Widerspruch mit dem Gesetz der rechtläufigen Abbildung löst sich durch die Betrachtung der Lichtrichtung: Die auf P treffenden Strahlen von Punkten des Würfelskeletts gelangen, da eine Lichtrichtung von links nach rechts vorausgesetzt ist, erst dann nach P, wenn sie das Unendliche passiert haben und zwar in einer, mit der anfänglichen übereinstimmenden Richtung. P liegt also wirklich für diese Betrachtung hinter $O\,O_1$. Da das Objektauge P zwar umgekehrt ist, aber auch abwärts gerichtete Gesichtswinkel w erhält, so wird im Bildraume das Bildrelief aufrecht wahrgenommen. Die unnatürliche Perspektive aber bleibt bestehen, und man kann sich nicht überreden, daß sie einem Würfelskelett angehören könne. Man faßt das Gebilde stets in einer ganz bestimmten Weise verzerrt auf, weil eine solche Erscheinungsform des Würfelskeletts jeder Erfahrung widerspricht. Sie mag, den vorigen Namen entsprechend, hyperzentrisch heißen.

Schon oben war darauf hingedeutet worden, daß diese Erscheinungen am deutlichsten auftreten, wenn das Öffnungsverhältnis des abbildenden Systems besonders groß ist, und man sieht auch leicht ein, daß dafür große Winkel w vorzüglich günstig sind. Systeme mit solchen Eigenschaften finden sich namentlich in Hohlspiegeln, die sich ja auch hinsichtlich der Aufhebung der sphärischen und chromatischen Abweichungen

vor gleich einfachen, rein dioptrischen Konstruktionen auszeichnen.

Es muß sich daher diese Erscheinung häufig, namentlich beim Experimentieren mit Hohlspiegeln geradezu aufgedrängt haben; sie scheint aber nicht weiter beachtet worden zu sein, oder man hat sie einfach auf die Abweichungen der Systeme abgeschoben. Jedenfalls wurde kein Anhaltspunkt dafür gefunden, daß man bisher versucht habe, sie aus der veränderten Strahlenbegrenzung zu erklären, ähnlich wie das E. Abbe für die entsprechenden Verhältnisse beim telezentrischen Strahlengange getan hat.

Die Tiefenwahrnehmung beim beidäugigen Sehen.

Durch die gleichzeitige Verwendung beider Augen beim Sehen ist die Möglichkeit einer Tiefenwahrnehmung gegeben. Man sieht das aus der nachfolgenden schematischen Figur 5

Fig. 5. Der Strahlenverlauf von den Fußpunkten in der Medianebene befindlicher Objekte.

am einfachsten, bei der die Annahme gemacht worden ist, daß die beiden verschieden entfernten Punkte O_1, O_2 in dem Schnitt der Horizontal- und der Medianebene liegen. Hierbei erkennt man leicht, daß die nach dem ferneren Punkte gerichteten Strahlen in dem vor den Augen liegenden Gebiet mehr schläfenwärts, die nach dem näheren mehr nasenwärts verlaufen. Die Betrachtung dieses ganz einfachen Falles mag hier genügen; die allgemeineren Fälle würden sich ohne Schwierigkeit durch die Einführung der Helmholtzischen stereoskopischen oder der ihnen entsprechenden angularen Differenzen erledigen lassen. Die Tiefenwahrnehmung ist auf diese Weise nicht nur körper-

lichen Objekten gegenüber möglich, sie findet auch dem von einem beliebigen optischen System gelieferten Bildrelief gegenüber statt und führt zu einem richtigen (d. h. mit dem durch die Betrachtung der Objekte selbst gewonnenen Resultat übereinstimmenden) Ergebnis, weil alle optischen Systeme, wie schon bemerkt, rechtläufig sind, also die Richtung der Tiefenausdehnung der Objekte nicht verändern. E. Abbe[1]) scheint zuerst auf diese allgemeine Eigenschaft des Bildreliefs optischer Instrumente hingewiesen zu haben, um daraus einen Schluß auf die beidäugige Tiefenwahrnehmung am Bildrelief zu ziehen.

Versucht man aber auch in diesem Falle die Betrachtung auf die Vorgänge im Objektraume zu stützen, so muß man die beiden Augen durch das optische System nach der Objektseite zu abbilden. Macht man hierfür die vereinfachende (und bei einfachen optischen Systemen — z. B. einer Graphoskoplinse oder einem Hohlspiegel — in der Regel zutreffende) Annahme eines reellen Bildreliefs, so liegen die Objektaugen sicher hinter den Objekten. Da ein einheitlich wirkendes optisches System keine Veränderung der natürlichen Lage der beiden Augen hervorbringen kann, so bleibt unter diesen Umständen, d. h. bei der Abbildung durch ein einheitlich wirkendes optisches System, die Bedingung des beidäugigen natürlichen Sehens oder, wie hier gesagt werden soll, die orthopische[2]) Augenstellung erhalten. Strahlen von näher gelegenen Objektpunkten verlaufen auch im Objektraume mehr nasenwärts, von ferneren mehr schläfenwärts. Zu den Einzelheiten der Abbildung kann man noch folgendes bemerken: Wird die Gesichtsfläche ⁻|⁻ als Ganzes bei jener Abbildung durch das optische System einfach umgekehrt ˰|˰ oder umgekehrt und spiegelverkehrt, so zeigt sich das bei der Betrachtung darin, daß das Objekt zwar in seiner Tiefenanordnung ungeändert bleibt, aber sonst einfach

[1]) On the conditions of orthoscopic and pseudoscopic effects in the binocular microscope. Journ. Roy. Micr. Soc. 1881 (2), Bd. 1. 203—211, S. 207. Siehe auch die Übersetzung in den auf S. 490 zitierten gesammelten Abhandlungen auf S. 319.

[2]) Nach Analogie von κύκλωψ und kyklopisch gebildet.

umgekehrt oder umgekehrt und spiegelverkehrt wird. Es ist das eine notwendige Folge der Änderung, die der Sinn der objektseitigen Gesichtswinkel w durch das optische System für jedes Einzelauge erleidet.

Man kann also auch nach der hier durchgeführten Betrachtungsweise, bei der die Vorgänge im Objektraume berücksichtigt werden, keine Änderung der Tiefenanordnung erwarten, wenn es sich um die Abbildung durch ein einheitlich wirkendes optisches System handelt.

Die Aufhebung der natürlichen Augenstellung.

Schon sehr früh — gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts — hatte ein unter dem Klosternamen Chérubin D'Orléans bekannt gewordener Kapuzinermönch ein binokulares Instrument hergestellt, wodurch für die Objektaugen die natürliche Stellung aufgehoben wurde. Er richtete nämlich zwei gewöhnliche bildumkehrende Mikroskope auf einen und denselben Objektpunkt und wählte die Neigung der Rohre so, daß das rechte Okular von dem rechten und das linke Okular von dem linken Auge benutzt werden konnte. Man sieht leicht ein, daß bei der Abbildung der beiden Augen des Beobachters in den Objektraum ein jedes für sich umgekehrt wurde, so daß sich nach dem hier gebrauchten Schema der in der Figur 6 dargestellte Fall ergab. Die Vermutung liegt nahe, daß mit einer solchen Änderung der natürlichen Augenstellung eine Änderung der Tiefenanordnung im Bildraume verbunden sein müsse, und so ist es auch tatsächlich. Konstruiert man jenes einfache Schema in der Figur 7 wieder, so sieht man, daß für jedes der beiden Objektaugen die Strahlen von dem ferneren Punkte mehr nasen-, die von dem näheren mehr schläfenwärts verlaufen. Zeichnet man nunmehr die Figur 8 für den Bildraum, wo die Augen natürlich die orthopische Stellung haben müssen und sucht

Fig. 6. Die Stellung der ganz schematisch gezeichneten Objektaugen im Chérubinschen Doppelmikroskop.

dort die entsprechenden Strahlen auf, so müssen die vorher mehr schläfenwärts liegenden Strahlen auch hier wieder mehr schläfenwärts liegen, da jedes einzelne optische System seine Meridianebene — abgesehen von der hier nicht in Betracht

Fig. 7. Der Strahlenverlauf von den Fußpunkten in der Medianebene befindlicher Objekte bei chiastopischer Stellung der schematisch gezeichneten Objektaugen.

Fig. 8. Der der Figur 7 entsprechende Strahlengang im Bildraume.

kommenden Nachbarschaft der objektseitigen Brennebene — zusammenhängend abbildet. Die ausgezogenen und die gestrichelten Strahlen definieren also im Bildraume, wie man auf der Figur 8 sieht, zwei Punkte O_2', O_1' in umgekehrter Tiefenfolge.

Man erhält auf diese Weise die Verwirklichung einer rückläufigen Abbildung, die bei einheitlich wirkenden optischen Systemen ausgeschlossen war. Sie kommt in binokularen Instrumenten zustande, wenn durch die Wirkung der getrennten Systeme die Gesichtsfläche ‾|‾ nicht zusammenhängend, sondern unstetig |⊥ ⊥| abgebildet wird.

Bei dieser großen Wichtigkeit der Augenstellung für die durch das beidäugige Sehen vermittelte Anschauung der Tiefengliederung sei die unnatürliche (gekreuzte) Stellung als chiastopische bezeichnet. Wird sie im Objektraum hervorgerufen, ohne daß sie von einer Änderung der Perspektive begleitet wird, so erhält man eine Umkehrung der Abstände, die aber nur bei beidäugiger Beobachtung zwingend ist; bei einäugiger Betrachtung kann die Täuschung verschwinden oder überhaupt nicht zustande kommen.

Während diese Änderung des Raumbildes, die bei dem Doppelmikroskop von Chérubin d' Orléans zweifellos vorhan-

den war, zu jener Zeit unbemerkt blieb, erregte sie die Aufmerksamkeit Ch. Wheatstones, der sie 1852 zuerst unter dem Namen der Pseudoskopie beschrieb. Er gab damals mehrere Möglichkeiten der Verwirklichung an, und zwar bestand der ihm besonders geeignet erscheinende Apparat aus zwei Amicischen Reflexionsprismen, die, wie man aus der Figur 9 sieht, die chiastopische Augenstellung im Objektraume

Fig. 9. Ein schematischer Horizontalschnitt durch das Wheatstonesche Pseudoskop.

Die Objektaugen sind punktiert, um ihre mangelhafte Abbildung anzudeuten.

herbeiführten. Durch die Punktierung der ganz schematisch gezeichneten Objektaugen soll angedeutet werden, daß sie infolge der Abbildung durch starke Brechungen in Prismen von beträchtlicher Dicke mit ziemlichem Astigmatismus behaftet sind. Bei den Versuchen schadet dieser Bildfehler übrigens nicht wesentlich, aber das Gesichtsfeld des Instruments ist nur gering, und nicht jedem Beobachter gelingen die damit anzustellenden Versuche. Am besten eignen sich dafür Skelette einfacher stereometrischer Körper, weil hier keine Schatten das Zustandekommen des pseudoskopischen Eindrucks hindern, und weil sich die Inversion eines stereometrischen Skeletts eben so leicht vorstellen läßt wie das Skelett selbst.

Die von Ch. Wheatstone gegebene Erklärung des pseudoskopischen Raumbildes war vollständig zutreffend, beruhte aber

auf der Betrachtung des Bildraums, und so kam es, daß damals der allgemeinere Grund der Pseudoskopie nicht bemerkt wurde.

In den 50er und 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts beschäftigten sich tüchtige Mikroskopiker namentlich englischer Zunge mit der Konstruktion eines stereoskopischen Mikroskops, und sie sahen, da nun einmal das Interesse auf die pseudoskopische Wahrnehmung gerichtet war, wie leicht man zu einem solchen, hier meistens unerwünschten Eindruck kommen könne. Wenn es ihren scharfsinnigen Bemühungen auch gelang, durch eine zweckmäßige Verfügung über die Konstruktionselemente den gewünschten stereoskopischen Eindruck zu sichern, so haben sie doch an der Klärung des allgemeinen Sachverhalts nicht gearbeitet.

Dies geschah erst durch E. Abbe, der, ohne eingehende Kenntnis dieser Entwicklung des Binokularmikroskops in England, 1880 ein stereoskopisches Okular baute, um das Gebiet der stereoskopischen Mikroskopie auch auf dem Kontinent auszudehnen. Er entwickelte als erster eine zusammenfassende Theorie, wenn auch nicht aller stereoskopischen Mikroskope, so doch aller derer, die mit einem einfachen Objektiv ausgerüstet waren, und die auch zu jener Zeit allein in Betracht kamen. Zu gleicher Zeit gab er auch ein überraschend einfaches Merkmal an,[1]) wonach man bei einem jeden dieser Instrumente die orthoskopische oder die pseudoskopische Wirkung sofort voraussagen konnte. Diese Abbesche Regel lautet in ihrer einfachsten Form: „Die einzige notwendige Bedingung für die orthoskopische Wirkung in irgend einem binokularen Apparat ist, daß die betreffenden Halbkreise entsprechend dem Schema O dargestellt werden können, und für die pseudoskopische Wirkung, daß sie dem Schema P entsprechend liegen.“ Dabei beziehen sich die in den Figuren 10 und 11 wiedergegebenen Abbeschen Zeichnungen auf die Austrittspupillen,

[1]) Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bedingungen mikro-stereoskopischer Beobachtung. Carls Rep. 1881, 17. 197—224, S. 208. (In den ges. Abh. S. 255 und On the conditions etc. S. 203/204 und in der Übers. 314.)

die bei allen Binokularmikroskopen halbkreisförmig sind, wo die Eintrittspupille des Objektivs geometrisch in eine rechte und eine linke Hälfte geteilt und je einem der beiden Augen zugeordnet wird. Man sieht leicht ein, daß die Abbesche Regel in allen von ihm behandelten Fällen mit der hier gegebenen Formulierung übereinstimmt; denn schreibt man darunter die hier benutzten Symbole, wie das in den Figuren 12 und 13 geschehen ist, und beachtet man, daß die beiden Aus-

Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Fig. 10 und 11. E. Abbes bildseitiges Kriterium für die orthoskopische und die pseudoskopische Wirkung der binokularen Mikroskope mit gemeinsamem Objektiv.

Fig. 12 und 13. Die Zurückführung des Abbeschen Kriteriums auf die orthopische und die chiastopische Stellung der Objektaugen.

trittspupillen zusammen im Objektraume die vollständige kreisförmige Eintrittspupille des Instruments ergeben müssen, so wird man nur in dem einen Falle (der Figur 12) auf die orthopische Augenstellung im Objektraume geführt, im anderen (der Figur 13) muß sich die chiastopische ergeben. Es ist zu bedauern, daß E. Abbe für den allgemeinen Fall die Lösung entgangen ist. Er hat sich offenbar durch die unbestreitbare Eleganz seines Satzes in den besonderen von ihm behandelten Fällen verleiten lassen, von seinem so folgenreichen Prinzip abzugehen, die Betrachtung auf die Vorgänge im Objektraume aufzubauen, und so ist er darum gekommen, eine Theorie der gesamten binokularen Instrumente zu geben.

Wenn sich vorher allgemein hatte nachweisen lassen, daß eine pseudoskopische Wahrnehmung durch einheitlich wirkende optische Instrumente nicht verwirklicht werden kann, so hat sich nunmehr gezeigt, daß nicht immer das Vorhandensein zweier völlig getrennter Instrumente für die beiden Augen

nötig ist: es genügt auch, hinter einem gemeinsamen Objektivteil eine Diskontinuitätsstelle einzuführen, so daß die eine Hälfte der Eintrittspupille nur dem rechten, die andere nur dem linken Auge zugeordnet ist.

Eine Mittelstellung zwischen den beiden im vorhergehenden behandelten Möglichkeiten nimmt der Fall ein, daß beide Augen im Objektraume zusammenfallen, oder wie man es auch nennen kann, der Fall der synopischen Augenstellung. Er wurde anscheinend zuerst beobachtet, als man in den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts identische Bilder im Stereoskop betrachtete. Hatte man hier unbewußt stets an der entozentrischen Perspektive festgehalten, so machten englische Mikroskopiker in der Mitte der 60er Jahre einen wichtigen Fortschritt darüber hinaus. Bei der besten der damals vorgeschlagenen Einrichtungen — sie stammte von F. H. Wenham her — wurde mit Hilfe einer sowohl durchlässigen als auch spiegelnden Schicht jeder einzelne Strahl in zwei Teile gespalten, um je einem der beiden Augen zugeführt zu werden. Es erhielt dann jedes Auge ein (abgesehen von den Helligkeitsunterschieden) identisches Bild, und zwar bei starken Mikroskopobjektiven ein Bild in telezentrischer Perspektive. Eine solche Beobachtung im zweiäugigen (indifferenten) Sehen bietet doch noch einen Vorteil für den Beobachter, insofern als die Beobachtung mit beiden Augen bequemer und angenehmer ist als die mit einem Einzelauge. Für makroskopische Objekte mit entozentrischer Perspektive hat man den Vorzug der synopischen Augenstellung schon in den 50er Jahren gekannt; hier kommt noch hinzu, daß es sich bei Landschaftsaufnahmen um angenähert bekannte Gegenstände in weiter Entfernung handelt, bei denen die Verschiedenheit eigentlich stereoskopischer Halbbilder keine große Rolle spielt. In solchen Fällen läßt die gewohnte und bequeme Beobachtung mit beiden Augen um so leichter die auf der Erfahrung beruhende Tiefendeutung als Ersatz für die Tiefenwahrnehmung eintreten.

Eine Verbindung der verschiedenen Bedingungen des einäugigen und des beidäugigen Sehens miteinander ist aber ganz

allgemein möglich, da sie voneinander ganz unabhängig sind. Es sei hier ein Schema mitgeteilt, das eine vollständige Übersicht über die überhaupt möglichen Bedingungen des Sehens mit beiden Augen liefert, da es mit einem Eingange für die drei monokularen und einem solchen für die drei binokularen Bedingungen versehen ist. Es ist dabei für die verschiedenen Formen der Erscheinung auch die Zeit angegeben worden, zu der sie zuerst bemerkt worden sind. (Siehe S. 503.)

Handelt es sich jetzt darum, alle diese neun möglichen Formen des beidäugigen Sehens wirklich zu veranschaulichen, so empfiehlt sich vornehmlich die auf Taf. IV gewählte Darstellung mit Hilfe von Stereogrammen. Ein Stereoskop ist dabei nicht notwendig. Alle Beobachter, die ihren Augenachsen eine nahezu parallele Richtung geben können, werden ohne weiteres den beabsichtigten Eindruck erhalten. Alle, die diese Fähigkeit nicht haben, werden zweckmäßig nach dem besonders für Kurzsichtige geeigneten Plane verfahren, wie er in Figur 14 nach der mündlichen Angabe von Herrn A. Köhler dargestellt worden ist. Eine Scheibe gewöhnlichen Fenster-

Auge
Glasscheibe
∞
Stereogramm- Ebene
∞

Fig. 14. Die Köhlersche Methode zur Erleichterung der Betrachtang von Stereogrammen mit parallel gerichteten Augenachsen.

Die Bedingungen des

<table>
<tr><td colspan="2">beidäugigen Sehens
einäugigen Sehens</td><td colspan="6">Der Strahlengang ist</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">entozentrisch
I</td><td colspan="2">telezentrisch
II</td><td colspan="2">hyperzentrisch
III</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Die Augenstellung ist</td><td>orthopisch
1</td><td colspan="2">I1
Das natürliche Sehen endlich entfernter Objekte.
Erste Erkenntnis der Bedingungen durch Ch. Wheatstone 1838.</td><td>II1
Das Raumbild in orthoskopischen Binokularmikroskopen.
J. L. Riddell 1852/3.</td><td rowspan="3">Erklärung der wichtigsten Punkte der Wirkung mit Hilfe der Strahlenbegrenzung durch E. Abbe 1880.</td><td>III1</td><td rowspan="3">Die Erscheinungen mit hyperzentrischer Perspektive scheinen bisher nicht untersucht worden zu sein.</td></tr>
<tr><td>synopisch
2</td><td>I2
Die Betrachtung zweier identischer Bilder im Stereoskop.
Mitte der 50er Jahre.</td><td rowspan="2">Erste unbewußte Beobachtungen bereits in der ersten Publikation Ch. Wheatstones von 1838.</td><td>II2
Das Raumbild in Binokularmikroskopen zum indifferenten Sehen.
Powell & Lealand vor 1866.</td><td>III2</td></tr>
<tr><td>chiastopisch
3</td><td>I3
Die Wheatstoneschen Pseudoskopien.
1852.</td><td>II3
Das Raumbild in pseudoskopischen Binokularmikroskopen.
Chérubin d'Orléans 1677.
F. H. Wenham 1853.</td><td>III3</td></tr>
</table>

Die Anordnung stimmt mit der für die Tafel IV gewählten überein.

glases wird unter etwa 45 Graden Neigung so über das Stereogramm gehalten, daß ein entfernter Gegenstand an den unbelegten Flächen gespiegelt wird und unter der Ebene des Stereogramms erscheint. Fixiert man dieses meistens sehr lichtschwache Spiegelbild, richtet indessen seine Aufmerksamkeit auf die beiden Halbbilder, auf die auch akkommodiert werden muß, so verschmelzen diese ziemlich leicht zu einem Raumbilde.

Vor die Besprechung der neun Stereogramme wird zweckmäßig eine kurze Erläuterung der Verhältnisse eingeschoben, wie sie bei den gebräuchlichen Doppelkameras mit parallelen

Fig. 15. Ein schematischer Horizontalschnitt durch eine Doppelkamera mit parallelen Achsen.
Die Objektive sind im allgemeinen Falle als unsymmetrische Konstruktionen vorausgesetzt.

Achsen herrschen. Stellt die Figur 15 eine solche Einrichtung im Horizontalschnitt dar, so ist es bei verzeichnungsfreien Objektiven klar, daß jedes Halbbild L, R für die Mitte der dazugehörigen Eintrittspupille P_l, P_r zu den aufgenommenen Objekten perspektivisch ist. (Um die photographischen Kopien des Doppelnegativs in diese Lage zu bringen, müssen sie zerschnitten werden, wenn sie mit dem gewöhnlichen Kontakt-

druckverfahren hergestellt worden sind.) Aus der Entstehung der Halbbilder ist klar, daß — mit E. Abbe zu reden — *L* eine durchaus links-, *R* eine durchaus rechtsäugige Perspektive ist. Diese ein- für allemal festgelegte Beziehung kann man in einer einfachen Weise dadurch andeuten, daß man wie in der Figur 16 um die Eintrittspupille das entsprechende Augenzeichen beschreibt. Man sieht dann ohne weiteres ein, daß sich in der Figur 17 bei einer Vertauschung der beiden Halbbilder ein pseudoskopisches Raumbild ergeben muß. Denn auf Grund derselben Überlegungen, die bei der Einführung der chiastopischen Augenstellung gemacht worden waren (es handelte sich darum, daß die Strahlenpaare mehr nasen- oder mehr schläfenwärts verliefen), läßt sich auch der hier angenommene Fall erledigen. Es entspricht dem unendlich fernen und einem reellen, vor dem Beobachter liegenden Punkte des orthomorphen Raumbildes der unendlich ferne und ein virtueller, hinter dem Beobachter gelegener Punkt des pseudomorphen Raumbildes, und — was von besonderer Wichtigkeit

Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18.

Fig. 16. Die Beziehung der Augen zu richtig montierten Halbbildern. Das Äquivalent zur orthopischen Stellung der Objektaugen.

Fig. 17. Die Beziehung der Augen zu gekreuzt montierten Halbbildern. Das Äquivalent zur chiastopischen Stellung der Objektaugen.

Fig. 18. Die Beziehung der Augen zu identischen Halbbildern. Das Äquivalent zur synopischen Stellung der Objektaugen.

ist — die Reihenfolge der Punkte ist im ersten Falle der Lichtrichtung gleich, im zweiten ihr entgegengesetzt.

Setzt man schließlich in der Figur 18 beiden Augen das gleiche Halbbild vor, so erhält man die synopische Augenstellung, und zwar wurde in den hier dargestellten Fällen die von dem rechten Objektiv gelieferte Abbildskopie verdoppelt.

Dementsprechend sind also nur drei stereoskopische Aufnahmen gemacht worden, nämlich I_1, II_1 und III_1. Alle mit 2 bezeichneten Bildpaare sind durch Verdoppelung des rechten Halbbildes, alle mit 3 bezeichneten durch Vertauschung der beiden Halbbilder gegeneinander hergestellt worden.

Das Objekt war in allen Fällen das gleiche Skelett einer geraden Säule von quadratischer Grundfläche, deren Länge 39 mm betrug bei 20 mm Höhe und Breite; ihre Vorderfläche wurde durch eine der oberen Kante aufgesetzte Perle kenntlich gemacht. Es war schon oben darauf hingewiesen worden, daß namentlich pseudomorphe Raumbilder am sichersten mit solchen auf die Umrisse beschränkten Objekten gelingen. Bei den ersten sechs Darstellungen findet sich nur das Säulenskelett vor, bei den letzten drei ist auch die ziemlich tiefe Fassung der Linsenkombination sichtbar, die den hyperzentrischen Strahlengang hervorbrachte. Bei dem Stereogramm III_3 ist die Rückläufigkeit der Abbildung sehr deutlich zu erkennen. Man sieht sehr gut in der Richtung auf den Beobachter zu zuhinterst den äußersten Rand der Linsenfassung, dann ihren inneren Rand und schließlich das in sich invertierte Säulenskelett. Aus diesem Raumbilde wird auch klar, daß man zweckmäßig den hyperzentrischen Strahlengang wählen wird, wenn es sich darum handelt, durch optische Mittel aus einer vorliegenden Hohlform ein Urteil über den danach anzufertigenden Abguß zu erhalten. Denn nur in diesem Falle wird die Perspektive mit der einigermaßen übereinstimmen, die man bei der Betrachtung des Abgusses erhalten würde. Der Verfasser verdankt einem seiner Kollegen den Hinweis auf diesen Umstand.

Für die Anfertigung der photographischen Aufnahmen ist er Herrn R. Schüttauf verpflichtet.

Über einen neuen Flammenkollektor und dessen Prüfung im elektrischen Felde.

Von Dr. **C. W. Lutz.**

(Eingelaufen 3. November.)

(Mit Tafel V und VI.)

Durch die Munifizenz der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München wurde dem hiesigen Erdmagnetischen Observatorium die Anschaffung eines Benndorfschen selbstregistrierenden Elektrometers zur Aufzeichnung des luftelektrischen Potentialgefälles[1]) ermöglicht.

Bekanntlich liefert dieser Apparat nur relative Werte des elektrischen Spannungsgefälles, welche durch eine gleichzeitige Messung im freien flachen Terrain auf die Ebene zu reduzieren sind. Diese Bestimmung des „Reduktionsfaktors" geschieht gewöhnlich mit Hilfe eines Wasser- oder Flammenkollektors, der auf einem Hartgummistabe wohl isoliert aufgestellt und durch einen mehrere Meter langen dünnen Leitungsdraht mit einem Aluminiumblattelektroskop verbunden wird. Da der Meßbereich eines solchen transportablen Elektroskopes ein eng begrenzter ist (von ca. 50 bis 250 Volt), so wird der Abstand des Kollektors vom Erdboden, also die Länge der Hartgummistütze entsprechend dem eben herrschenden Potentialgefälle gewählt, so daß ein gut ablesbarer Ausschlag der Elektroskopblättchen entsteht. Eine solche Messungsanordnung ist nur dann einwandsfrei, wenn der Verlauf des Potentialgradienten in der Nähe der Erdoberfläche ein linearer ist, und das scheint

[1]) H. Benndorf, Wiener Akademieberichte 111, IIa, 487, 1902.

auch nach den Messungen von F. Exner[1]) bis hinauf zu ca. 50 m der Fall zu sein. Dieser einfache Zusammenhang zwischen Potential und Abstand von der Erdoberfläche zeigt sich nach Exner[2]) besonders deutlich an klaren Tagen des Januars bei Temperaturen unter 0° und fest gefrorener Schneedecke. Bei anderen Wetterlagen scheint aber doch eine Änderung des Potentialgefälles mit der Höhe vorhanden zu sein. So fand z. B. A. Gockel[3]) wiederholt eine starke Abnahme des Potentialgradienten mit der Höhe. Auch ich fand in der wärmeren Jahreszeit gelegentlich der Bestimmung des oben erwähnten Reduktionsfaktors verschiedene Zahlen je nach dem Abstand des Kollektors über dem Erdboden; und zwar ergaben sich stets bei größeren Abständen kleinere Werte des Potentialgefälles (in Volt/m), also eine nicht zu verkennende Abnahme des Gradienten mit zunehmender Höhe. Hier sei gleich bemerkt, daß bei diesen Messungen der noch näher zu erörternde Umstand berücksichtigt wurde, daß der Ausgleichsort der Spannungen bei Flammenkollektoren immer höher liegt als der obere Rand des Schutzzylinders.

Stellt man sich auf den Boden der Ebertschen Theorie,[4]) so ist dieses verschiedene Verhalten des Potentialgefälles im Winter und Sommer wohl verständlich. Nach Ebert kommt das elektrische Erdfeld durch das Herausdringen der im Erdboden enthaltenen, stark ionisierten Luft zustande. Auf dem Wege durch die Erdkapillaren gibt die ionenreiche Bodenluft vorwiegend — Ladungen ab, tritt also mit einem Überschusse von + Ionen aus dem Erdboden heraus. Die freie + Ladung der unteren Luftschichten bedingt das positive, nach oben hin abnehmende Potentialgefälle. Eine Unterbrechung des Transpirationsprozesses durch Zufrieren der Erdkapillaren im Winter muß das von Exner beobachtete Verhalten des Potentialgradienten zur Folge haben.

[1]) F. Exner, Wiener Akademieberichte **93**, IIa, 258, 1886.
[2]) Ebenda, S. 260.
[3]) A. Gockel, Meteorologische Zeitschrift **23**, 54, 1906.
[4]) H. Ebert, Physikalische Zeitschrift **5**, 135, 1904.

Daß das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ nicht konstant ist, bringt allerdings in die erwähnte Reduktionsmessung eine Schwierigkeit hinein; aber an sich ist dieses Verhalten des Gradienten von großem Interesse, da es eine Hindeutung auf die in der Luft enthaltene freie Elektrizitätsmenge enthält. Dies genauer zu studieren, sind Messungen im Gange, über welche später berichtet wird; hier soll zuerst die Kollektorfrage behandelt werden. Da bei allen luftelektrischen Stationen eine solche „Reduktion auf die Ebene" wiederholt durchgeführt werden muß, so ist die Wahl eines geeigneten Kollektors für die Feldbeobachtungen auch bei den fortlaufend registrierenden Instrumenten von großer Bedeutung. Unter allen Kollektortypen am brauchbarsten für diesen Zweck dürfte der Flammenkollektor sein. Infolge seiner leichten Transportfähigkeit, des geringen Gewichtes, der raschen Einstellung und Brauchbarkeit bei jeder Temperatur und Tageszeit eignet sich gerade dieser Kollektor am besten für Reise- und Feldbeobachtungen (Radiokollektoren sind zu vermeiden, wenn noch anderweitige luftelektrische Bestimmungen, wie Leitfähigkeit und Ionendichte gemacht werden sollen). Leider stehen diesen Vorzügen zwei ganz erhebliche Nachteile gegenüber. Die Angaben eines Flammenkollektors werden nämlich vom Winde beeinflußt, und der Hauptnachteil der üblichen Konstruktionen ist der, daß sie schon bei geringen Windgeschwindigkeiten verlöschen. Der letztere Übelstand machte Beobachtungen auf dem weiten, allseits dem Winde ausgesetzten ebenen Terrain im Osten des Observatoriums, das sich für luftelektrische Messungen sonst vorzüglich eignet, schon bei einer Windstärke 2 (der 10 teiligen Skala) unmöglich.

Gelänge es, den Flammenkollektor von den erwähnten Mängeln frei zu machen, so wäre er sicher für die so wichtigen Feldbeobachtungen der brauchbarste Apparat.

Diese Erwägungen veranlaßten mich, den Flammenkollektor so umzuändern, daß er sicher im Winde brennt, leicht transportabel, reinlich und sparsam im Betrieb, also mehrere Stunden

ununterbrochen zu gebrauchen ist. Durch eine Prüfung[1]) im künstlichen elektrischen Felde wurde dann die Lage des Ausgleichspunktes, der Einfluß der Luftbewegung auf denselben, sowie die Ladezeit des neuen Kollektors untersucht, um ihm auch in dieser Hinsicht die beste Form zu geben.

Nach mehreren Fehlversuchen gelang es mir, eine Konstruktion zu finden, die allen erwähnten Anforderungen genügt. Der Apparat ist in Figur 1 im Längsschnitt dargestellt. Im Innern eines Messingrohres R steckt eine kurze dicke Kerze K, die durch eine Feder F beständig nach oben gedrückt wird, am Hinausgeschobenwerden aber durch den schmalen Rand r verhindert wird. In dem Maße nun, in dem die Kerze oben abbrennt, wird sie durch die Feder nachgedrückt, so daß die Flamme stets an der gleichen Stelle brennt. Unten ist das Rohr R durch die Platte P verschlossen (Bajonettverschluß), welche zum Einführen einer neuen Kerze abgenommen werden kann. Das Auswechseln der Kerze nimmt nur wenig Zeit in Anspruch. Mittels des Halses H kann der ganze Apparat auf einen isolierenden Stab aufgesteckt werden. Die Mutter m dient zum Einklemmen des nach dem Elektroskope führenden Verbindungsdrahtes.

Soweit würde der Apparat bereits einen vollständigen Flammenkollektor darstellen, dessen freibrennende Kerzenflamme aber bei geringstem Winde ausgelöscht werden würde. Um das zu verhindern, ist folgende Einrichtung getroffen:

---

[1]) Untersuchungen über verschiedene Kollektoren wurden bisher ausgeführt von:

H. Pellat, Comptes Rendus **100**, 735, 1886.

K. v. Wesendonk, Naturwissenschaftliche Rundschau **15**, 233, 1900

F. Henning, Annalen der Physik, 4. Folge **7**, 893, 1902.

V. Conrad, Wiener Akademieberichte **111**, IIa, 338, 1902.

F. Linke, Physikalische Zeitschrift **4**, 661, 1903.

H. Benndorf und V. Conrad, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, 691.

H. Benndorf, Wiener Akademieberichte **115**, IIa, 425, 1906.

Auf die Ergebnisse dieser Untersuchungen, soweit sie auf die vorliegende Arbeit Bezug haben, komme ich noch an geeigneter Stelle zurück

Längs des Rohres *R* ist mit leichter Reibung das kurze Rohrstück *S* und der damit festverbundene Teller mit Rand *T* verschiebbar. Auf diesem steht in drei eingedrehten Füßchen $f_1 f_2 f_3$ aus Vulkanit (Wärmeschutzmittel) der oben konische Glaszylinder *G*, der seinerseits von einem zylindrischen Metallnetz *N* umgeben ist. Oben trägt dieses Netz einen um das Scharnier *sch* aufklappbaren konischen Deckel *D* aus dünnem Metallblech. Ein kleiner Schnäpper *schp* hält den Deckel *D* zu. Der Glaszylinder *G* sitzt nicht dicht auf dem Teller *T* auf, sondern wird durch die drei Füßchen *f* etwas darüber gehalten, so daß zwischen beiden ein schmaler ringförmiger Spalt offen bleibt, durch den die Frischluft zuströmen kann. Der wulstförmige, unten offene Ring *W* schützt die Flamme vor zu heftigen, durch den Spalt eindringenden Windstößen. Beim Transporte wird der Teller *T* und mit ihm der darauf befestigte ganze obere Teil des Kollektors (Glaszylinder und Netzgehäuse) bis zum Aufsitzen auf die Platte *P* herabgeschoben. In derselben Stellung wird die Kerze nach Aufklappen des Deckels *D* angezündet.

Fig. 1

Maße in mm

Durch die beschriebene Einrichtung des Kollektors ist erreicht, daß ein horizontal ankommender Windstoß mehrmals seine Richtung ändern muß, um senkrecht auf die Flamme zu treffen. Dem dürfte es wohl in erster Linie zuzuschreiben sein, daß die Kerze selbst durch stürmische Winde nicht verlöscht wird, wovon ich mich wiederholt überzeugte. Die obere Einziehung des Glaszylinders und die entsprechende Form des Deckels begünstigt den raschen Abzug der ionisierten Verbrennungsgase, was die Wirksamkeit des Kollektors erhöht[1]) (vergleiche Tab. 5). Der Glaszylinder, das Metallnetz, sowie die Vulkanitfüßchen verhindern eine stärkere Erwärmung des Metallrohres, in welchem die Kerze steckt. Dadurch wird erreicht, daß die Kerze, selbst im geheizten Zimmer, ununterbrochen bis zu Ende brennt. Bei den von mir verwendeten Kerzen, die ich eigens zu diesem Zwecke anfertigen ließ, beträgt die Brenndauer (im Kollektor) ca. 6 Stunden.

Bei Verwendung von einfachen Metallzylindern, wie dies bei meinen ersten Versuchen geschah, erhitzte sich das Rohr *R*, trotz eines zwischengeschalteten Vulkanitringes nach einiger Zeit so stark, daß die Kerze herausschmolz. Auch eine völlige Ausfütterung der Metallzylinder mit Asbest half nicht.

Den oben beschriebenen Kollektor unterzog ich nun einer eingehenden Prüfung im künstlichen elektrischen Felde, in welchem ich zur Vergleichung auch einige andere Kollektortypen untersuchte.

Prüfung des Flammenkollektors im künstlichen elektrischen Felde.

Zunächst mußte festgestellt werden, in welcher Weise der Kollektor selbst die Niveauflächen eines homogenen elektrischen Feldes deformiert und wo jene besondere Niveaufläche (Ausgleichsniveaufläche, Bezugsniveaufläche) liegt, deren Potential der Kollektor schließlich annimmt. Gewöhnlich wird nämlich bei Messungen des atmosphärischen Potentialgefälles die Stä-

[1]) F. Linke, l. c., S. 668 und S. 664.

rung des Erdfeldes durch den Kollektor selbst völlig vernachlässigt, d. h. man nimmt an, daß ein Flammenkollektor das Potential der Niveaufläche annimmt, die durch seinen oberen Zylinderrand hindurchgeht und daß die Lage dieser Niveaufläche auch im ungestörten Felde, also bei Abwesenheit des Kollektors, dieselbe bleibt.

Ferner wurde die Zeit (Ladezeit) bestimmt, die der neue Flammenkollektor zu seiner völligen Aufladung benötigt und endlich wurde der Einfluß der Luftbewegung auf seine Wirkungsweise untersucht.

Das künstliche elektrische Feld[1]) wurde in folgender Weise hergestellt (Fig. 2):

Ein Zinkdrahtnetz (200 cm lang und 100 cm breit) Z von 1 cm Maschenweite wurde über einen festen Holzrahmen H eben ausgespannt, der mit den beiden Schmalseiten auf zwei Holz-

[1]) Eine Einrichtung ganz ähnlicher Art hat F. Henning (l. c., S. 898) getroffen.

böcken B_1 B_2 horizontal auflag, von diesen durch je ein Paar Paraffinklötze K_1 . . K_4 isoliert. Das ganze Netz wurde mit Hilfe einer Hochspannungsbatterie A, deren negativer Pol geerdet war, auf die stets gleiche Spannung von + 210 Volt aufgeladen. Diese Spannung wurde durch ein Elektroskop E_2 unter fortwährender Kontrolle gehalten. 50 cm unter dem Netze Z lag auf einem Tische eine ebene Zinkblechplatte P, die dauernd geerdet wurde. Zwischen dem + geladenen Netz und der hiezu parallelen geerdeten Blechplatte bestand demnach ein elektrisches Feld, dessen Niveauflächen, wie Messungen mit einem Wasser- und einem Flammenkollektor in übereinstimmender Weise zeigten, bis nahe an die Ränder heran horizontal verliefen. Nur in der Nähe der beiden Holzblöcke B_1 B_2, an den Schmalseiten des Feldes, ergaben sich zu kleine Potentialwerte, was von vornherein zu erwarten war, denn hier werden ja die Niveauflächen auf- und um die Böcke herumgebogen.

Der Verlauf des Potentiales in vertikaler Richtung wurde mit Hilfe eines Wassertropfkollektors G, R (Fig. 2) untersucht. Das Gefäß des Kollektors war, um Störungen des elektrischen Feldes möglichst zu vermeiden, außerhalb des Feldes angeordnet. Vom Wassergefäß G aus führte eine 175 cm lange horizontal gehaltene Metallröhre R in das Feld hinein. (In der Figur ist der Kollektor halb zur Seite gedreht gezeichnet.) Das vordere Ende des Rohres war ausziehbar eingerichtet, außerdem ließ sich der ganze Kollektor um seinen isolierenden Hartgummifuß F drehen und mit der aus der Figur 2 leicht erkennbaren Aufzugvorrichtung V in vertikaler Richtung verschieben. Damit war erreicht, daß sich die Auflösungsstelle des Wasserstrahles an jede beliebige Stelle des Feldes verlegen ließ, wodurch ein Abtasten der Niveauflächen ermöglicht wurde.

Zunächst wurde festgestellt, daß der Verlauf des Potentiales in vertikaler Richtung beim ungestörten künstlichen Felde ein linearer ist. Die Messung wurde in der Weise ausgeführt, daß nacheinander die Auflösungsstelle des Wasserstrahles an verschiedene in ungefähr gleichen Abständen aufeinanderfolgende Punkte ein und derselben Vertikalen (Mittel-

linie des Feldes) gebracht und für jeden dieser Punkte das Potential und der Abstand vom Grundbleche gemessen wurde. Ersteres geschah mit Hilfe eines mit dem Kollektor leitend verbundenen Elektroskopes E_1 (Fig. 2), letztere Messung durch einen vertikal auf einer Fußplatte stehenden Maßstab, der nur zum Zwecke dieser Abmessung für kurze Zeit ins Feld gebracht wurde. Die so erhaltenen Werte (Tabelle 1) wurden zur Zeichnung der Figur 3 verwendet. Zur Messung der niederen

Fig. 3.
Potentialverlauf im ungestörten elektrischen Felde.

Potentialwerte 20, 33 und 54 Volt verwendete ich ein empfindliches kleines Aluminiumblattelektroskop, das zwar bei diesen Spannungen deutliche Ausschläge zeigte, doch dürften trotzdem diese Werte etwas unsicherer als die übrigen sein.

Tabelle 1.
(Zu Figur 3.)

Abstand vom geerdeten Bleche in cm (Ordinaten)	5,0	9,6	13,9	18,8	23,6	28,5	33,8	39,7	45,0	48,0	50,0
Spannung in Volt (Abszissen)	20	33	54	75	97	118	140	166	186	199	210

Auf Grund dieser Messungen darf das künstliche elektrische Feld bis auf die Randpartien als homogen angesehen werden.

In dieses homogene Feld wurde der oben beschriebene Flammenkollektor gestellt und der nunmehrige Verlauf der zehn Niveauflächen vom Potentiale 20, 33, 54 etc. Volt bestimmt. Der brennende Kollektor stand bei diesen Messungen in der Mitte des Feldes auf einer kurzen Hartgummisäule, die in eine kleine Holzplatte eingelassen war (Tafel V). Zuerst wurde das Potential bestimmt, das der Kollektor bei dieser Aufstellung im Felde annahm. Das hiezu verwendete Aluminiumblattelektroskop war 1,5 m außerhalb des Feldes aufgestellt und durch einen dünnen horizontal geführten Leitungsdraht mit dem Kollektor verbunden. Dem Verlaufe der Niveaufläche vom Potential des Kollektors wurde in der folgenden Untersuchung besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Die Lage der deformierten Niveauflächen wurde in folgender Weise ermittelt. Zunächst wurden für eine in der Längsmittelebene des Feldes gelegene Vertikale im Abstande von 40 cm von der Feldmitte der Reihe nach die Lagen der Punkte vom Potential 20, 33, 54 etc. Volt bestimmt. Es geschah dies mit Hilfe des S. 514 beschriebenen Wasserkollektors, dessen Ausflußöffnung entsprechend orientiert und der nun allmählich so lange aufwärts bewegt wurde, bis das mit dem Tropfgefäß verbundene Elektroskop (E_1 Fig. 2) den verlangten Potentialwert anzeigte. Die einzelnen Potentialwerte konnten auf diese Weise mit genügender Genauigkeit festgelegt werden, da schon eine Vertikalverschiebung des Wasserkollektors von nur 2 mm eine wahrnehmbare Änderung des Elektroskopausschlages hervorrief. Zu jedem Potentialwerte wurde mit dem oben erwähnten Maßstab der zugehörige Abstand vom Grundblech auf Millimeter genau abgemessen.

In der gleichen Weise wurden für weitere vier Vertikalen derselben Mittelebene die zu den Potentialen von 20, 33 etc. Volt gehörigen Abstände bestimmt. Die so ermittelten Punkte gehören alle den Schnittlinien der deformierten Niveauflächen mit der vertikalen Längssymmetrieebene des Feldes an, und es kann nun leicht ein Längsschnitt durch das deformierte Feld gezeichnet werden (Tafel V).

Da ich mich durch Messungen an verschiedenen Seiten des Kollektors überzeugte, daß der Verlauf der Niveauflächen zum Flammenkollektor, wie vorauszusehen, völlig symmetrisch ist, so beschränkte ich mich in der Folge auf die Bestimmung von Punkten in der linken Hälfte der senkrechten Mittelebene des Feldes.

Der obenerwähnte horizontale Zuleitungsdraht vom Flammenkollektor zum Hilfselektroskop, der stets senkrecht zu den Längsseiten aus dem Felde herausgeführt wurde, wird zwar das Feld in seiner Umgebung etwas deformieren, doch reicht diese Deformation nicht bis zu unserer Schnittebene, wovon ich mich durch direkte Messungen mit und ohne Verbindungsdraht vergewisserte. Späterhin habe ich das Potential des Flammenkollektors nur zu Beginn und am Ende einer jeden Messung bestimmt und den Zuleitungsdraht während des Versuches ganz fortgelassen, da das Kollektorpotential sich nie merklich änderte, so lange die Flamme nicht rußte.

Tafel VI stellt den Verlauf der Niveauflächen dar einmal, wenn der Kollektor brennt (blaue Kurven) und einmal, wenn er nicht brennt (rote Kurven). Bei beiden Messungen stand der Flammenkollektor auf einem in ein Metallrohr eingebauten Hartgummistab, der mit Natrium getrocknet werden konnte. Letztere Vorrichtung war notwendig, weil bei nichtbrennendem Kollektor nur dann ein richtiger Verlauf der Niveauflächen erhalten wird, wenn die Stütze vorzüglich isoliert. Natürlich wird durch diese, quer zu den Niveauflächen langgestreckte metallische Hülle eine sehr starke Felddeformation herbeigeführt, welche man bei den Messungen im Terrain und bei brennendem Kollektor unbedingt vermeiden würde. Auch muß bei diesem Versuche der Kollektor vor jeder Messungsreihe sorgfältig geerdet werden, unter gleichzeitiger Ableitung des Zinkdrahtnetzes Z Fig. 2. Von einer Umladung des stets auf + 210 Volt geladenen Netzes wurde abgesehen, da frühere Untersuchungen[1]) zeigten, daß auch bei umgekehrtem Rich-

[1]) K. v. Wesendonk, l. c., S. 234. F. Henning, l. c., S. 901.

tungssinn der Kraftlinien des elektrischen Feldes der Ausgleichsort stets über dem Kollektorrand liegt. Die zu den Tafeln V und VI gehörigen, durch direkte Messung gewonnenen Werte sind in nachstehenden Tabellen 2 bis 4 zusammengestellt.

Tabelle 2.

(Zu Tafel 1.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20	—	4,3	4,1	4,7	5,0
33	—	6,5	6,6	8,5	9,6
54	—	8,5	9,4	12,4	13,9
75	—	10,6	13,1	17,2	18,8
97	—	12,5	16,9	22,1	23,6
118	—	14,6	21,6	26,9	28,5
140	—	20,2	28,8	32,2	33,8
168	31,9	36,0	37,8	39,3	40,0
186	43,3	43,5	43,8	44,5	45,0
199	47,2	47,3	47,4	47,9	48,0
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Tabelle 3.

(Zu Tafel 2, blaue Kurven.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20	—	2,6	3,2	4,6	4,6
33		3,6	5,4	8,8	9,2
54		4,6	7,2	12,0	13,8
75		5,9	10,3	16,7	18,6
97		7,1	14,3	21,4	23,4
118		9,4	19,1	26,1	28,4
140		14,2	25,7	32,2	33,8
165		24,2	34,7	38,6	39,0
186	37,6	41,3	42,9	44,5	44,7
199	46,0	46,6	47,0	47,7	47,9
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Tabelle 4.

(Zu Tafel 2, rote Kurven.)

Volt	Ordinaten (cm)				
20		3,9	4,6	5,6	5,7
33		5,9	8,3	9,6	10,1
54	-	9,6	13,3	13,9	14,2
75		20,4	19,9	19,3	19,2
97	37,3	32,6	26,2	24,5	24,4
118	38,4	35,9	32,0	29,4	29,2
140	40,2	38,6	36,5	34,5	34,3
165	43,0	42,3	41,4	39,8	39,6
186	46,6	46,3	45,6	45,3	45,2
199	48,7	48,5	48,4	48,4	48,1
Abszisse (cm)	0	5	10	25	40

Die Tafeln V und VI geben ein anschauliches Bild davon, in welcher Weise die Niveauflächen des homogenen Feldes (punktiert eingezeichnet) durch den Kollektor deformiert werden.

Bei nicht brennendem Kollektor (Tafel VI rote Kurven) findet eine Verteilung der Elektrizität durch Influenz statt. Dementsprechend ergeben sich zwei Partien von Niveauflächen, die beide durch eine horizontale, nicht deformierte Niveaufläche, der auch die Oberfläche des Kollektors angehört, voneinander geschieden sind. Die Lage dieser nicht deformierten Niveaufläche (neutralen Fläche) wurde durch graphische Interpolation bestimmt.

Ganz anders dagegen wird das Bild bei brennendem Flammenkollektor (Tafel V und VI blaue Kurven).

Nach eingetretenem Spannungsausgleich hat der Kollektor das Potential einer Niveaufläche angenommen, die im ungestörten Felde ca. 9 cm über seinem oberen Rande liegt. Diese „Ausgleichsniveaufläche" wird am Orte des Kollektors herabgebogen und umschließt ihn in einer sackförmigen Ausbiegung, wobei der untere Teil von der leitenden Oberfläche des Kollektors selbst gebildet wird. Die darunter liegenden Niveauflächen werden herabgedrängt und gehen unter dem Kollektor durch die isolierende Stütze hindurch, doch erstreckt sich diese Deformation nicht sehr weit. Schon in einer Tiefe unter dem Kollektor, die ungefähr der halben Längserstreckung gleichkommt, werden die Niveauflächen wieder eben. Das gleiche gilt für die Niveauflächen oberhalb des Kollektors. Seitwärts vom Kollektor sind die Niveauflächen bis zu einer Entfernung hin deformiert, die ungefähr der doppelten Länge desselben entspricht (Tafel V). Je länger der Kollektor, desto weiter reicht die Störung, wie eine Vergleichung der beiden Tafeln V und VI lehrt. Hieraus dürfte sich die Forderung ergeben, den Kollektor möglichst klein zu bauen und die isolierende Hartgummistütze blank, also ohne Schutzhülse, zu verwenden.

Zum Vergleiche wurden noch einige andere Arten von Flammenkollektoren unter den gleichen Bedingungen im selben

elektrischen Felde geprüft. Die Kollektoren waren dabei in der Mitte des Feldes auf dem in Tafel V gezeichneten einfachen Hartgummistab aufgestellt. Da durch die vorhergehenden Messungen ein übersichtliches Bild der Feldstörung durch einen Flammenkollektor gewonnen wurde, so konnten die folgenden Untersuchungen wesentlich vereinfacht werden. Ich bestimmte lediglich das konstante Potential, auf welches sich der jeweilige Flammenkollektor auflud nach der S. 516 angegebenen Weise. Mit Hilfe dieses Wertes kann leicht angegeben werden (aus Fig. 3), wie hoch über dem Kollektorrand (und der Flammenspitze) die „Ausgleichsniveaufläche" im ungestörten Felde liegt. Diese Werte sind für verschiedene Kollektortypen in Tabelle 5 zusammengestellt.

Anschließend an diese Messung wurde für jeden Kollektor die Ladezeit bestimmt. Theoretisch[1]) braucht ein Kollektor unendlich lange Zeit, um sich völlig aufzuladen, praktisch ist dies aber geschehen, wenn das zu diesen Messungen fast ausnahmslos verwendete Aluminiumblattelektroskop eine konstante Einstellung erreicht hat. Ich bestimmte die Ladezeit in folgender Weise. Der Kollektor wurde innerhalb des künstlichen Feldes in Betrieb gesetzt und nun gewartet, bis sich das Elektroskop auf einen konstanten Wert eingestellt hatte, hierauf geerdet und mit Hilfe einer Stoppuhr die kürzeste Zeit gemessen, die zur Wiederaufladung des Elektroskopes auf den gleichen Wert nötig war. Auch die Ladezeiten in sec. sind in nachstehender Tabelle 5 für verschiedene Flammenkollektoren angegeben.

Zu diesen Zahlen möchte ich noch bemerken, daß das Potential der freibrennenden Flammen beständig schwankt. Selbst wenn die Flamme auch ganz ruhig zu brennen scheint, ändern sich doch fortwährend die Angaben des Elektroskopes. Besonders bei der leicht flackernden Gasflamme ist eine sichere Einstellung des Elektroskopes gar nicht zu erzielen.[2])

---

[1]) F. Linke, Physikalische Zeitschrift 4, 662, 1903.

[2]) Dieser Übelstand veranlaßte z. B. K. v. Wesendonck (l. c.) seine Messungen nicht fortzusetzen.

Tabelle 5.

Bezeichnung des Kollektors	Abstand der Ausgleichs-niveaufläche vom Kollektorrand cm	Abstand der Ausgleichs-niveaufläche von der Flammenspitze cm	Ladezeit sec.
Flammenkollektor mit Netzgehäuse (Mittel aller Messungen)	8,6	15,6	27
Elster-Geitel-Flammenkollektor:[1]			
a) bei kleiner Flamme	7,2	12,6	38
b) bei rußender „	7,3	—	28
Kerzenflammenkollektor nach Exner:			
a) Metallzylinder 10 cm hoch	8,2	15,2	36
b) „ 15,5 „ „	6,7	19,2	55
Freibrennende Flammen:			
a) Kerzenflamme 3 cm hoch	—	15,8	38
b) Petroleumflamme 2,5 „ „	—	16,2	35
c) Gasflamme 7,5 „ „	—	12,4	5
d) „ 3,1 „ „	—	3,0	7

In Übereinstimmung mit allen früheren Messungen[2]) ergibt sich aus der Tabelle 5, daß die Flammenkollektoren ausnahmslos zu hohe Potentialwerte angeben, d. h. sie nehmen keineswegs das Potential einer durch die Flammenspitze oder den Kollektorrand gehenden Niveaufläche an, sondern das einer

[1]) Von der Firma Günther und Tegetmeyer in Braunschweig.

[2]) K. v. Wesendonk, l. c., S. 235. F. Henning, l. c., S. 898, 899 und S. 903. F. Linke, l. c., S. 663 und 664.

Besonders möchte ich auf die Arbeit des Herrn H. Benndorf hinweisen, der auf rechnerischem Wege zu genau denselben Resultaten kommt (l. c., S. 453). Diese Arbeit kam mir erst nach Abschluß der vorstehenden Untersuchungen zur Hand.

mehrere Zentimeter höher gelegenen Fläche. Nimmt man bei Potentialmessungen im Freien als Ort des beobachteten Potentialwertes den oberen Kollektorrand, so fällt die zugehörige Höhe zu klein aus, die Werte des Potentialgefälles (in Volt/m) werden infolgedessen zu groß. Bei einem Abstand des Kollektorrandes von 1 m bzw. 0,5 m vom Erdboden erhält man dadurch Fehler von ca. 10 % bzw. 20 %.

Die Ladezeit ist für Kollektoren mit rasch aufsteigenden Verbrennungsgasen (Kollektor mit Netzgehäuse und rußender Elster-Geitelscher Kollektor) am kürzesten (Tabelle 5). Jede Behinderung des freien Abzuges der Verbrennungsgase, sei es durch lange Zylinder, sei es durch aufgesetzte Kamine, oder gar durch kleine über der Kollektoröffnung angebrachte Dächer, vergrößert die Ladezeit ganz erheblich, wovon ich mich durch mehrfache Versuche überzeugte. Ferner ergibt sich aus der Tabelle 5, daß bei freibrennender Flamme die Ausgleichsniveaufläche etwas höher über der Flammenspitze liegt, als bei Anwendung von Zylindern. Nur durch Zylinder, die die Flammenspitze beträchtlich überragen, wird dieselbe gehoben. Der gleiche Fall tritt ein, wenn auf den Kollektor (mit Netzgehäuse) noch ein mehrere Zentimeter hoher Kamin aufgesetzt wird. Umgekehrt läßt sich durch Aufsetzen eines Daches über der Kollektoröffnung die Ausgleichsniveaufläche bis zum Kollektorrande herabdrücken, was aber, wie die folgenden Untersuchungen zeigen, ohne praktische Bedeutung ist.

Durch diese Untersuchungen sollte nämlich festgestellt werden, inwieweit die Luftbewegung die Angaben eines Flammenkollektors beeinflußt. Zu diesem Zwecke wurde außerhalb des Feldes ein elektrischer Ventilator aufgestellt, durch den ein kräftiger Luftstrom quer durch das Feld getrieben werden konnte. Die Geschwindigkeit des Ventilatorflügels konnte in Stufen verändert werden und so Windgeschwindigkeiten von im Mittel 1, 2 und 4 m/sec. erzeugt werden (gemessen durch ein Anemometer, das in verschiedener Höhe in der Mittellinie des Feldes aufgestellt wurde). Eine Deformation des Feldes durch den etwa 50 cm von einer Längsseite aufge-

stellten Ventilator trat nicht ein, wovon ich mich mit Hilfe des Wasserkollektors überzeugte. Der Einfluß des Windes (4 m/sec.) auf die Angaben dieses Kollektors war unmerklich, trotzdem der Wasserstrahl durch den kräftigen Luftstrom stark aus seiner ursprünglichen Richtung herausgedrängt wurde.

Die Ergebnisse der Messung sind in folgender Tabelle 6 zusammen mit den Werten ohne Ventilation (aus der Tabelle 5) dargestellt und zwar führe ich hier der Kürze halber nur die Mittelwerte aus vielen Einzelmessungen an.

Tabelle 6.

Einfluß des Windes auf Flammenkollektoren.

Name des Kollektors	Windgeschwindigkeit in m/sec.	Abstand des Kollektorrandes vom Bodenbleche in cm	Höhe der Ausgleichsniveaufläche über dem Kollektorrand in cm	Ausgleichsniveaufläche gesunken um cm	Ladezeit in sec.
Flammenkollektor mit Netzgehäuse	0	30,6	8,6	—	27
	1	30,1	5,5	3,1	39
	4	30,1	− 0,8	9,4	86
Flammenkollektor Elster-Geitel	0	27,9	7,2	—	38
	1	27,5	5,5	1,7	56
	2	24,9	4,1	3,1	60
Flammenkollektor mit 10 cm hohem Zylinder	0	30,9	8,2	—	36
	4	30,9	4,4	3,8	67
Flammenkollektor mit 15,5 cm hohem Zylinder	0	36,3	6,7	—	55
	4	36,3	1,5	5,2	217

Bei allen Flammenkollektoren zeigt sich zunächst, daß schon ganz schwacher Wind (1 m/sec.) die Ausgleichsniveaufläche um einige Zentimeter herabdrückt. Der Kollektor nimmt

dementsprechend ein kleineres Potential an. Bei größer werdender Windgeschwindigkeit rückt auch die Ausgleichsniveaufläche tiefer und erreicht schließlich bei ca. 4 m/sec. den Kollektorrand. Eine weitere Steigerung der Windgeschwindigkeit ist praktisch bedeutungslos, da schon bei 4 m/sec. die Blättchen des Elektroskopes zu flattern beginnen.

Der Elster-Geitelsche Kollektor fängt schon bei einer Windgeschwindigkeit von 1 m/sec. stark zu rußen und zu flackern an; eine Steigerung derselben auf 2 m/sec. führt nach kurzer Zeit das Erlöschen des Flämmchens herbei, so daß bei dieser Geschwindigkeit nur mit Mühe Ablesungen erhalten werden können. Bei noch größerer Windstärke erlischt die Flamme sofort.

Ferner zeigt sich (Tabelle 6), daß sich bei Wind jeder Flammenkollektor langsamer aufladet und zwar um so langsamer, je größer die Windgeschwindigkeit ist. Bei dem Kerzenkollektor mit 15,5 cm langem Metallzylinder wächst die Ladezeit auf mehrere Minuten an. Auch aus diesem Grunde wäre ein solcher Flammenkollektor nicht zu empfehlen.

Durch besondere, am Kollektor angebrachte Armierungen, wie Kamine, kleine Dächer, Platten über der Öffnung, Windschirme etc. suchte ich den erwähnten Einfluß des Windes zu beseitigen. Abgesehen davon, daß jede Behinderung des freien Abzuges der Verbrennungsgase die Ladezeit eines Flammenkollektors bedeutend vergrößert, drückt der Wind, trotz der besonderen Vorrichtungen, die Ausgleichsniveaufläche herab, oft noch weit in den Zylinder des Kollektors hinein.

Die ungleichmäßige innere Struktur des im Freien wehenden Windes muß, unseren Untersuchungen zufolge, die Ausgleichsniveaufläche eines Flammenkollektors bei Messungen in der freien Atmosphäre in beständigem Schwanken erhalten. Demzufolge werden bald größere bald kleinere nicht reelle Schwankungen des Potentialgefälles zu beobachten sein, wovon man sich bei Potentialmessungen im Freien leicht überzeugen kann.

Eine Vermeidung dieser Fehlerquelle dürfte allein durch die gleichzeitige Verwendung zweier, völlig übereinstimmend gebauter Flammenkollektoren möglich sein. Ein Kollektor wird dann in geringer Entfernung über dem Erdboden aufgestellt und mit dem nunmehr zu isolierenden Gehäuse des Elektroskopes verbunden, der andere 1 m darüber, mit dem Blättchenträger in leitender Verbindung. Eine Anordnung dieser Art ist auch deshalb zu empfehlen, weil wohl nur in wenigen Fällen der Beobachtungsplatz vollkommen eben, und so der Abstand des Ausgleichsortes von der Erdoberfläche genau angebbar ist.

Die vorstehenden Untersuchungen wurden zum größten Teile im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule ausgeführt. Herr Professor Dr. H. Ebert hat mir in freundlichster Weise die hiezu nötigen Apparate zur Verfügung gestellt und meine Arbeit durch manchen wertvollen Rat gefördert. Hiefür, sowie für die wirksame Unterstützung, die Herr Professor Ebert überhaupt den luftelektrischen Beobachtungen am Erdmagnetischen Observatorium seit ihrer Einführung zuteil werden läßt, möchte ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Über Pulsationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft.

Von **H. Ebert.**

(Eingelaufen 3. November.)

1. Schon seit längerer Zeit erregen jene auffallend regelmäßigen Schwingungen von kurzer Periodendauer in der Intensität der erdmagnetischen Kraft allgemeinere Aufmerksamkeit, welche namentlich zu Zeiten von magnetischen Störungen in den die Feldkraft in ihrem zeitlichen Verlaufe darstellenden Kurven in Form kurzer Wellen zur Erscheinung kommen („erdmagnetische Wellen"). Bekannt ist das von Friedrich Kohlrausch vom 20. November 1882 mitgeteilte Beispiel,[1]) bei dem durch zweisekundliche Ablesungen an dem von ihm konstruierten Ablenkungs-Intensitätsvariometer für die Horizontalkomponente (Schwingungsdauer der Nadel 1,7 sec., Dämpfungsverhältnis 2,0) solche Schwingungen von rund 12 sec. Periodendauer und 4 γ ($1\ \gamma = 0{,}00001$ C.G.S. Einheiten) Amplitude erhalten wurden. Bei den gewöhnlichen Registrierverfahren mit langsamem Streifengang müssen derartige kurzdauernde Schwankungen der erdmagnetischen Feldkraft verloren gehen; sie können sich höchstens in einer Verbreiterung und unscharfen Zeichnung der Kurven kundgeben.

Es war daher ein wesentliches Verdienst von M. Eschenhagen, daß er zum Studium gerade derartiger kleiner Variationen des Erdmagnetismus die sog. „Feinregistrierung" ein-

[1]) Fr. Kohlrausch, Wied. Ann. **60**, 336, 1897.

führte,[1]) bei welcher durch rascheren Streifengang (1 mm gleich 15 sec., statt wie sonst üblich, 180 sec.) eine bei weitem mehr ins einzelne gehende Auflösung des zeitlichen Ablaufes der Erscheinungen ermöglicht wurde. Gleichzeitig erhöhte er die Empfindlichkeit des Variationsinstrumentes; sein Unifilarmagnetometer, bei welchem ein kleiner magnetisierter Stahlspiegel durch einen tordierten Quarzfaden, an dem er hängt, in senkrechter Stellung zum magnetischen Meridian erhalten wird, gab bei 8,5 sec. Schwingungsdauer und einem Dämpfungsverhältnis von etwa 4 eine Empfindlichkeit von 1 mm gleich 0,3 γ. In dem von ihm a. a. O. mitgeteilten Kurvenbeispiele kann man 199 Pulsationen zählen, welche auf eine (ganze) Schwingungsdauer von 32,2 sec. bei einer mittleren Amplitude von 1,4 γ führen. Eschenhagen glaubte in diesen Wellen von konstanter Periode „gewissermaßen die einfachsten Elementarbewegungen des Erdmagnetismus“ erblicken zu dürfen, da (bei seinem Instrumente) keine weiteren Details durch fortgesetzte Auflösung zu erkennen waren. Auf Grund eines umfangreicheren Materiales an solchen Feinregistrierungen (etwa sechzig), kommt er zu dem folgenden Schlusse:[2]) „Alle gesammelten Ergebnisse beweisen, daß man durch eine solche Feinregistrierung bei gleichzeitiger guter Dämpfung der Magnetnadel und hoher Empfindlichkeit gegenüber den Intensitätsänderungen in der Tat bis zur letzten Auflösung der kleinsten Schwankungen des Erdmagnetismus, also zu einer Darstellung der „Elementarwellen“ kommt, so daß eine weitere Verfeinerung jener Hilfsmittel keinen Erfolg mehr verspricht.“

Bemerkenswert ist, daß jene kurzdauernden Wellen vorzugsweise am Tage, zwischen morgens und abends 6 Uhr, also zu einer Zeit, in der die Sonne über dem Horizonte der Beobachtungsorte zur betreffenden Jahreszeit stand, auf-

[1]) M. Eschenhagen, Sitzungsber. d. Berliner Akad. Nr. XXXIX, 965, 1896.

[2]) M. Eschenhagen, Sitzungsber. der Berliner Akad. Nr. XXXII, 678, 1897.

traten, sehr selten nachts, während in den Nachtstunden häufig längere, schon an den gewöhnlichen Registrierungen erkennbare Wellen erschienen.[1]) Interessant vor allem sind die von Eschenhagen entdeckten „Wellengruppen", die eine Analogie zu den Schwebungen der Töne darstellen; eine Wellenbewegung von 34 sec. Periodendauer trat mit einer solchen von 43 sec. in Interferenz und erzeugte die für das Schwingungszahlenverhältnis 5 zu 4 charakteristische Schwebungskurve; dabei betrug die Amplitude der beiden miteinander interferierenden Schwingungen etwa 0,6 γ.

Solche erdmagnetische Schwingungen können ein weites Verbreitungsgebiet besitzen. Schon 1895 wurden bei Gelegenheit von Terminbeobachtungen Wellen von 40 bis 50 sec. Dauer bemerkt, welche (innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler von 1 bis 2 sec.) in Potsdam und in Wilhelmshaven gleichzeitig auftraten. Weiteres hierher gehöriges Material wurde von Kr. Birkeland bei Gelegenheit der Norwegischen Expedition zum Studium der Polarlichter 1899—1900 gesammelt.[2]) Es zeigten sich bemerkenswerte Übereinstimmungen zwischen gleichzeitig zu Haldde bei Bossekop im nördlichen Norwegen und in Potsdam vorgenommenen Feinregistrierungen, also an zwei Stationen, welche um ca. 2000 km voneinander entfernt sind, ein Zeichen dafür, daß derartige Pulsationen ungeheure Gebiete des erdmagnetischen Kraftfeldes mit gleichem Rhythmus durchzucken können. Birkeland hat auch die Häufigkeit des Auftretens solcher Pulsationen als Funktion ihrer Periodendauer dargestellt; hierbei zeigt sich, daß eine Häufung der Erscheinungen auftritt für bestimmte Dauern, welche nach dem damals vorliegenden Materiale bei etwa 32 und 8 sec. gelegen ist. Hier haben wir also bereits Schwingungen von wesentlich kürzerer Dauer als die Eschenhagenschen Elementarwellen.

Es drängt sich daher die Frage auf: Kommen nicht vielleicht Pulsationen von noch kürzerer Periode in den erdmag-

---

[1]) Vgl. auch Th. Arendt, Das Wetter, Heft 11 und 12, 1896.

[2]) Kr. Birkeland, Videnskabsselsk. Skrifter. Akad. Christiania. I. Math.-naturw. Kl. Nr. 1, 1901, S. 3 ff.

netischen Elementen vor? Sind die in den Feinregistrierungen aufgezeichneten kleinen Wellen wirklich die letzten Bestandteile der großen erdmagnetischen Feldschwankungen, kann man in der beschriebenen Weise überhaupt die erdmagnetischen Erscheinungen in ihre letzten Elemente auflösen? Eine einfache Überlegung zeigt, daß dies stets daran scheitern muß, daß wir nicht imstande sind, die Schwingungsdauer der magnetometrischen Apparate unter eine gewisse Grenze herabzudrücken, wenn wir nicht an Empfindlichkeit erheblich einbüßen wollen; die Magnetsysteme sind viel zu träge, um Variationen von wenigen Sekunden Periode folgen zu können, ohne das Bild des zeitlichen Ablaufes dieser Variationen bis zur völligen Unkenntlichkeit zu verwischen; hier muß ein ganz anderes Prinzip herangezogen werden.

Eschenhagen hat schon selbst 1886, zurückgreifend auf einen Vorschlag von Werner Siemens aus dem Jahre 1882, auf die Induktionswirkung in einer ausgedehnten Leiterschleife bei Variation der von dieser umfaßten Kraftlinienzahl hingewiesen.[1]) Siemens hatte der Deutschen Polarexpedition[2]) vom Jahre 1882—1883 ein 12 km langes, leichtes, durch eine Guttaperchahülle isoliertes, einadriges Kabel mitgegeben, welches auf dem Eise des Kingua-Fjordes, der Deutschen Beobachtungsstation, während des internationalen Polarjahres derart ausgelegt wurde, daß es eine Fläche von rund 8 qkm umspannte. Seine Enden waren an ein astatisches Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske angeschlossen, und die in ihm auftretenden Stromstöße wurden mit den Variationen der Vertikalintensität, wie sie eine Lloydsche Wage aufzeichnete, verglichen. Es zeigte sich, daß die im Kabel beobachteten Ströme in der Tat durchaus dem Wechsel in der

---

[1]) M. Eschenhagen, Sitzungsber. der Berliner Akad. Nr. XXXII, 1897, S. 685 und Verhandl. Phys. Ges., I. Jahrg., Nr. 9, S. 161, 1899.

[2]) Die internationale Polarforschung 1882—1883. Die Beobachtungs-Ergebnisse der Deutschen Stationen, Band I, Kingua-Fjord u. s. w. Die Erdstrom-Beobachtungen, bearbeitet von W. Giese, S. 411, Berlin 1886; vgl. auch M. Eschenhagen, ebenda S. 597.

Intensität der Vertikalkomponente folgen, so daß kein Zweifel bestehen konnte, daß wirklich die in der Leiterschleife durch die Feldvariation geweckte Induktionswirkung ein Mittel darbietet, jene Variationen zu studieren. Ja die Empfindlichkeit des Kabelapparates erwies sich für die kleinsten beobachteten Schwankungen der Vertikalintensität bei diesen Versuchen etwa hundertmal so groß als die der Lloydschen Wage, seither des einzigen Instrumentes, welches sich für die Registrierung der Vertikalkomponente dauernd als brauchbar erwiesen hat. W. Giese, welcher, wie oben angegeben, diese Beobachtungen der Deutschen Station bearbeitete, hebt hervor, daß das Kabel eigentlich nie frei war von den elektomagnetischen Impulsen und daß die ganze Anordnung für die hohen Breiten eigentlich zu empfindlich war. Eschenhagen schlug daher vor, statt der großen und sehr ausgedehnten ebenen Leiterschleife minder ausgedehnte Drahtspulen zu verwenden, welche den Vorteil bieten würden, daß man je nach ihrer Orientierung beliebige Komponenten des Erdmagnetismus, eventuell auch dessen Totalintensität untersuchen könnte; ob sich empfehlen würde, eine Verdichtung der erdmagnetischen Kraftlinien durch Ausfüllen des Spuleninneren mit weichem Eisen herbeizuführen, sei erst durch besondere Versuche festzustellen. Zu diesen ist Eschenhagen selbst nicht mehr gekommen.

Ich hatte 1897/98 in Kiel zunächst zum Studium der Natur der durch den elektrischen Trambahnbetrieb bedingten Störungen der einzelnen erdmagnetischen Komponenten derartige eisenerfüllte flache Spulen von großer Gesamtwindungsfläche, welche an ein empfindliches, in Juliusscher Aufhängung montiertes Du Bois-Rubenssches Galvanometer angeschlossen waren, mit großem Erfolge benutzt (es sind dies die Versuche, auf welche M. Eschenhagen, Verhandl. der Phys. Ges., 1. Jahrg., Nr. 9, S. 151 unten, 1899 hinweist). Zu Zeiten, als der Trambahnverkehr ruhte, blieben aber noch schwache Stromstöße von außerordentlicher Variabilität zurück, welche augenscheinlich mit zeitlichen Variationen in den einzelnen erdmagnetischen Komponenten selbst zusammenhingen. Schon hierbei zeigte

sich aber, daß die Eisenerfüllung beim Studium der rasch sich vollziehenden Schwankungen ungünstig wirkte: dadurch, daß man einen dichteren Kraftlinienstrom durch das Spuleninnere leitet, gewinnt man zwar an Feldintensität, aber das Eisen folgt selbst bei den hier vorkommenden schwachen magnetischen Belastungen den zeitlichen Änderungen zu träge und verwischt dieselben, sogar wenn man sehr weit unterteiltes Eisen und namentlich in der Kraftlinienrichtung selbst nur kurz bemessene Drähte aus weichstem Eisen wählt. Da die Induktionswirkung der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der betreffenden Feldkomponente proportional ist, wurde daher der weiche Eisenkern bald wieder verlassen und auf die ausgedehntere Leiterschleife zurückgegriffen.

Unterdessen sind in Kiel auf Veranlassung des Herrn Professor Leonh. Weber von Herrn Herm. Andreesen[1]) Versuche angestellt worden, bei denen ein Kabel 96 mal um das magnetische Observatorium herumgelegt wurde, so daß eine Gesamtwindungsfläche von 7200 qm erzielt wurde. Die Kabelenden wurden an ein Drehspulengalvanometer nach Deprez-d'Arsonval von Siemens und Halske von 2,5 bis 3 Minuten Schwingungsdauer angeschlossen. Die erhaltenen Registrierkurven zeigen außer sehr unregelmäßigen Zacken gelegentlich nachts kleinere Zacken von kurzer Dauer, welche Andreesen geneigt ist, ebenfalls vagabundierenden Strömen zuzuschreiben, wie jene großen Zacken, welche einen unverkennbaren Zusammenhang mit dem Trambahnbetriebe aufwiesen. Nur einmal im September 1904 zeigten sich nachts ganz feine regelmäßige Wellenzüge von ca. 30 sec. Periodendauer, welche also den von Eschenhagen gefundenen Wellen entsprechen würden.

2. Hatten die bisherigen Versuche gezeigt, daß das Induktionsprinzip in der Tat imstande ist, ein Vertikal-Intensitäts-Variometer des Erdmagnetismus von hoher Empfindlichkeit zu liefern, so mußte doch seither auch auf diesem Wege der Versuch als aussichtslos erscheinen, wesentlich weiter in die Einzel-

[1]) H. Andreesen, Inaug.-Diss., Kiel 1905, S. 32 ff.

beiten des zeitlichen Verlaufes der rascheren erdmagnetischen Pulsationen vorzudringen. An Stelle der beweglichen Systeme der Magnetometer traten jetzt diejenigen der Galvanometer; da man die Schwingungsdauer und die Trägheitsmomente derselben nicht unter eine gewisse Grenze bringen kann, so vermögen sie ebensowenig den kürzeren Wellen zu folgen, wie die direkt auf die Variationen der erdmagnetischen Kraft reagierenden Apparate. Dazu gesellt sich bei den Galvanometern mit beweglichen Magneten und feststehenden stromführenden Teilen noch der Nachteil, daß die Orientierung ihrer beweglichen Teile selbst wieder von den Variationen der erdmagnetischen Kraft abhängig ist. Bei den Spulengalvanometern, bei denen dieser Nachteil wegfallen würde, stört der Umstand, daß sie, durch das Kabel geschlossen, außerordentlich stark gedämpft und daher sehr träge sind, wenn man nicht durch Vorlegen großer Ballastwiderstände die Empfindlichkeit stark herabsetzen will.

Hier konnte nun ein wesentlicher Fortschritt erzielt werden durch Heranziehung des zuerst von Ader angegebenen, dann von Herrn Einthoven und später von Herrn M. Edelmann jun. so überaus verfeinerten und vervollkommneten Saitengalvanometers.[1]) Bei diesem wird ein möglichst dünner versilberter Quarzfaden oder ein feiner Metalldraht in einem starken konstanten Hilfsmagnetfelde senkrecht zu dessen Kraftlinien längs der schneidenartig gestalteten Polschuhe desselben ausgespannt; geht ein Strom durch den Faden, die „Saite", so wird diese mit einer der Stromstärke, der Stärke des Hilfsfeldes und der Länge der Saite proportionalen Kraft quer zu den Kraftlinien abgelenkt; die Ablenkung wird durch ein Mikroskop hindurch verfolgt oder durch geeignete optische

[1]) Vgl. bezüglich der Aderschen Anordnung: Léauté, Compt. rend. **124**, 1440, 1897, oder La Nature, **2**, 115, 1897, L'Eclairage électrique 1897, 295, Elektrotechn. Zeitschrift 1897, 561.

W. Einthoven, Ann. der Phys. (4). **12**, 1059, 1903; **14**, 182, 1904; **16**, 20, 1905.

M. Edelmann jun., Physikal. Zeitschrift, **7**, Nr. 4, 115, 1906.

Systeme auf einem bewegten lichtempfindlichen Filmstreifen abgebildet. Hier hat man ein System von verschwindend kleiner Masse, welches im Stande ist den raschesten Wechseln der Stromintensität fast momentan zu folgen, eine Anordnung, welche mit dem Vorzug vollkommener Unempfindlichkeit gegen äußere magnetische Störungen denjenigen der höchsten Stromempfindlichkeit verbindet.

Mit einem solchen Saitengalvanometer habe ich meine längere Zeit unterbrochenen Versuche über die Wirkungen rascher erdmagnetischen Pulsationen auf größere Leiterschleifen im Sommer vergangenen Jahres wieder aufgenommen, wobei mich Herr Dr. Max Edelmann jun. in München auf das wirksamste unterstützte, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

Um bei der Wahl des Beobachtungsortes nicht an Stromquellen gebunden zu sein, wurde bei der Konstruktion der Saitengalvanometer von der Verwendung der Elektromagnete abgesehen und zu derjenigen kräftiger Dauermagnete übergegangen; dadurch wurde zwar etwas an Empfindlichkeit preisgegeben, doch gelang es dem Edelmannschen Institute dafür sehr handliche Saitengalvanometer herzustellen.[1])

Das zu den Versuchen verwendete Galvanometer enthielt einen Faden von 120 Ohm Widerstand und gab 1 mm Ausschlag bei einem Strome von 10^{-7} Ampere; die mikroskopische Vergrößerung war nur eine 50 fache; Ströme von 10^{-8} Ampere waren aber noch bequem und sicher zu messen. Um in den Photogrammen die Zeitmarken mit zu erhalten, ließen wir vor dem Spalte der Registriertrommel das Pendel eines Metronoms so schwingen, daß es bei jeder ganzen Schwingung einmal etwas von der Seite her über den Spalt sich hinbewegte; am Rande des Registrierstreifens entstanden dann kleine Zacken.

[1]) Vgl. bezüglich der Beschreibung derselben sowie der photographischen Registrierapparate die obengenannte Arbeit von M. Edelmann.

an denen die Zeitbestimmung mit großer Sicherheit vorgenommen werden konnte.

Die Leiterschleife wurde hergestellt mittels eines von der Firma Felten und Guillaume bezogenen Kabels von 15 voneinander isolierten Kupferadern von je 0,8 mm Durchmesser, d. i. 0,5 qmm Querschnitt und 0,03463 Ohm Widerstand pro Ader und pro laufenden Meter. Das Kabel war 210 m lang, seine 15 Adern wurden hintereinander geschaltet, so daß eine Gesamtdrahtlänge von 3150 m und beim Auslegen längs einer Kreisfläche eine Gesamtwindungsfläche von 52640 qm zur Verfügung stand bei einem Gesamtwiderstand von 109 Ohm. Es ist klar, daß wenn man ein derartiges Kabel im Freien auslegt, Störungen thermo-, vielleicht auch hydroelektrischer Natur nicht ausbleiben können. Den hierdurch bedingten Kabelströmen legen sich freilich die gesuchten Induktionsströme einfach über, ohne durch diese beeinflußt zu werden, indessen bedingen diese Ströme ein fortwährendes Herausgehen des Galvanometerfadens aus der Ruhelage und eventuell auch aus dem Gesichtsfelde. Dieser Übelstand wurde dadurch behoben, daß in einem Nebenschluß zum Kabel durch eine dauernd hier eingeschaltete elektromotorische Kraft (ein Trockenelement mit regulierbarem großen Vorschaltwiderstand) eine geeignete Kompensation hergestellt wurde; außerdem empfahl es sich noch einen zweiten Nebenschluß anzuordnen, durch welchen die Empfindlichkeit des Galvanometers geeignet abgestuft werden konnte. Das Kabel blieb während des Nichtgebrauches immer in sich kurz geschlossen und an Erde gelegt, so daß eventuelle statische Ladungen sich sofort ausgleichen mußten. Außerdem verblieb bei den Messungen selbst ein Ende des Meßfadens sowie das ganze Gestell des Apparates mit dem Magnetsystem dauernd an Erde.

Das Kabel mußte vollkommen fest auf dem Boden verlegt werden; denn wenn irgend ein Teil desselben, — bei der großen Empfindlichkeit der Anordnung, selbst ein relativ kurzer, — sich bewegt, etwa vom Winde in Pendelschwingungen versetzt wird, so schneidet er die Kraftlinien des Erdfeldes und ruft

Induktionsströme hervor, welche genau dem Rhythmus der Bewegungen folgen.[1]) Außerdem war das Kabel nach Möglichkeit vor direkten elektrostatischen Beeinflußungen, etwa von Seiten des elektrischen Feldes der Atmosphäre zu schützen. Hätte unser Kabel einen Bleimantel besessen, so hätten wir es in die Erde eingegraben, wodurch die genannten Störungsquellen am sichersten eliminiert worden wären. Bei der im nächsten Frühjahr geplanten Fortsetzung der Versuche gedenken wir in der Tat ein umbleites, vieladriges (natürlich nicht eisenbandagiertes) Telephonkabel zu verwenden, welches weit entfernt von jedem größeren Verkehrs- oder Industriezentrum in die Erde so verlegt ist, daß es einen bestimmten Flächenraum (vgl. weiter unten) umspannt. Den seither angestellten Versuchen möchten wir nur die Bedeutung von Vorversuchen beimessen, welche zunächst die Brauchbarkeit der neuen Anordnung erproben sollten.

3. Die ersten Versuche wurden auf dem in der Nymphenburger Vorstadt Münchens gelegenen Grundstücke des Herrn Prof. Dr. M. Th. Edelmann sen. ausgeführt. Hier hatten wir während des Tages und abends reichlich Gelegenheit die Störungen zu studieren, welche durch den Trambahnverkehr, vorübergehende Wagen und die elektrische Straßenbeleuchtung hervorgerufen werden. Dieselben bestehen durchweg in plötzlich auftretenden Zuckungen von sehr unregelmäßiger und verschiedenartiger Gestalt, die aber rasch abklingen.

Daneben zeigten sich aber stets längere Ketten überaus regelmäßiger Wellen von Periodendauern weniger Zehntel

---

[1]) Hierauf ließe sich eine bemerkenswerte Anwendung der ganzen Anordnung gründen. Da erdmagnetische Kraftlinien überall in genügender Zahl zur Verfügung stehen, so braucht man nur mit einem bewegten Teile eines Systems, etwa eines Pegelapparates oder Flutmessers, dessen Bewegungen fernregistriert werden sollen, einen die Kraftlinien schneidenden Leiterteil zu verbinden, der durch eine Doppelleitung an ein solches hochempfindliches Saitengalvanometer angeschlossen ist. Bei vielen Gelegenheiten überzeugten wir uns davon, wie treu die [illegible]rende Bewegung durch den Stromverlauf nachgeahmt wird.

Sekunden. Diese waren es, welche auch nachts in der Zeit zwischen 1 und 5 Uhr, in der der Trambahnverkehr ruht, und auch morgens zwischen 4 und 5 Uhr, in der auch der Lichtbetrieb im Sommer abgestellt wurde, andauerten. Natürlich wurde sofort an entfernte elektrische Betriebe gedacht, welche die ganze Nacht hindurch unterhalten blieben. Nach eingezogenen Erkundigungen kam hier vor allem die nächste, aber immer noch 1130 m weit entfernte Unterstation der städtischen Elektrizitätswerke in Betracht.

Die großen zwölfpoligen Gleichstromdynamos, welche das Beleuchtungsnetz speisen, machen 165 Touren pro Minute, die Dauer einer ganzen Umdrehung der Armatur beträgt also 0,363 sec. Die Zeit, welche verstreicht, bis ein Wickelungselement von einem Feldmagneten bis vor den nächsten tritt, beträgt nur den zwölften Teil hiervon oder 0,030 sec. Weder die eine noch die andere Periode trat in den Kurven hervor.

Der zum Betriebe dieser Dynamos verwendete dreiphasige Wechselstrom hat die gewöhnlich angewendeten 100 Perioden per Sec.; es konnten Pulsationen von $1/_{100}$ sec. Dauer erwartet werden, aber auch diese waren nicht zu bemerken.

Somit konnte bereits bei diesen Versuchen vermutet werden, daß diese Wellen dem Erdmagnetismus selbst angehörten.

Immerhin wird man derartigen Beobachtungen, welche in der Nähe eines großen Verkehrszentrums angestellt worden sind, nicht unberechtigtes Mißtrauen entgegenbringen. Wir verlegten daher den Beobachtungsort weit außerhalb der Stadt auf das 25 km südlich von München zwischen Icking und Wolfratshausen in der Villenkolonie „Schlederlohe“ gelegene Waldgrundstück des Herrn Prof. Dr. M. Th. Edelmann. Unterhalb desselben führt zwar in tiefem Einschnitte die Isartalbahn vorüber, deren Züge jedesmal beim Vorüberfahren sich durch ganz charakteristische Stromzuckungen in der Leiterschleife kennzeichneten; da aber diese Momente der Störungen durch die vorüberfahrenden Eisenmassen genau feststellbar, da sie außerdem nicht zu häufig waren, konnten sie leicht aus den Beobachtungen eliminiert werden. Die nächste elektrische

Zentrale, das Drehstromwerk in Weidach, liegt 2,2 km entfernt, eine ihren Maschinen entsprechende Schwingungsperiode konnte nicht konstatiert werden. Man könnte noch an eine direkte Induktionswirkung von seiten der unten im Eisenbahneinschnitte vorüberführenden Telegraphenleitungen auf die von uns ausgelegte Leiterschleife denken. Aber abgesehen davon, daß die nächste Stelle der Schleife ca. 70 m vom nächsten Telegraphendrahte entfernt lag, breitete sich zwischen diesem und der Schleife der ganze Erdhang aus, so daß vom Orte des Kabels die Leitungen nirgends sichtbar waren; es war also genügender Erdschutz vorhanden. Die Schleife wurde im Walde ausgelegt, das Kabel durch Holzpflöcke im tiefen Grase befestigt; dadurch waren die oben angedeuteten Fehlerquellen beseitigt.

Auch hier auf diesem völlig geschützten Terrain zeigten sich nun die kurz dauernden Pulsationen vollkommen deutlich ausgeprägt und in großer Fülle, sowohl tags als auch nachts. Indessen besteht ein sehr charakteristischer Unterschied, der an denjenigen erinnert, welcher schon von Eschenhagen bezüglich der langen erdmagnetischen Wellen konstatiert worden war (vgl. oben S. 529). Am Tage sind die Pulsationen heftig, stürmisch, wechselnd und unruhig; während der Nacht treten dafür ruhige Schwingungen, von kleinerer aber gleichförmiger Amplitude auf. Die Kurven weisen teils ziemlich reine Sinuslinien auf, teils mehrere miteinander interferierende Wellensysteme. Die meteorologischen Elemente scheinen keinen direkten Einfluß zu haben, wenigstens konnten wir keinen merklichen Unterschied in den Kabelströmen bemerken bei Wind oder bei Windstille, bei Sonnenschein oder bei bedecktem Himmel, bei hoher oder niedriger Temperatur, bei Regen oder niederschlagsfreiem Wetter, selbst ein heranziehendes Gewitter änderte nichts Wesentliches an dem allgemeinen Erscheinungsbilde. Offenbar umfaßt die Ursache der „erdmagnetischen Pulsationen“ weite Gebiete, so daß der lokale Witterungscharakter an einem bestimmten Orte irrelevant ist.

Was die Empfindlichkeit unserer Anordnung betrifft, so

berechnet sich dieselbe wie folgt: In Schlederlohe hatten wir mit dem Kabel eine nahezu rechteckige Fläche von 53,2 bzw. 54,0 m Länge und 33,1 bzw. 37,8 m Breite, also rund 1900 qm oder $1,9 \cdot 10^7$ cm² Fläche umlegt, die übrigen 32 m waren als Hin- und Rückleitung zu dem in der Villa des genannten Grundstückes aufgestellten Galvanometer dicht nebeneinander gelegt. Da die 15 Adern wiederum in Serie geschaltet waren, so betrug die gesamte Windungsfläche 28500 qm oder $2,8 \cdot 10^8$ cm². Bei einer Vertikalintensität von 0,41 C. G. S. Einheiten, wie sie im Mittel am Beobachtungsorte herrschte, würde die Änderung um 1 γ dieser Komponente d. i. um den 41000sten Teil ihres mittleren Betrages in einer Sekunde einer induzierten elektromotorischen Kraft von $2,8 \cdot 10^{-5}$ Volt entsprechen. Der Widerstand des gesammten Leiterkreises betrug 229 Ohm; bei voller Empfindlichkeit entsprach, wie oben angegeben, ein Millimeter 10^{-7} Ampère; der genannte Induktionsstoß brachte also mehr als einen Skalenteil Ausschlag hervor, der mit dem Mikroskope genau gemessen werden konnte. Ein Zehntel der genannten Feldvariation konnte noch deutlich bemerkt werden. Da der Faden auch sehr kurz dauernden Stromstößen vollkommen getreu folgt, so steigert sich die Empfindlichkeit in dem Maße, als sich der zeitliche Ablauf der Feldstärkeänderung beschleunigt. Hierin liegt ein wesentlicher Vorteil gegenüber den älteren Methoden, die schon weit oberhalb der genannten Empfindlichkeitsgrenze versagen.

4. Von besonderem Interesse sind naturgemäß die bei den Beobachtungen sich ergebenden Periodendauern. Außer Pulsationen von der Dauer, wie sie schon früher beobachtet worden waren, also von der Periodenlänge von mehreren Sekunden, konnten wir auch sehr viel kürzere magnetische Wellen konstatieren, ja bei Schnelllauf der Registriertrommel gelang es, noch länger andauernde und sehr regelmäßige Pulsationen nachzuweisen, deren Periodendauer nur 0,025 sec. betrugen. Damit ist gezeigt, daß man selbst bei den „Feinregistrierungen" noch lange nicht an den letzten „Elementen" der erdmagnetischen Störungen angelangt war, wie vermutet wurde (vgl.

oben S. 528), sondern daß diese bei weiterer Auflösung noch eine Fülle von feineren Einzelheiten zu offenbaren vermögen.

Angesichts so rascher Pulsationen könnte die Vermutung geäußert werden, daß man hier vielleicht eine elektromagnetische Eigenschwingung des in sich geschlossenen Leiterkreises selbst vor sich habe. Das Kabel besitzt ja eine gewisse Selbstinduktion L und eine nicht unerhebliche Kapazität C (die entsprechenden Größen für das Galvanometer sind daneben zu vernachlässigen). Nun ist bekanntlich die Schwingungsdauer eines solchen Leiterkreises:

$$\tau = \frac{2\pi \sqrt{L\,(\mathrm{cm}) \cdot C\,(\mathrm{cm})}}{3 \cdot 10^{10}}\ \mathrm{sec.}$$

Die Selbstinduktion einer Ader gegenüber allen anderen Adern und gegenüber dem Erdboden wurde für ein 2 m langes Stück rund gleich 0,00001 Henry gefunden; für eine ganze Ader beträgt sie somit 0,00105 Henry und die Induktanz des ganzen Kabels L war angenähert gleich 0,01575 Henry (Erdquadrant) oder $1{,}6 \cdot 10^7$ elektromagnetische Einheiten (cm).

Die Kapazität einer Ader gegen die anderen betrug 5,7 Mikrofarad pro km, des ganzen Kabels also rund 18 Mikrofarad oder $1{,}8 \cdot 10^{-11}$ elektromagnetische Einheiten oder $1{,}6 \cdot 10^7$ elektrostatische Einheiten (cm). Setzt man diese Werte ein, so erhält man eine Schwingungsdauer für die Eigenschwingung $\tau = 0{,}003$ sec., also eine Größe, die noch unterhalb des Schwellenwertes des Auflösungsvermögens der verwendeten Registrierung gelegen ist.

Es ist natürlich kaum daran zu denken, alle diese Einzelschwingungen fortlaufend zu registrieren; dazu würde man ja außerordentliche Längen der Registrierstreifen benötigen. Aber bereits die vorliegenden, wenn auch gerade nach dieser Seite hin noch unzureichenden Aufzeichnungen scheinen darauf hinzudeuten, daß die Periodenlängen der auftretenden Wellen nicht beliebig verteilt sind, sondern daß gewisse Periodendauern häufiger wiederkehren.

Es liegt die Frage nahe: Dürfen wir nicht gewisse Periodendauern in diesen kurzen erdmagnetischen Pulsationen schon von vornherein vermuten und nach ihnen suchen?

Bei der Erzeugung elektrischer Wellen von kleiner Länge verwendet man bekanntlich häufig, z. B. bei der Demonstration der Hertzschen Versuche nach Righi, Kugeln, welche aus dem elektrischen Gleichgewicht — etwa durch eine Funkenentladung — herausgebracht, elektrische Eigenschwingungen ausführen und dadurch zur Entstehung elektromagnetischer Wellen Veranlassung geben; die Längen dieser Eigenwellen sind von der Größenordnung des Kugelumfanges. Die Theorie solcher „Kugeloscillatoren" wurde zuerst eingehender von J. J. Thomson[1]) behandelt. Neuerdings wurde die Thomsonsche Theorie von A. Lampa[2]) für den Fall erweitert, daß die Umgebung der Kugel eine von der Einheit verschiedene Dielektrizitätskonstante besitzt.

Übereinstimmend ergibt sich, daß die Eigenschwingung einer von Luft umgebenen Kugel die Periodendauer:

$$T = \frac{4\pi a}{V\sqrt{3}}$$

hat, wie a der Kugelradius in cm, V die Lichtgeschwindigkeit $V = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. ist.

Die Erde stellt eine im Weltenraume frei schwebende, von Luft allseitig umgebene Kugel aus gutleitendem Materiale an ihrer Oberfläche dar. Denkt man sich das elektrische Gleichgewicht auf ihr durch irgend einen irdischen oder außerirdischen Prozeß gestört, so wird sie in den Gleichgewichtszustand nur durch eine Reihe von Eigenschwingungen hindurch gelangen können. Die Periode dieser Schwingungen berechnet sich nach der mitgeteilten Formel zu 0,15 oder 1/6 bis 1/7 sec.

Die Wellenlänge dieser Eigenschwingung ist in Luft gleich 46130 km, d. h. gleich dem 1,155 fachen des Erdumfanges, sie ist also nicht mit einer der in der drahtlosen Telegraphie verwendeten Wellenlängen zu verwechseln.

---

[1]) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, S. 360 ff.

[2]) A. Lampa, Wiener Sitzungsber. 111, Abt. II a, S. 37, 1903.

Es wäre verfrüht, wollte man behaupten, daß gerade eine kurzdauernde Schwingung dieser Periode in den Beobachtungen besonders häufig auftritt; um dies außer Zweifel zu setzen, müßten die Beobachtungen auf einen viel größeren Zeitraum ausgedehnt und namentlich an anderen Orten unter anderen Bedingungen und mit anderen Hilfsmitteln verifiziert werden. Sollte sich indessen die Vermutung bestätigen, so wäre sofort ein anderer Weg angedeutet, auf welchem vermutlich sich wesentliche neue Einblicke in das Wesen der erdmagnetischen Störungen eröffnen würden. Es liegt nicht außerhalb der Möglichkeit einen Schwingungskreis von 0,15 sec. Eigenschwingungsperiode herzustellen. Würde man von dem benutzten Kabel eine Länge von 9,5 km verwenden, so würde dasselbe $7,25 \cdot 10^8$ cm Selbstinduktion und etwa ebensoviele cm Kapazität besitzen; man würde dann nur noch einen kleinen Luftkondensator an irgend einer Stelle einzuschalten haben, um eine Periode von der genannten Größenordnung genau einregulieren zu können; das Saitengalvanometer würde man an der dieser Zusatzkapazität im Leiterkreise genau diametral gegenüberliegenden Stelle einschalten, so daß zwischen jedem Saitenende und dem nächsten Kondensatorbelege auf beiden Seiten die gleiche Leiterstrecke enthalten ist; die Kapazität selbst wäre geeignet einzuregulieren. Das Kabel würde, falls kreisförmig ausgelegt, einen Flächenraum von ca. 720 Hektar umfassen.

Man würde an dem Kondensator einen Schwingungsbauch der Spannung erhalten, das Saitengalvanometer wäre an dem Spannungsknoten und dem Schwingungsbauche der Strömung eingeschaltet; vermutlich wird man die Amplitude der Schwingung durch beide, Spannung und Strömung, messen können. Eine solche mit der genannten Selbstinduktion und Kapazität ausgerüstete Leiterschleife würde alsdann einen auf die elektromagnetische Grundschwingung des Erdkörpers abgestimmten Resonator darstellen. Derselbe würde vermutlich leicht „ansprechen", so oft jene regionalen erdmagnetischen Störungen einsetzen, auf deren Vorhandensein schon ältere Beobachtungen hingewiesen haben (vgl. oben S. 529). Al-

dann müssen sich an der Stelle, wo die Kapazität eingeschaltet ist, erhebliche Spannungsschwankungen einstellen; bekanntlich wächst ja die Amplitude derselben außerordentlich rasch, wenn sich die Eigenperiode des Resonators der Periode der Schwingungen, auf welche der Resonator ansprechen soll, nähert.[1]) Man brauchte alsdann also nicht mehr die einzelnen Schwingungen selbst zu registrieren, sondern nur das Anwachsen und Abnehmen der Resonatorerregung.

Derartige Versuche würden sich namentlich in höheren Breiten sehr empfehlen, in denen die „magnetische Unruhe" durchweg eine sehr große ist (vgl. oben S. 531). Hier brauchte man nur ein relativ unempfindliches Saitengalvanometer oder man könnte wahrscheinlich die an der Kapazität auftretenden Spannungsschwankungen elektrometrisch direkt messen. Vor allem wäre es gewiß außerordentlich lohnend, wenn der S. 530 erwähnte Siemenssche Versuch im hohen Norden von Nord-Amerika, in der Nähe des magnetischen Nordpoles mit einer großen Kabelschleife wiederholt werden würde, deren Eigenschwingungsperiode in bestimmter Weise abgestimmt werden könnte.

[1]) Vgl. z. B. die am einfachen quadratischen Draht-Resonator angestellten Messungen von V. Bjerknes, Ann. d. Phys. (3), 44, 74, 1891.

Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.

2. Mitteilung.

Von **J. B. Messerschmitt.**

(Eingelaufen 3. November.)

(Mit Tafel VII.)

Die magnetische Landesaufnahme konnte bereits soweit gefördert werden, daß nunmehr im rechtsrheinischen Bayern an mehr als 40 Orten alle erdmagnetischen Elemente (Deklination, Inklination und Horizontal-Intensität) neu bestimmt sind, wozu noch fast ebensoviele andere Punkte kommen, an denen infolge äußerer Umstände, insbesondere der Ungunst der Witterung, nur ein oder zwei Elemente erhalten wurden. Alle diese Messungen sind ziemlich gleichmäßig über das ganze Gebiet verteilt. Die gegenseitige Entfernung der Stationen, an welchen alle Elemente beobachtet sind, beträgt durchschnittlich etwa 40 km, entspricht also einem magnetischen Netze erster Ordnung. Man kann daher daraus bereits den allgemeinen Verlauf der magnetischen Kurven sicher ableiten und gestützt darauf die weitere Detailarbeit, nämlich die Untersuchung von gestörten Gebieten, vornehmen.

Meine ersten magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern vom Jahre 1903[1]) wurden mit einem von dem Württembergischen Statistischen Landesamt entlehnten magnetischen Theo-

---

[1]) Messerschmitt, Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern. Diese Berichte Bd. XXXV, Heft 1, S. 69—83, 1905.

doliten von L. Tesdorpf ausgeführt. Im Jahre 1904 ist dann bei derselben Firma ein neuer Reisetheodolit bestellt worden, der aber wegen Krankheit des Verfertigers erst im Juni 1905, kurz vor dem plötzlichen Ableben dieses geschickten Mechanikers zur Ablieferung gelangte.

Dieses Instrument (Nr. 2679) weist gegenüber dem älteren, zuerst verwendeten (Tesdorpf Nr. 1769) mehrfache Verbesserungen auf, die schon großenteils bei anderen Reiseapparaten, welche Tesdorpf für die Südpolarexpeditionen und für andere Institute geliefert hat, angebracht sind. Einige weitere Änderungen, welche mir nach den Erfahrungen im Jahre 1903 wünschenswert erschienen, sind an unserem Theodoliten ebenfalls berücksichtigt worden, so daß derselbe in seiner jetzigen Form sowohl recht zweckentsprechend eingerichtet, als auch bei der Arbeit sehr handlich ist. Er kann mit allem Zubehör in einem tragbaren Kasten verpackt und im Felde verhältnismäßig leicht transportiert werden.

Er besteht aus einem theodolitartigen Unterbau, dessen Horizontalkreis völlig verdeckt ist und einen Durchmesser von 12 cm hat. Der Kreis ist in 20' direkt geteilt und wird durch zwei Schätzmikroskope auf je 0'.2 abgelesen, so daß die Summe der beiden Mikroskopablesungen 0'.1 gibt. Die Teilung ist vorzüglich und kann für die vorliegenden Zwecke als fehlerfrei angenommen werden. Das Fernrohr ist am Rande des Kreises so angebracht, daß die verschiedenen Hilfsapparate zentrisch aufgesetzt werden können. Dabei zeigt die Visierachse genau nach dem Mittelpunkt des Kreises. Das Objektiv hat 20 mm freie Öffnung und 140 mm Brennweite. Das Okular vergrößert neunmal. Das Fadenkreuz besteht aus vier vertikalen und einem horizontalen Faden und wird von oben durch einen kleinen Ausschnitt im Fernrohr und durch einen darüber nach allen Seiten verstellbaren Spiegel mit Blende beleuchtet. Ein kleines gleichseitig rechtwinkliges Prisma, das hinter der Fadenplatte eingesetzt ist, dient zur Reflexion des Fadenkreuzes von dem Magnetspiegel, indem so der Magnet stets durch Autokollimation eingestellt werden kann.

Für die erste Einstellung des Instrumentes ist an dem Dreifuß eine Dosenlibelle angebracht; zur genaueren Nivellierung der Fernrohrachse dient jedoch eine Reiterlibelle, deren Teilwerte 16.3 betragen.

Zu dem Reisetheodoliten gehören zwei Deklinatorien, zwei Deflektoren, zwei Ablenkungsmagnete mit Ablenkungsschienen und einem Schwingungskasten, ein Inklinationsgehäuse mit zwei Inklinationsnadeln und zwei Streichmagneten, ein astronomischer Aufsatz, ein eisenfreies Stativ und noch einige andere kleinere Hilfsmittel. Sämtliche Teile des Instrumentes sind eisenfrei. Zum Schutze gegen Sonne und Regen dient ein großer eisenfreier Schirm.

Das eine Deklinatorium mit Fadensuspension besitzt zwei Röhrenmagnete von 35 mm Länge, 12 mm äußerem Durchmesser und 20 g Gewicht. Bei dem anderen schwingt die Magnetnadel auf der Pinne. Dieser Magnet besteht aus vier übereinander getrennt gelagerten Stahllamellen, welche an dem einen Ende einen kleinen Spiegel tragen, in dem sich das im Fernrohr befindliche Fadenkreuz spiegelt. Der Magnet hat ein fein geschliffenes Doppelhütchen aus Saphir in einer Metallhülse, welche sich in einem zweiten Zylinder auf- und abbewegen kann. Es kann also die Kollimation durch Umlegen des Magneten eliminiert werden. Um dies zu ermöglichen wird die Pinne versenkt, worauf der Magnet durch zwei Zungenarme gefaßt und mit dem sie tragenden Rahmen im Deklinationsgehäuse um 180° gedreht wird. Im Felde wird nur dieses Magnetsystem bei den Beobachtungen verwendet.

Bei den Deklinationsbestimmungen habe ich gewöhnlich das Azimut einer Mire durch astronomische Messungen bestimmt. Ist die Sonne nicht zu hoch über dem Horizont, so kann das mit dem Untersatz fest verbundene Fernrohr direkt zu den Einstellungen der Sonne benutzt werden. Bei größeren Höhen muß entweder der Sonnenspiegel oder noch besser der astronomische Aufsatz verwendet werden. Dieser besitzt einen Höhenkreis von 10 cm Teilungsdurchmesser. Der Kreis ist in

halbe Grade geteilt und kann durch zwei Nonien auf 1' abgelesen werden. Das Fernrohr hat ein Objektiv von 20 mm Öffnung. Die Okularvergrößerung ist 18 fach; außerdem ist für Zenitbeobachtungen ein Prismenokular beigegeben. Die Sonnengläser können auf die Okularblenden beider Fernrohre aufgesteckt werden. Eine Nivellierlibelle (14" Teilwert), eine Stützlibelle (24" Teilwert), eine Alhidadenlibelle am Höhenkreis (31") und eine Aufsatzlibelle (27") vervollständigen den astronomischen Aufsatz. Für die Fadenbeleuchtung bei Nacht wird entweder ein Ring vor das Objektiv gesteckt oder es kann durch die durchbohrte Fernrohrachse Licht auf einen zentrisch einzuschraubenden Metallspiegel von 1,5 mm Durchmesser mit 0,5 mm starkem Schaft geworfen werden. Durch Drehung dieses kleinen Spiegels läßt sich die Beleuchtung im Okular bequem verändern.

Bei den Azimutmessungen wurde das bereits früher (l. c., S. 74) angewandte Verfahren eingehalten, das sich gut bewährt hat. Es wurde daher der Stand des Taschenchronometer Kittel (Nr. 230) mit Halbsekundenschlag im Felde so oft als möglich mit Hilfe der täglichen telegraphischen Zeitsignale der Post- und Telegraphenämter ermittelt. Die Uhr hat auch im Jahre 1905 ihren vorzüglichen Gang beibehalten, so daß man stets der Zeit auf ± 0ˢ.25 sicher sein konnte, eine Genauigkeit, die für die Azimutmessungen zu Deklinationsbestimmungen völlig ausreicht.

Die Richtung des astronomischen Meridians wurde aus Sonnenbeobachtungen ermittelt, indem jeweilen der rechte und linke Sonnenrand eingestellt wurde. Um allfällige Irrtümer beim Beobachten leichter erkennen zu können, sind die einzelnen Einstellungen gesondert berechnet worden und zwar nach der Formel:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cdot \cos M}{\sin (\varphi - M)},$$

wenn $\operatorname{tg} M = \cos t \cdot \operatorname{tg} \delta$ ist.

Die Beobachtungen mit dem astronomischen Aufsatz sind bequemer, als mit dem am Untersatz befindlichen Fernrohr.

insbesondere wegen der stärkeren Vergrößerung und der Verwendung eines Okularprismas. Die Genauigkeit ist jedoch in beiden Fällen nahe gleich, wie sich aus direkten Versuchen ergab, indem bei den Azimutmessungen an mehreren Stationen sowohl der astronomische Aufsatz, als auch das feste Fernrohr mit und ohne Sonnenspiegel (schwarzem Glasspiegel) verwendet wurde. Aus der inneren Übereinstimmung eines Satzes von acht Einstellungen folgt der mittlere Fehler eines Azimutes zu ± 0,'15; um etwa den gleichen Betrag weichen die mit den verschiedenen Fernrohren erhaltenen Azimute voneinander ab.

Die Einstellungen der Magnetnadel durch Autokollimation können auf ± 0,'3 sicher geschehen, so daß man unter Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Fehlerquellen annehmen darf, daß die vorliegenden Deklinationsbestimmungen auf mindestens 1' genau sind.

Zur Bestimmung der Horizontalintensität dienen zwei Ablenkungsmagnete und zwei Deflektoren. Im Felde wurde dieses Element fast ausschließlich aus Ablenkungsbeobachtungen berechnet. Die Temperaturkoeffizienten der vier Magnete sind aus zwei größeren Reihen im Oktober und November 1905 am erdmagnetischen Observatorium in München ermittelt worden. Hiebei lagen die Temperaturen zwischen 0° und 33° C. Die Temperaturkoeffizienten sind für 1° C.

für den Ablenkungsmagneten	Nr. I (23):	25,7 γ
„ „ „	Nr. II (35):	26,1 γ
„ „ Deflektor 1:		27,3 γ
„ „ „ 2:		26,0 γ.

Die Änderung erfolgt innerhalb des Messungsbereiches genau linear.

Da die Magnete offenbar noch ziemlich jung waren, nahm ihr Moment in der ersten Zeit noch merklich ab. Besser hielt sich das Moment der beiden Deflektoren. Der log c des Ablenkungsmagneten Nr. I zeigte vom 30. August auf den 1. September einen plötzlichen Sprung (von 9,11820 auf 9,11100), dessen Ursache nicht aufgeklärt werden konnte. Da übrigens

während der Zeit der Feldbeobachtungen von Juli bis Oktober fünf Vergleichsreihen in München stattfanden, konnten die angegebenen Änderungen der magnetischen Momente sicher berücksichtigt werden.

Aus der inneren Übereinstimmung der Ablenkungsresultate der vier Magnete ergibt sich eine mittlere Genauigkeit der Horizontalintensität von $\pm 7\,\gamma$ für eine Station. Unter Zurechnung der Unsicherheit der Reduktion auf die Epoche kann die Genauigkeit der vorliegenden Messungen auf $\pm 10\,\gamma$ angenommen werden.

Die Ablenkungs- und die Deklinationsmagnete werden in zylindrischen auseinanderschraubbaren Schutzhülsen von weichem Eisen von 2 mm Stärke mit Holzeinlagen aufbewahrt. Ebenso ist im Transportkasten ein eisernes Kästchen angebracht, in welches die Deflektoren gebettet sind, so daß also dadurch die Magnete vor schädlichen Einwirkungen elektrischer Ströme möglichst geschützt sind. Außerdem ist in München das Instrument niemals durch die Stadt befördert worden, um es von dem Einflusse der elektrischen Ströme des Trambahnnetzes möglichst entfernt zu halten. Ebenso wurden im Felde die Starkstromleitungen nach Kräften gemieden, was freilich bei der großen Verbreitung der elektrischen Anlagen nie ganz möglich ist. Die geringen und überdies ziemlich gleichmäßigen Änderungen der Magnete, insbesondere der Deflektoren, zeigen übrigens, daß die angewandten Schutzhülsen völlig ihren Zweck erfüllen, so daß man auch deshalb beim Transport durchaus nicht so ängstlich wegen der Annäherung an Starkstromleitungen zu sein braucht. Etwas anderes ist es natürlich bei den Messungen selbst. Hiebei darf man sich niemals mehr als 100 Meter dem betreffenden Stromkreise nähern, um keine konstanten Ablenkungen zu erleiden. In unserem Falle konnte ich stets über einen Kilometer von elektrischen Anlagen entfernt bleiben.

Die Inklination wird mit einem Nadelinklinatorium mit zwei Nadeln bestimmt, dessen Gehäuse sich zentrisch auf den Theodolituntersatz befestigen läßt. Der Kreis des Inklinatoriums

hat 12 cm Durchmesser und ist in 20′ geteilt; es können also noch 2′ abgeschätzt werden. Die Summe der Ablesungen an beiden Nadelenden gibt also direkt Bogenminuten. Die Inklinationsnadeln von 11,5 cm Länge ruhen mit ihren 25 mm langen gehärteten Stahlachsen, die an den Enden Zapfen von 0,4 mm Durchmesser haben, auf plangeschliffenen Karneolschneiden. Ihr Gewicht beträgt 5 Gramm. An der Rückseite des Magnaliumgehäuses ist eine Arretierungsvorrichtung angebracht, mit welcher die Hebung und Senkung der Achsen der Nadeln auf und von der Schneide ab sicher und langsam erfolgt.

Die Genauigkeit der Inklinationsmessungen kann auf ± 1′ angenommen werden. Dabei sind bei den Messungen jedesmal die Nadeln sowohl in beiden Lagen beobachtet, als auch jeweilen ummagnetisiert worden. Der Unterschied zwischen den beiden Nadeln beträgt — 2′,5; ihr Mittel entspricht dem in München verwendeten System.

Die Beobachtungen im Feld sind nach den Registrierungen in München auf den Anfang des Jahres 1905 reduziert. Bei den Inklinationen sind aber noch die Angaben des Potsdamer Observatoriums beigezogen worden, da die Variationen der Vertikalintensität durch den Einfluß des elektrischen Trambahnbetriebs in München nicht genügend sicher erhalten werden. Die betreffenden Angaben verdanke ich der gütigen Mitteilung des Vorstandes jenes Observatoriums, Herrn Prof. Ad. Schmidt.

Die magnetischen Elemente in München, gültig für den Anfang des Jahres, sind aus den Mittelwerten der Monate Dezember des vorhergehenden Jahres und dem Januar des folgenden Jahres abgeleitet worden. Sie sind in der nachfolgenden Tabelle I zusammengestellt.

Aus den direkt beobachteten Werten der Deklination (D), der Horizontalintensität (H) und der Inklination (J) sind die rechtwinkligen Komponenten

Tabelle I.

N. Br. 48° 8'.8. Länge 11° 36'.5 ö. v. Greenw. Höhe = 530 m.

München	D	H	J	X	Y	Z	F
1899.0	10° 36'.8 W	0.20 572	63° 23'.2	0.20 220	−0.03 789	0.41 056	0.45 922
1900.0	30.2	595	20.0	250	780	41 011	890
1901.0	25.8	629	18.1	288	735	41 019	914
1902.0	21.2	643	15.1	307	710	40 957	865
1903.0	16.9	652	11.8	320	686	40 878	798
1904.0	10.1	643	10.9	319	644	40 834	755
1905.0	7.3	653	10.5	331	630	40 841	767
1906.0	2.0	651	10.3	335	598	40 832	757
1850.0	15° 53.9	0.19 523	64° 59.5	0.18 776	−0.05 348	0.42 826	0.46 181
Theorie 1885.0	11° 20.5	0.20 096	64° 5.7	0.19 704	−0.03 952	0.41 380	0.46 001

Nordkomponente: $X = H \cdot \cos D$
Westkomponente: $Y = H \cdot \sin D$
Vertikalkomponente: $Z = H \cdot \operatorname{tg} J$

abgeleitet worden, woraus dann die Totalintensität:

$$F \quad H \cdot \sec J = Z \cdot \operatorname{cosec} J$$

folgt.

Zum Vergleich sind noch die von Lamont für 1850.0, der Epoche seiner magnetischen Ortsbestimmungen, bestimmten Werte angeführt. (Lamont, „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern", Band I, Seite 24 und 135, München 1854.) Aus der Differenz der Werte für 1900 und 1850 folgt die mittlere jährliche Variation der magnetischen Elemente in München innerhalb des letzten halben Jahrhunderts für:

D: 6'.47
H: + 21.44 γ
J: − 1'.99
X: + 29.48 γ
Y: + 31.36 γ
Z: 36.30 γ
F: − 5.82 γ.

Vergleicht man damit die seit der Einrichtung des neuen Observatoriums direkt beobachteten Variationen, so erhält man im Mittel von 1899 bis 1906:

$$\begin{aligned} D&: -\ 4'.97 \\ H&: +\ 11.3\ \gamma \\ J&: -\ 1.8 \\ X&: +\ 16.4\ \gamma \\ Y&: +\ 27.3\ \gamma \\ Z&: -\ 32.0\ \gamma \\ F&: -\ 23.6\ \gamma, \end{aligned}$$

also beträchtlich kleinere Werte. Im einzelnen sind die Unterschiede nach der obigen Zusammenstellung in Tabelle I noch beträchtlicher.

In Deklination ist die jährliche Abnahme der westlichen Deklination im mittleren Europa jetzt nur noch 4′ bis 5′ gegen 6′.5 früher; die Zunahme der Horizontalintensität beträgt nur 11 γ gegen 21 γ. Noch auffälliger ist die Änderung in den einzelnen Jahren, insbesondere bei der Horizontalintensität und bei der Inklination, welch beide Elemente in den letzten Jahren fast konstant geblieben sind, wie die nachstehende Zusammenstellung ergibt:

Jahr	Var. D	Var. H	Var. J
1899—1900	— 6.6	+ 23 γ	— 3′.2
1900—1901	— 4.4	+ 34 γ	— 1.9
1901—1902	— 4.6	+ 14 γ	— 3.0
1902—1903	— 4.3	+ 9 γ	— 3.3
1903—1904	— 6.8	— 9 γ	— 0.9
1904—1905	— 2.8	+ 10 γ	— 0.4
1905—1906	— 5.3	— 2 γ	— 0.2

Dementsprechend sind auch die Variationen der Komponenten und der Totalkraft gegen den Durchschnitt des letzten halben Jahrhunderts stark geändert. Es rühren diese Unterschiede teils von der jetzt herrschenden stärkeren magnetischen

Unruhe her, teils aber sind sie auch säkularer Natur. Auch die anderen benachbarten Observatorien zeigen den nämlichen Charakter in den Variationen, wie man aus den für die Jahresmitte gültigen Angaben von Potdam und Pola erkennen kann.

Potsdam. Breite 52° 22.'9. Länge 13° 3.'9 ö. v. G. Höhe 86 m.

Jahr	D		H		J		X	−Y	Z	F
1899	9° 60.'7		0.18 818		66° 25.'8		0.18 531	0.03 271	0.43 133	0.47 059
		−4.4		+26		−0.4				
1900	56.3		844		26.2		561	252	206	137
		−4.2		+27		−3.4				
1901	52.1		861		22.8		582	233	128	074
		−4.1		+12		−2.0				
1902	48.0		873		20.8		598	212	090	042
		−4.2		+ 3		−0.8				
1903	43.8		876		20.0		605	190	068	022
		−4.4		+ 4		−0.4				
1904	39.4		880		19.6		612	167	065	021

Pola. Breite 44° 52.'1. Länge 13° 50.8 ö. v. G. Höhe 33 m.

Jahr	D		H		J		X	−Y	Z	F
1899	9° 29.'9		0.22 168		60° —		0.21 836	0.03 626	—	—
		−3.6		+34						
1900	25.3		202		15.9		902	634	0.38 871	0.44 765
		−5.2		+28		−2.7				
1901	20.1		230		13.2		936	606	848	[illegible]
		5.0		+ 3		2.6				
1902	15.1		233		10.6		948	575	784	7[illegible]
		4.4		[illegible]		0.7				
1903	10.7		225		9.9		941	545	753	[illegible]
		4.7		[illegible] 6		2.0				
1904	6.0		221		7.9		951	516	709	[illegible]

Für die Deklinationsänderungen in Deutschland kann man auch die Messungen der magnetischen Observatorien von Bergwerken beiziehen. So wird dieses Element in Bochum am Observatorium der Westfälischen Bergwerkschaftskasse (Vorstand Markscheider Lenz)[1]) und in Hermsdorf bei Waldenburg (Reg.-Bez. Breslau) am magnetischen Observatorium der Niederschlesischen Steinkohlen-Bergbau-Hilfskasse (Vorstand Markscheider Fleischer) aus Registrierungen abgeleitet. Letztere Werte verdanke ich der gefälligen direkten Mitteilung des Herrn Fleischer. Hieran sollen noch die aus dreimal täglichen Beob-

[1]) Die jährlichen Beobachtungen sind in der Zeitschrift „Glückauf" veröffentlicht.

achtungen abgeleitete Deklination von Prag angeschlossen werden, da dieser Ort die München am nächsten gelegene magnetische Station ist. Die Lage der drei magnetischen Warten ist:

Bochum: Breite 51° 29′ 28″.2. Länge 7° 13′ 52″.5 ö. v. G. 115 m Meereshöhe.

Hermsdorf: Breite 50° 45′ 38″.5. Länge 16° 13′ 55″.5 ö. v. G. 515 m Meereshöhe.

Prag: Breite 50° 5′ 18″.5. Länge 14° 25′ 21″.5 ö. v. G. 202 m Meereshöhe.

Die Deklination, gültig für die Jahresmitte, und ihre Variation beträgt:

Jahr	Bochum		Hermsdorf		Prag	
1901	12° 42′.8 W	−3′.4	8° 13′.6 W	−4′.7	9° 1′.7	−4′.1
1902	39.4	−3.7	8.9	−4.9	8 57.6	−4.0
1903	35.7	−4.3	4.0	−4.7	53.6	−4.9
1904	31.4	−4.2	7 59.3	−4.3	48.7	−5.4
1905	27.2		55.0		43.3	

Die Ergebnisse der Beobachtungen des Jahres 1905 zur magnetischen Landesaufnahme sind in der Tabelle II zusammengestellt. Sie enthält zunächst die geographischen Koordinaten und Meereshöhen der Beobachtungspunkte. Diese sind den Karten des topographischen Atlasses von Bayern (Maßstab 1 : 50000) entnommen worden. Das betreffende Blatt ist in der letzten Kolumne angeführt. Die Längen sind in den Karten von der alten Sternwarte in München aus gezählt. Zur Umwandlung in Längen östlich von Greenwich ist die Länge des Nullpunktes zu 11° 36′ 12″ angenommen worden. Die neue im Jahre 1816 von Soldner erbaute Sternwarte liegt 20″ östlicher und 1′ 12″ nördlicher als die alte Sternwarte,[1]) deren Ort also jetzt auf dem Terrain des Ostbahnhofes zu suchen ist. Was nun die Genauigkeit anbelangt, mit der man die Lage des

[1]) Geogr. Breite also 48° 7′ 33″ vgl. K. Theu, Die Bayerischen Kartenwerke in ihren mathematischen Grundlagen. München 1905.

Nr.	Ort	Breite	Länge	Meereshöhe	*D*	*H*
1	Nesselwang	47° 37′ 29″	10° 30′ 28″	880 m	—	0.20 733
2	Kochel	47 39 37	11 21 54	602	10° 14.2 W	0.20 750
3	Waltenhofen	47 39 55	10 18 31	730	11 56.6	0.20 698
4	Penzberg	47 44 47	11 22 24	600	10 12.5	0.20 717
5	Memmingen	47 47 16	10 10 30	600	11 20.5	0.20 520
6	Grafing	48 2 36	11 56 25	550	—	0.20 600
7	München	48 8 47	11 36 32	530	10 7.3	0.20 653
8	Haspelmoor	48 13 29	11 6 14	543	—	0.20 510
9	Walpertskirchen	48 15 55	11 58 32	490	10 4.2	0.20 512
10	Senden	48 19 28	10 3 24	490	—	0.20 398
11	Neufahrn b. Freis.	48 19 33	11 39 41	460	—	0.20 527
12	Günzburg	48 27 42	10 17 31	460	—	0.20 358
13	Pfaffenhofen a. I.	48 32 2	11 31 58	450	10 20.1	0.20 421
14	Altdorf (Landshut)	48 33 37	12 7 33	410	9 58.0	0.20 413
15	Straubing	48 52 19	12 34 24	330	9 44.6	0.20 272
16	Wasserzell	48 52 34	11 9 25	390	—	0.20 254
17	Pfünz	48 53 15	11 15 52	390	10 30.1	0.20 229
18	Solnhofen	48 53 28	10 59 53	450	10 32.7	0.20 213
19	Dinkelsbühl	49 4 18	10 20 36	450	10 45.4	0.20 076
20	Cham	49 13 27	12 39 43	380	—	0.20 070
21	Neumarkt i. O.	49 16 16	11 28 29	440	10 21.9	0.20 066
22	Ansbach	49 18 35	10 34 43	450	10 43.8	0.20 023
23	Schwabach	49 19 25	11 1 42	340	10 33.2	0.20 050
24	[illegible]	49 19 31	12 6 7	[illegible]	9 57.1	0.20 [illegible]
25	[illegible]	49 29 37	10 55 41	315		[illegible]
26	[illegible]	[illegible] 32 50	10 13 27	[illegible]	10 [illegible]	[illegible]
27	[illegible]	49 34 47	10 35 18	290		[illegible]
28	[illegible]	[illegible] 16	9 12 13	[illegible]	11 [illegible]	[illegible]
29	[illegible]	[illegible] 26	12 10 [illegible]	[illegible]	10 [illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible] 12	11 3 52	270	10 [illegible]	[illegible]
31	[illegible]	[illegible]	10 9 5	210	11 5.3	[illegible]
32	[illegible]	49 46 25	9 57 30	250	11 2.5	[illegible]
33	[illegible]	49 56 59	11 37 9	360		[illegible]
34	[illegible]	49 58 27	9 [illegible]	200	11 29.4	[illegible]
35	[illegible]	50 0 [illegible]	9 34 37	200	10 58.9	[illegible]
36	[illegible]	50 2 [illegible]	10 12 36	220	10 58.2	[illegible]
37	[illegible]	50 1 [illegible]	12 0 1	[illegible]	10 [illegible]	[illegible]
38	[illegible]	50 2 [illegible]	12 0 [illegible]	600	10 [illegible]	[illegible]
39	[illegible]	50 [illegible] 34	11 4 5	[illegible]	10 [illegible]	[illegible]
40	[illegible]	50 [illegible] 21	11 [illegible] 26	[illegible]	10 7.3	[illegible]
41	[illegible]	50 21	10 15	[illegible]	10 57.5	[illegible]
42	[illegible]	50 17	10 [illegible]		10 [illegible]	[illegible]

[illegible] 48 23 50 N.B. [illegible] G

[illegible] 48 51 50 N.B. [illegible] G

[illegible] 49 27 52 N.B. 11° [illegible] G

Tabelle II.

J	X	Y	Z	F	Lamont	Top. Atlas
—	—	—	—	—	—	89 W
62° 52.1	0.20 420	— 0.03 688	0.40 494	0.45 501	I 111	91 W
62 52.4	0.20 250	0.04 283	0.40 402	0.45 396	—	89 W
—	0.20 389	0.03 672	—	—	—	91 W
63 16.4	0.20 119	0.04 035	0.40 752	0.45 625	I 129	80
63 13.3	—	—	0.40 820	0.45 723	—	78 W
63 10.5	0.20 331	0.03 630	0.40 841	0.45 767	I 135	77 O
63 25.2	—	—	0.40 993	0.45 838	—	76 O
—	0.20 196	0.03 587	—	—	—	71 W
63 28.6	—	—	0.41 810	0.46 727	—	67
63 32.6[1])	—	—	0.41 247	0.46 072	I 79	70 O
63 38.7	—	—	0.41 075	0.45 843	I 88	60 W
63 34.6	0.20 090	0.03 658	0.41 096	0.45 890	I 151	62 W
63 33.0[2])	0.20 103	0.03 533	0.41 014	0.45 811	I 114 II 94	63 W
63 47.1	0.19 979	0.03 431	0.41 170	0.45 881	I 177 II 168	56 W
63 50.6	—	—	0.41 241	0.45 946	—	53 O
63 53.8	0.19 438	0.03 687	0.41 287	0.45 976	—	53 O
63 54.8	0.19 420	0.03 699	0.41 285	0.45 968	—	53 W
64 8.7	0.19 723	0.03 742	0.41 428	0.46 036	II 50	45 W
—	—	—	—	—	I 68 II 43	43 W
64 7.5	0.19 739	0.03 610	0.41 372	0.45 982	I 137 II 117	41 W
64 16.9	0.19 674	0.03 795	0.40 625	0.46 142	I 46	39 O
64 11.2	0.19 710	0.03 672	0.40 506	0.46 013	II 157	40 W
64 3.6	0.19 795	0.03 531	0.41 337	0.45 961	I 169	42 W
64 20.1[3])	—	—	0.41 492	0.46 021	—	34 W
64 26.8	0.19 517	0.03 787	0.41 582	0.46 089	I 183 II 174	33 W
64 31.0	—	—	0.41 827	0.46 316	—	33 O
64 53.3	0.19 277	0.03 935	0.41 980	0.46 362	—	25 W
64 33.6	0.19 665	0.03 498	0.41 988	0.46 497	II 120	30 O
64 23.7	0.19 532	0.03 626	0.41 455	0.45 961	II 58	28 O
64 38.6	0.19 445	0.03 811	0.41 814	0.46 271	—	26 O
64 40.8[4])	0.19 418	0.03 789	0.41 829	0.46 272	I 196 II 183	26 O
64 43.9	—	—	0.41 909	0.46 343	I 57 II 34	21 W
64 58.0[5])	0.19 177	0.03 906	0.41 968	0.46 307	I 49	17 W
64 51.5	0.19 265	0.03 738	0.41 908	0.46 276	—	17 O
64 53.0	0.19 299	0.03 741	0.41 934	0.46 313	—	12 W
64 50.0	0.19 477	0.03 450	0.42 077	0.46 491	II 185	15 W
64 38.6	0.19 598	0.03 503	0.42 009	0.46 487	—	22 W
64 55.2[6])	0.19 310	0.03 640	0.41 951	0.46 324	I 121	13 O
64 55.1	0.19 422	0.03 467	0.42 152	0.46 540	—	8
65 22.5	0.19 266	0.03 730	0.42 813	0.47 097	I 120	5 W
64 57.5	0.19 286	0.03 618	0.42 015	0.46 376	—	—

[4]) Beobachtungsort der Inklination 49° 47' 4" N. B. 9° 56' 15" ö. v. G. (Käppele). [5]) Im Jahre 1904 wurde in 49° 58' 22" N. B. 9° 8' 16" ö. v. G. 110 m Höhe J (1905,0) = 65° 0.'6 gefunden. [6]) Im Jahre 1904 wurde in 50° 8' 40" N. B. 11° 3' 47" ö. v. G. 265 m Höhe J (1905.0) = 64° 54,9 gefunden.

jeweiligen Beobachtungspunktes in die Karten eintragen kann, so möge folgende Betrachtung dienen. In Bayern entspricht 1'' Breitendifferenz 30.9 m Länge, während für 1'' Längendifferenz die Werte zwischen 20.9 m (bei 47½° Breite) und 19.7 m (in 50½° Breite) liegen, d. h. es entspricht auf den topographischen Karten 1'' gleich 0.6 mm in Breite und 0.4 mm in Länge. Die Eintragung des Beobachtungsortes in die Karten geschah meist im Felde selbst, überdies wurde von jeder Station ein kleiner Situationsplan angefertigt, wobei die Station möglichst auf benachbarte größere Objekte bezogen wurde. Man darf daher annehmen, daß die so abgeleiteten Koordinaten unter Berücksichtigung aller Fehlerquellen, wie Verzeichnung durch die Projektion, Schwinden des Papiers u. dgl. auf 2'' genau sind, was für magnetische Zwecke vollauf genügt, da ja die normale Änderung der magnetischen Elemente innerhalb eines Umkreises von einem Kilometer kleiner als die angestrebte Genauigkeit ist. Es ist daher das spätere Wiederauffinden der magnetischen Stationen auch ohne Zuhülfenahme der angefertigten Croquis mit Hülfe der topographischen Karten jederzeit auf wenige Meter möglich.

Die vorletzte Kolumne der Tabelle II gibt für diejenigen Punkte, an welchen bereits früher Lamont beobachtet hat, den Band und die Seitenzahl von Lamonts Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern. Die übrigen Spalten enthalten gemäß ihren Überschriften die verschiedenen bestimmten magnetischen Elemente.

In der Tabelle sind noch die Punkte Neustadt a. S. und Koburg nach den Beobachtungen von Prof. Edler aufgenommen, welche er 1903 im Auftrage des magnetischen Observatoriums in Potsdam ausführte.[1]) Gleichzeitig mit diesem Herrn habe ich im gleichen Jahre in Königsberg i. F. beobachtet, wobei die gegenseitige Entfernung der beiden Instrumente etwa 100 m betrug. Auf 1901.0 bezogen erhielten wir:

---

[1]) Die Station Schwandorf ist aus der ersten Mitteilung wiederholt, weil dort die Werte durch Druckfehler entstellt sind.

	D	H	J
Edler (Theodolit Hechelmann)	11° 2'	0.19630 Γ	65° 2'
Messerschmitt (Theodolit Tesdorpf)	11° 4'	0.19619 Γ	65 0
Unterschied:	— 2'	+ 11 γ	+ 2'

Die Reduktion der beiderseitigen Messungen fand völlig unabhängig von einander statt; auch benutzte Prof. Edler die Variationen der Registrierungen von Potsdam, während ich die von München verwendete. Es war dies übrigens die erste Station, welche ich mit dem Württemberger Instrumente besuchte. Die Differenz der beiderseitigen Messungen liegt noch innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, es dürfen daher die Messungen in Bayern und Preußen wohl aufeinander bezogen werden. Zur größeren Sicherheit soll aber noch eine direkte Vergleichung des neuen Reiseinstrumentes mit den Potsdamer Instrumenten später vorgenommen werden.

Bildet man die Unterschiede der auf den Stationen erhaltenen Beobachtungen gegen die Basisstation München, so erhält man die Werte der Tabelle III, worin die Differenzen der Deklination (ΔD), der Horizontalintensität (ΔH) und der Inklination (ΔJ) im Sinne „Feldbeobachtung minus münchner Beobachtung“ genommen sind. Zum Vergleich sind die von Lamont für 1850 gefundenen Unterschiede beigefügt, welche seinen „Magnetischen Ortsbestimmungen in Bayern“ München 1854 und 1856, entnommen sind. Überdies ist jeweilen die Differenz der beiden Resultate in der dritten Kolumne eingetragen. Dabei ist freilich zu berücksichtigen, daß die Beobachtungsorte nicht immer identisch sind, da eben häufig die alten Orte wegen den seither eingetretenen örtlichen Änderungen nicht mehr benutzt werden können. Im allgemeinen ist aber auch die Entfernung der gleichnamigen Punkte nicht sehr groß, so daß unter normalen Verhältnissen eine Vergleichung unbedenklich gestattet ist. In Störungsgebieten freilich gilt dies nicht mehr. Da übrigens Lamont bei seinen Stationen die genauen Soldnerschen Koordinaten angegeben hat, lassen sie sich da mit Hülfe der Katasterpläne bis auf wenige Zentimeter genau wieder auffinden.

Nr.	Ort	ΔD			ΔH			
		1905	1850	Diff.	1905	1850	Diff.	Diff. + 90
1	Nesselwang	—	[+27]	—	+ 80	[+115]	[— 35]	+ 55
2	Kochel	+ 6.9	+ 3.0	+ 3.9	+ 97	+184	— 87	+ 3
3	Waltenhofen	+37.4	[+35]	[+ 2]	+ 45	[+ 90]	[— 45]	+ 45
4	Penzberg	+ 5.2	[+ 5]	[0]	+ 64	[+120]	[— 56]	+ 34
5	Memmingen	+53.0	+40.6	+12.4	— 133	— 23	—110	— 20
6	Grafing	—	[—12]	—	— 58	[+ 60]	[—113]	— 23
7	München	—	—	—	—	—	—	—
8	Haspelmoor	—	[+14]	—	— 143	[— 70]	[— 73]	+ 17
9	Walpertskirchen	— 3.1	[— 9]	[+ 6]	— 141	[— 10]	[—131]	— 41
10	Senden	—	[+15]	—	— 255	[—170]	[— 85]	+ 5
11	Neufahrn b. Freis.	—	[0]	—	— 126	[— 90]	— 36	+ 54
12	Günzburg	—	+38.2	—	— 295	—212	— 83	+ 7
13	Pfaffenhofen a. I.	+12.8	+ 7.4	+ 5.4	— 232	—180	— 52	+ 38
14	Altdorf (Landshut)	— 9.3	[—11]	[+ 2]	— 240	—135	—105	— 15
15	Straubing	—22.7	—23.5	+ 0.8	— 373	—245	—128	— 38
16	Wasserzell	—	[+18]	—	— 399	[—350]	[— 49]	+ 41
17	Pfünz	+22.8	[+14]	[+ 9]	— 424	[—345]	[— 79]	+ 11
18	Solnhofen	+25.4	[+22]	[+ 3]	— 440	[—360]	[— 80]	+ 10
19	Dinkelsbühl	+38.1	+43.9	— 5.8	— 577	—488	— 89	+ 1
20	Cham	—	—23.2	—	— 579	—378	—201	—110
21	Neumarkt i. O.	+11.6	+12.2	+ 2.1	587	460	—127	37
22	Ansbach	36.5	+40	3	630	550	80	1
23	Schwabach	25.9	26.4	0.5	603	521	82	8
24	Schwandorf	10.2	6.2	4.0	544	451	93	[illegible]
25	Burgfarnbach		+70		705	570	135	45
26	Uffenheim	+51	52.3	0.8	772	665	107	17
27	Neustadt a. Aisch		+39		712	615	97	7
28	[illegible]	85.0	+86	1	978	890	88	2
29	Neustadt a. W.	2.1	2.4	+ 0.3	680	572	108	18
30	Forchheim	+23.7	28.8	5.1	787	678	109	19
31	Kitzingen	+58.0	+59	1	837	760	77	13
32	Würzburg	55.2	60.6	5.4	869	805	64	26
33	Bayreuth		+23.7		871	749	122	32
34	Aschaffenburg	+82.6	+94.7	12.1	1083	973	110	20
35	Lohr	+51.6	78	26	1029	930	99	9
36	Oberndorf	+50.9	56.9	6.9	999	880	119	29
37	Wunsiedel	4.3	0.7	3.6	883	787	96	6
38	[illegible]	0.7	1	2	831	780	51	39
39	Lichtenfels	+33.5	+35.9	2.4	1003	860	143	53
40	Hof	2	6	8	924	920	4	86
41	Neustadt a. S.	50.2	59.1	8.9	1029	961	68	21
42	Koburg	31.2	35	4	1029	902	127	37

Tabelle III.

ΔJ				1905			
1905	1850	Diff.	Diff. − 7,5	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔF
—	[— 14]	—	—	—	—	—	—
— 18.4	— 18.4	+ 0.0	— 7	+ 89	+ 58	— 347	— 266
— 18.1	[— 6]	[— 12]	— 19	— 81	+ 653	— 439	— 371
—	[— 18]	—	—	+ 58	+ 42	—	—
+ 5.9	+ 3.2	+ 2.7	— 5	— 212	+ 405	— 89	— 142
+ 2.8	[— 7]	[+ 10]	+ 3	—	—	— 19	— 44
—	—	—	—	—	—	—	—
+ 14.7	[+ 7]	[+ 8]	0	—	—	+ 152	+ 61
—	[0]	—	—	— 135	— 43	—	—
+ 18.1	[+ 20]	[— 2]	— 9	—	—	+ 969	+ 960
+ 22.1	+ 9.3	+ 12.8	+ 5	—	—	+ 406	+ 305
+ 28.2	+ 23.6	+ 4.6	— 3	—	—	+ 234	+ 76
+ 24.1	+ 19.2	+ 4.9	— 3	— 241	+ 28	+ 255	+ 123
+ 22.5	+ 12.6	+ 9.9	+ 2	— 228	— 97	+ 173	+ 44
+ 36.6	+ 23.2	+ 13.4	+ 6	— 352	— 200	+ 329	+ 114
+ 40.1	[+ 36]	[+ 4]	— 4	—	—	+ 400	+ 179
+ 43.3	[+ 36]	[+ 7]	0	— 893	+ 57	+ 446	+ 209
+ 44.3	[+ 36]	[+ 8]	+ 1	— 911	+ 69	+ 444	+ 201
+ 58.2	+ 48.4	+ 9.8	+ 2	— 608	+ 112	+ 587	+ 269
—	+ 40.0	—	—	—	—	—	—
+ 57.0	+ 51.0	[+ 6]	— 1	— 592	— 20	+ 531	+ 215
+ 66.4	+ 60.2	[+ 6]	— 1	— 691	+ 269	— 216	+ 375
+ 60.7	+ 55.9	+ 4.8	— 3	— 621	+ 42	— 335	+ 275
+ 53.1	+ 46.3	+ 6.8	— 1	— 525	+ 155	+ 496	+ 194
+ 69.6	[+ 60]	[+ 10]	+ 3	—	—	+ 651	+ 254
+ 76.3	+ 66.5	[+ 10]	+ 2	— 814	+ 157	+ 741	+ 322
+ 83.5	[+ 59]	[+ 24]	+ 6	—	—	+ 986	+ 549
+ 102.8	[+ 131]	[— 28]	— 35	— 1054	+ 305	+ 1139	+ 595
+ 83.1	+ 66.2	+ 16.9	+ 9	— 666	— 132	+ 1147	+ 730
+ 73.2	[+ 70]	[+ 3]	— 5	— 799	— 4	+ 614	+ 196
+ 88.1	[+ 80]	[+ 8]	0	— 886	+ 181	+ 973	+ 504
+ 90.3	+ 81.5	+ 8.8	+ 1	— 913	+ 159	+ 988	+ 505
+ 93.4	+ 72.2	+ 21.2	+ 14	—	—	+ 1068	+ 576
+ 107.5	+ 103.9	+ 3.6	— 4	— 1154	+ 276	+ 1127	+ 540
+ 104.0	[+ 99]	[— 5]	— 12	— 1066	+ 108	+ 1067	+ 509
+ 102.5	[+ 93]	[+ 9]	+ 2	— 1032	+ 111	+ 1093	+ 546
+ 99.5	+ 87.8	+ 11.7	+ 4	— 854	— 180	+ 1236	+ 724
+ 88.1	[+ 82]	[+ 6]	— 1	— 783	— 127	+ 1168	+ 720
+ 104.7	+ 89.7	+ 15.0	+ 8	— 1021	+ 10	+ 1110	+ 557
+ 104.6	[+ 95]	[+ 10]	+ 2	— 909	— 163	+ 1311	+ 773
+ 132.0	[+ 110]	[+ 22]	+ 4	— 1065	+ 100	+ 1972	+ 1330
+ 107.0	[+ 97]	[+ 10]	+ 3	— 1045	+ 12	+ 1174	+ 609

Die vier letzten Reihen der Tabelle III enthalten noch die entsprechenden Differenzen der Komponenten und der Totalintensität gegen den Basispunkt München.

Für diejenigen Orte, an welchen Lamont nicht beobachtet hat, sind die Vergleichswerte seinem Atlas (Magnetische Karten von Deutschland und Bayern. München 1854) entnommen worden. Die so erhaltenen Zahlen sind durch Einklammern kenntlich gemacht.

Die Differenzen zwischen den neuen und alten Messungen enthalten, abgesehen von den eigentlichen Unsicherheiten der Beobachtungen selbst, die konstanten Fehler der Reiseinstrumente der absoluten Messungen und der Unterschiede in den Säkularvariationen zwischen der Basisstation (München) und den Feldstationen.

Betrachtet man zunächst die Deklinationsdifferenzen, so erkennt man sogleich einen Gang in der Größe und im Vorzeichen derselben. Dieser Gang hängt von der Entfernung der Station von der Basisstation und von der Himmelsrichtung ab, er kann daher als Funktion der geographischen Koordinaten dargestellt werden. Schon eine einfache lineare Funktion von der Form

$$\text{Diff.} = a \cdot (B_s - B_m) + b\,(L_s - L_m)$$

gibt ein gutes Resultat. In dieser Formel sind B_s und B_m die Breiten der Station bzw. von München und L_s und L_m die entsprechenden Längen; a und b sind zwei noch zu bestimmende Konstanten. Würde man dieser Formel noch ein konstantes Glied anfügen, so würde dieses die Summe der allfällig vorhandenen Instrumentalkorrektionen darstellen. Man erkennt aber auch ohne eigentliche Rechnung, daß dieselben recht klein sind und noch innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit liegen müssen, so daß also die Unterschiede ganz von der Verschiedenheit der Säkularvariationen zwischen der Station und München herrühren. Sie können daher zum Verschwinden gebracht werden, wenn man die betreffenden jährlichen Änderungen der Abnahme in der westlichen Deklination berücksichtigt. Um einen Überschlag über die zu erwartenden Größen zu haben,

habe ich aus obiger Formel die a und b berechnet, indem ich 20 möglichst ungestörte und gleichmäßig über das ganze Gebiet verteilte Stationen berücksichtigte. Die betreffenden Werte sind:

$$\text{Diff.} = 4.105\ \Delta B + 9.636\ \Delta L$$

worin die ΔB, Breitendifferenzen, und ΔL, Längendifferenzen gegen München, in Graden ausgedrückt sind. Mit diesem Ausdruck sind die folgenden das Messungsgebiet umspannenden Werte berechnet, welche also die Differenzen der Säkularvariationen der Deklination gegenüber der in München beobachteten Säkularvariationen vorstellen. Das negative Zeichen bedeutet, daß die jährliche Abnahme der westlichen Deklination größer, das positive, daß sie kleiner als in München ist. — Man würde noch eine bessere Übereinstimmung erhalten, wenn man noch die quadratischen Glieder einführen würde; für den zunächst vorliegenden Zweck genügen die so erhaltenen Zahlen.

ΔB \ ΔL	-2^0	-1^0	0^0	$+1^0$
$+2^0$	$-0'.200$	$-0'.025$	$+0'.150$	$+0'.324$
$+1^0$	-0.276	-0.100	$+0.075$	$+0.249$
0	-0.351	-0.175	0.000	$+0.175$
-1^0	-0.425	-0.249	-0.074	$+0.100$

Beispielsweise genügt es, die Säkularvariation in Unterfranken um 0'.1 bis 0'.2 größer anzunehmen, als in München, damit die vorhandenen Unterschiede verschwinden. Es hat also das System der Isogonen außer einer Parallelverschiebung gleichzeitig eine Drehung erlitten, ein Resultat, das auch mit anderen Erfahrungen übereinstimmt. Im Durchschnitt sind die Unterschiede in den Säkularvariationen, wie nicht anders zu erwarten, recht gering, da eben das untersuchte Gebiet räumlich noch recht klein ist. Einige Abweichungen aber, die die Unsicherheit der Messungen überschreiten, dürften wohl daher rühren, daß die Säkularvariationen in Störungsgebieten etwas anderen

Gesetzen folgen als in ungestörten und in Bayern nehmen gerade diese Gebiete eine bedeutende Ausdehnung ein.

Zunächst ist das Riesgebiet zu nennen, das ja in jüngster Zeit eingehend magnetisch untersucht worden ist. Nach den hier vorliegenden Messungen und denjenigen von Lamont dehnt sich aber dieses Störungsgebiet noch weiter nach Osten aus und zwar umfaßt es das ganze Juragebiet. Besonders drängen sich in der Gegend bei Ingolstadt die Isogonen recht eng zusammen, was man auf Tafel VII deutlich sehen kann. Ein weiteres bemerkenswertes Störungsgebiet hat schon Lamont näher studiert; es ist dies der Bayerische Wald und insbesondere die Umgebung von Passau. Aber auch die anderen Gebirge, wie die Alpen, der Spessart und die Rhön sind magnetisch gestört. In der Rhön besonders ist es der Basalt, der die normale Verteilung im Erdmagnetismus stark beeinflußt. Wie weit dieser Einfluß gehen kann, hat Böhmländer für den Wachtküppel in der Rhön gezeigt.[1])

Aber schon aus den magnetischen Ortsbestimmungen Lamonts und den daraus konstruierten Karten der magnetischen Elemente kann man die Störungsgebiete erkennen. Die Lamontschen Karten enthalten die „wahren isomagnetischen Linien," bei welchen sich also die Zeichnung möglichst den Beobachtungen anschmiegt. Leitet man daraus mittlere Werte, die sogenannten „terrestrischen isomagnetischen Linien," was am einfachsten graphisch geschieht, ab, so geben die Unterschiede zwischen beiden Systemen einen Aufschluß über die vorhandenen Lokalablenkungen. Auf diese Weise habe ich die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Deklinationsdifferenzen im Sinne „wahrer minus terrestrischer Wert" aus den Lamontschen Beobachtungen abgeleitet:

---

[1]) K. G. Böhmländer, Verlauf der Isogonen auf dem Wachtküppel. Dissertation. München 1899.

Störungen in Deklination.

Breite \ Länge ö. v. Ferro	25°0	25°5	26°0	26°5	27°0	27°5	28°0	28°5	29°0	29°5	30°0	30°5	31°0
50° 30′						+ 5′	+ 3′						
15						+ 4	+ 1						
0				+ 1′	+ 7	+ 1	+ 1	+ 1′	+ 6	+ 5′	0′		
49 45	+ 1′	0′	− 7′		+ 4	+ 1	+ 1	− 1	+ 5	+ 2	0		
30	− 1	− 2	− 5				0	+ 1	+ 4	0	+ 3	0′	
15	− 2	0	+ 2				+ 1	+ 3	0	− 4	− 3	+ 2	
0	− 2	+ 2	− 3				+ 1	0	+ 3	− 1	+ 2	+ 4	− 2′
48 45							− 3	0	0	0	− 3	+ 5	− 3
30							− 3	− 1	+ 1	+ 1	+ 3	+ 7	+ 6
15							− 3	0	+ 2	+ 1	+ 1	+ 4	+ 8
0						− 1	− 1	0	+ 2	0	− 4	+ 4	+ 9
47 45						− 1	− 2	− 1	0	− 5	− 6	− 4	+ 10
30					+ 4	− 2	− 2	− 2	− 2	− 6	− 6	+ 6	

In dieser Tabelle ist das untersuchte Gebiet in kleine Trapeze von 15′ Breitendifferenz und 30′ Längendifferenz eingeteilt und für die Schnittpunkte die Unterschiede der beiden Deklinationssysteme eingetragen. Man erkennt sofort die systematische Verteilung in den Vorzeichen, so daß die einzelnen Störungsgebiete deutlich hervortreten.

Die Vergleichung der neuen Beobachtungen der Horizontalintensität mit den Lamontschen ergibt nun zunächst einen konstanten Unterschied, der im Mittel aus sämtlichen Beobachtungen — 90 γ (Einheiten der fünften Dezimalstelle in H) beträgt. Die Beobachtungen des Jahres 1903 (siehe diese Berichte Bd. 55, 1905, Seite 82) ergaben fast genau den gleichen Betrag, nämlich — 87. Die Differenz stellt die Summe der Instrumentalkorrektionen der beiderseitigen Messungen dar. Der größere Teil davon muß den Lamontschen Messungen zugeteilt werden, da der nämliche Unterschied auch aus den Vergleichun r ausgeführten Messungen, die von Potsd stadt a. S.

und Koburg), folgt. Auch die in Württemberg angestellten Beobachtungen geben das nämliche Resultat. Ein kleinerer Teil des Unterschiedes ist dem neuen Instrumente zuzuschreiben, da ja bekanntlich alle magnetischen Messungen mit gewissen konstanten, den Instrumenten eigentümlichen Fehlern behaftet sind. Es wurde daher auch auf der letzten Konferenz der Internationalen Magnetischen Vereinigung in Innsbruck eine systematische Durchführung von Vergleichungen zwischen den Normalinstrumenten der verschiedenen Observatorien beschlossen.[1])

Fügt man allen Differenzen der ΔH (1905—1850) die Konstante 90 hinzu, so erkennt man wiederum einen systematischen Gang in den übrigbleibenden Zahlen, der von dem Unterschiede der säkularen Variationen zwischen den Feldstationen und München herrührt. Es genügt anzunehmen, daß beispielsweise die jährliche Zunahme der Horizontalintensität in der Gegend des Bodensees um 1 γ jährlich größer und in Franken etwa 1 γ kleiner als in München ist, um die vorhandenen Unterschiede zu verringern. Es hat also ebenso wie bei der Deklination das System der Isodynamen der Horizontalintensität außer einer Verschiebung eine geringe Drehung erlitten. Die mathematische Darstellung dieser Änderung als Funktion der geographischen Koordinaten soll jedoch erst später, wenn die neuen Messungen weiter vorgeschritten sind, vorgenommen werden, weil dann auch die Orte mit größeren Störungen besser eliminiert werden können.

Die magnetischen Störungsgebiete treten im Verlauf der Isodynamen der Horizontalintensität noch deutlicher hervor als bei den Isogonen. Insbesondere im mittleren Teile des Jura finden starke Abweichungen von der normalen Verteilung statt. Die Beobachtungen in Pfünz, Eichstätt, Solnhofen liefern alle eine viel zu kleine Horizontalintensität. Bei Ingolstadt hat bereits Lamont eine solche Anomalie gefunden. Diese Beob-

[1]) Messerschmitt, Bericht über die internationale Konferenz für Erdmagnetismus und Luftelektrizität zu Innsbruck 1905. Terrestrial Magnetism., 10. Jahrgang 1905, S. 195.

achtung hat später C. Orff[1]) auf Lamonts Veranlassung gelegentlich astronomisch-geodätischer Messungen mit dem Lamontschen Reisetheodoliten kontrolliert und bestätigt gefunden. Der Standpunkt Lamonts lag etwa 1 km westlicher als derjenige von Orff und zwar beobachtete in Soldnerschen Koordinaten (bayer. Ruten) ausgedrückt:

	X	Y
Lamont	+ 24 172,	+ 3850
Orff	+ 24 154,	+ 3492.

Es kann also die gefundene Anomalie nicht auf ein Versehen oder begrenzt lokale Ursache zurückgeführt werden. Die gefundenen Differenzen der magnetischen Elemente gegen München sind:

	Lamont 1850	Orff 1874/75
ΔD	$+6'.0$	$+16'.3$
ΔH	$-431\,\gamma$	$-452\,\gamma$
ΔJ	$+39'.0$	$+49'.0$

Um einen sicheren Anhaltspunkt über die Störungsgebiete zu haben, wurden für die Horizontalintensität in der gleichen Weise wie für die Deklination die Unterschiede zwischen den wahren und den terrestrischen isomagnetischen Linie ermittelt, welche in der beistehenden Tabelle enthalten sind. Die bereits angeführten Störungsgebiete treten hier noch deutlicher wie bei der Deklination hervor und bildet daher diese Zusammenstellung einen guten Anhalt über die weiterhin vorzunehmenden Untersuchungen. (Vgl. auch Tafel VII.)

[1]) C. von Orff, Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern. München 1880, Anhang. Magnetische Messungen zu Ingolstadt und auf der Wülzburg (Seite 143–164). Für Wülzburg findet Orff: $\Delta D = +25'.3$; $\Delta H = -430\,\gamma$ und $\Delta J = +55'.1$, welche Werte gut mit den Lamontschen Karten harmonieren.

Störungen der Horizontalintensität in Einheiten der fünften Dezimale.

Länge ö. v. Ferro / Breite	25°0	25°5	26°0	26°5	27°0	27°5	28°0	28°5	29°0	29°5	30°0	30°5	3
50° 30'						−40'	−50						
15						0	+10						
0				−5'	−50	+15	+20	0'	−35'	−20'	−15'		
49 45	+20'	+ 30'	−10'		−20	+10	+10	+10	0	0	−20		
30	+30	+ 20	−20				+15	+35	+40	0	−40	−40	
15	+30	+ 50	+20				+10	+30	+20	−10	20	−20	
0	+60	+100	+30				−15	−10	−20	−10	−10	−40	-
48 45							+40	0	−50	−30	−20	−50	-
30							+20	−10	−20	−10	−20	−40	
15							+20	−10	0	−10	−40	−50	-
48 0						+40	+20	0	0	0	−25	−70	-
47 45						+10	−10	+10	0	+10	−10	−40	
30					+20	+15	+10	0	−10	0	0	+40	

Die **Inklination** wurde von mir mit einem Nadelinklinatorium gemessen, während Lamont sie aus der Induktionswirkung des Erdmagnetismus auf weiche Eisenstäbe ableitete. Wie [illegible] Lamont schon selbst fand, traten namentlich in den späteren Jahren bei seinen Eisenstäben Anomalien auf, die die Inklinationsmessungen in nicht sicher kontrollierbarer Weise beeinflußten (Bd. II, Seite 22). Betrachtet man jedoch die Unterschiede der neuen und der alten Inklinationsmessungen in Tabelle III wobei übrigens meist Stationen aus der ersten Zeit von Lamonts Beobachtungen in Frage kommen, so findet eine recht befriedigende Übereinstimmung statt. Zunächst erhält man, ähnlich wie bei der Horizontalintensität, einen konstanten Unterschied, der im Mittel − 7'.5 beträgt.[1] Bei den 1903 beobachteten

[1] Dieser Unterschied [illegible] Auffälliges, indem selbst bei [illegible] Instrumenten [illegible] Differenzen von derselben Größenordnung [illegible] E. [illegible] Rijckevorsel, Comparison of the instruments for absolute magnetic measurements. Royal. Meteorol. Inst. of the Netherlands, 1897, 98 und 99) noch Unterschiede in den Inklinations-

Inklinationen (1. Mitteilung, Seite 83) beträgt diese Differenz + 9'.5, was eine befriedigende Übereinstimmung genannt werden darf. Es ist also die Reduktionskonstante zwischen beiden Reihen 8', um welchen Betrag die Lamontschen Inklinationen gegenüber den meinigen zu klein sind. Bringt man diese konstante Reduktion an sämtliche Differenzen an, so erhält man wieder die Unterschiede in den jährlichen Variationen der Inklination zwischen dem Basispunkt München und den Feldstationen. Auch hier ist, wenn auch weniger sicher als bei den anderen Elementen, eine Verdrehung der Isoklinen angedeutet, ein Beweis dafür, daß die Lamontschen Beobachtungen besser sind, als nach den bemerkten Anomalien der weichen Eisenstäbe zu befürchten war.

Störungen der Inklination.

Breite \ Länge ö. v. Greenw.	25°.0	25°.5	26°.0	26°.5	27°.0	27°.5	28°.0	28°.5	29°.0	29°.5	30°.0	30°.5	31°.0
50° 30'						+ 1'	+ 1'						
15						− 3	− 5						
0				+ 2'	− 2'	− 6	− 9	− 7'	− 6'	− 2'	− 1'		
49 45	− 1'	+ 2'	+ 5'		− 5	− 7	− 7	− 7	− 7	− 3	0		
30	+ 5	− 1	+ 2				− 9	− 9	− 7	0	− 1	− 2'	
15	− 6	− 2	3				− 7	− 6	− 4	− 1	− 2	− 1	
0	− 8	+ 3	+ 6				− 5	− 7	0	+ 1	− 2	− 2	− 2'
48 45							− 4	− 3	0	+ 1	+ 1	0	− 10
30							− 3	− 1	0	+ 1	0	− 1	− 11
15							− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 1	− 3
0						+ 2	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 6	+ 4
47 45						+ 2	+ 1	0	0	0	+ 4	+ 8	+ 3
30					+ 1	+ 1	0	− 1	− 1	− 1	+ 3	+ 5	

bestimmungen zwischen den absoluten Messungen verschiedener Observatorien, die bis 8' gingen. In Potsdam beträgt der Unterschied zwischen dem Erdinduktor und dem Bambergschen Inklinatorium 7'.5. — Bei den anderen Elementen sind die Unterschiede nach Rijkevorsel kleiner, doch gehen sie bei der Deklination noch bis 1' und bei der Horizontalintensität bis 30 γ. Einmal wurde sogar für Wilhelmshaven 43 γ gefunden.

Ich habe daher auch für dieses Element die Unterschiede zwischen den wahren und terrestrischen Isoklinen gebildet und in der beistehenden Tabelle vereinigt. Diese Zusammenstellung läßt die gleichen Anomalien wie die beiden anderen Elemente erkennen.

Die im vorstehenden aus den Beobachtungen selbst abgeleiteten Normalwerte, die sog. terrestrischen isomagnetischen Linien, sind zwar für die Untersuchung der lokalen Störungsgebiete sehr brauchbar, haben aber natürlich nur beschränkte Gültigkeit, da sie nicht unabhängig von den regionalen Störungen sind. Es erscheint daher angebracht, die gewonnenen Messungsergebnisse auch mit den Elementen zu vergleichen, die nach der Theorie aus einem großen, die ganze Erde umspannenden Materiale abgeleitet sind.

Gauß hat zuerst aus den damals bekannten Messungen das erdmagnetische Potential abgeleitet. Die seither erweiterten und verbesserten Beobachtungen haben denn auch mehrfach Veranlassung gegeben, diese Rechnung zu wiederholen. Von diesen wählte ich das von Ad. Schmidt berechnete System, das sich auf das Jahr 1885,0 bezieht.[1] Dabei beschränkte ich mich auf die Vergleichung der drei rechtwinkligen Koordinaten X, Y und Z. Zur Erleichterung der Rechnung habe ich für das ganze Gebiet zwischen 47° und 51° nördlicher Breite und 9° bis 14° östlicher Länge von Greenwich besondere Tabellen berechnet, in welchen das Intervall in Länge und Breite von 10′ zu 10′ fortschreitet, so daß daraus rasch durch einfaches Interpolieren die theoretischen Werte entnommen werden können. Die so erhaltenen Werte sind in der Tabelle IV zusammen-

---

[1] Schmidt Adolf, Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. Abhandlungen der Bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., XIX. Bd., I. Abt., 1895. — Derselbe, Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885,0. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, XXI. Jahrgang, Nr. 2, 1898. — Derselbe, Über die Darstellung der Ergebnisse erdmagnetischer Beobachtungen im Anschluß an die Theorie. Ann. der Hydrogr. u. Marit. Meteorologie, XXVI, Januar [illegible]

gestellt, welche neben den berechneten (R) die aus den Beobachtungen (B) abgeleiteten Komponenten nebst deren Unterschieden im Sinne „Beobachtung minus Rechnung" enthält. Zugleich ist diese Tabelle an der nördlichen und westlichen Grenze von Bayern durch einige benachbarte Messungen in Preußen und Württemberg ergänzt. Bei diesen Differenzen ist zunächst zu beachten, daß sich die theoretischen Elemente auf die Epoche 1885,0 beziehen, während die von mir beobachteten Werte auf die mittlere Beobachtungszeit, nämlich 1905,0, reduziert sind. Der Unterschied der Epochen entspricht jedoch in unserem Falle, wie bereits gezeigt wurde, wegen der geringen Ausdehnung des untersuchten Gebietes, näherungsweise einer Konstanten. Es ist daher der Unterschied für den vorliegenden Zweck ohne Bedeutung; wollte man jedoch die beiderseitigen Systeme aufeinander reduzieren, so müßte zuerst eine eingehende Untersuchung der säkularen Variationen vorangehen, welche zu ermitteln ja auch eine der Aufgaben ist, die unsere magnetische Landesaufnahme lösen soll.

Würde der Verlauf der magnetischen Elemente genau der Theorie entsprechen, so müßten, bis auf kleine Reste, die von der Verschiedenheit der säkularen Variationen herrühren, sämtliche Differenzen ($B-R$) eines jeden Elementes innerhalb der Unsicherheit der Beobachtungen übereinstimmen. Wie die Tabelle jedoch lehrt, ist dies nicht der Fall, sondern es finden noch ziemlich große Unterschiede statt, die sich teilweise in Gruppen vereinigen lassen. Diese Unterschiede zeigen eben, wie es auch bei anderen geophysikalischen Elementen der Fall ist, an, daß einesteils die Theorie noch zu vervollkommnen ist, andererseits aber neben den lokalen auch regionale Störungsgebiete vorhanden sind.

Ort	Breite	Länge östl. von Greenw.	X_B	X_R
Lindau	**47° 34.0**	**9° 40.3**	**0.20 341**	**0.19 797**
Berchtesgaden	**47 37.4**	**13 0.1**	**0.20 579**	**0.20 100**
Oberdorf	**47 38.0**	**9 35.9**	**0.20 295**	**0.19 789**
Kochel	**47 39.6**	**11 21.9**	**0.20 420**	**0.19 878**
Waltenhofen	**47 39.9**	**10 18.5**	**0.20 250**	**0.19 740**
Großholzleute	**47 40.6**	**10 6.8**	**0.20 308**	**0.19 839**
Riedhausen	**47 41.1**	**11 12.0**	**0.20 428**	**0.19 846**
Reichenhall	**47 43.3**	**12 52.4**	**0.20 517**	**0.20 041**
Penzberg	**47 44.8**	**11 22.4**	**0.20 389**	**0.19 846**
Tölz	**47 46.2**	**11 34.5**	**0.20 423**	**0.19 868**
Memmingen	**47 47.3**	**10 10.5**	**0.20 119**	**0.19 671**
Reichenhofen	**47 51.2**	**10 0.2**	**0.20 233**	**0.19 621**
Traunstein	**47 52.4**	**12 37.8**	**0.20 426**	**0.19 946**
Landsberg	**48 3.0**	**10 53.4**	**0.20 239**	**0.19 653**
Reinstetten	**48 6.0**	**9 58.6**	**0.20 121**	**0.19 515**
München	**48 8.8**	**11 36.5**	**0.20 331**	**0.19 704**
Walpertskirchen	48 15.9	11 58.5	0.20 196	0.19 700
Göggingen	48 20.3	9 57.5	0.20 031	0.19 414
Olbeck	48 30.0	10 4.0	0.20 068	0.19 361
Pfaffenhofen	48 32.0	11 32.0	0.20 090	0.19 534
Sontheim	48 32.6	10 18.1	0.19 971	0.19 374
Landshut	48 33.6	12 7.5	0.20 103	0.19 595
Dillingen	48 34.7	10 29.1	0.19 983	0.19 384
Herbrechtingen	48 38.1	10 10.8	0.19 919	0.19 321
Schwenningen	48 39.4	10 38.3	0.19 950	0.19 370
Schnaitheim	48 42.7	10 10.4	0.19 769	0.19 289
Donauwörth	48 43.1	10 47.5	0.19 939	0.19 365
Schaching	48 50.4	12 56.9	0.20 009	0.19 580
Nördlingen	48 50.9	10 28.9	0.19 786	0.19 273
Straubing	48 52.3	12 34.4	0.19 979	0.19 522
Pfünz	48 53.2	11 15.9	0.19 438	0.19 353
Solnhofen	48 53.5	10 59.9	0.19 420	0.19 319
Geislingen	48 56.3	10 26.2	0.19 794	0.19 230
Rindelbach	48 59.7	10 10.7	0.19 744	0.19 172
Regensburg	49 0.3	12 5.7	0.19 920	0.19 407

Tabelle IV.

Y_B	Y_R	Z_B	Z_R	$X_B - X_R$	$Y_B - Y_R$	$Z_B - Z_R$
				γ	γ	γ
− 0.03 914	− 0.04 352	0.40 646	0.41 289	+ 544	+ 438	− 643
− 0.03 402	− 0.03 722	40 698	41 194	+ 479	+ 320	− 496
− 0.03 979	− 0.04 363	40 598	41 330	+ 506	+ 384	− 732
− 0.03 688	− 0.04 038	40 402	41 273	+ 542	+ 350	− 871
− 0.04 283	− 0.04 228	—	41 324	+ 510	− 55	—
− 0.03 899	− 0.04 264	40 536	41 333	+ 464	+ 365	− 797
− 0.03 710	− 0.04 060	40 655	41 343	+ 577	+ 350	− 688
− 0.03 432	− 0.03 739	40 705	41 256	+ 476	+ 307	− 551
− 0.03 672	− 0.04 022	—	41 323	+ 513	+ 350	—
− 0.03 609	− 0.03 983	40 702	41 330	+ 565	+ 374	− 628
− 0.04 035	− 0.04 245	40 752	41 396	+ 448	+ 210	− 644
− 0.03 889	− 0.04 373	40 725	41 440	+ 612	+ 484	− 715
− 0.03 598	− 0.03 776	40 719	41 352	+ 480	+ 178	− 633
− 0.03 788	− 0.04 093	40 788	41 516	+ 586	+ 305	− 728
− 0.03 878	− 0.04 276	40 816	41 582	+ 606	+ 398	− 746
− 0.03 630	− 0.03 952	40 841	41 546	+ 627	+ 322	− 705
− 0.03 587	− 0.03 886	—	41 600	+ 496	+ 299	—
− 0.03 874	− 0.04 251	40 957	41 717	+ 617	+ 377	− 760
− 0.03 905	− 0.04 220	41 136	41 803	+ 707	+ 315	− 667
− 0.03 658	− 0.03 941	41 002	41 766	+ 556	+ 283	− 764
− 0.03 820	− 0.04 173	41 002	41 817	+ 597	+ 353	− 815
− 0.03 533	− 0.03 832	41 014	41 762	+ 508	+ 299	− 748
− 0.03 782	− 0.04 136	41 049	41 832	+ 599	+ 354	− 783
− 0.03 890	− 0.04 192	41 265	41 873	+ 598	+ 302	− 608
− 0.03 769	− 0.04 103	41 094	41 767	+ 580	+ 334	− 673
− 0.03 796	− 0.04 188	41 154	41 913	+ 480	+ 392	− 759
− 0.03 722	− 0.03 996	41 144	41 895	+ 574	+ 274	− 751
− 0.03 734	− 0.03 650	41 086	41 893	+ 429	− 84	− 807
− 0.03 753	− 0.04 121	41 338	41 984	+ 513	+ 368	− 646
− 0.03 431	− 0.03 719	41 170	41 922	+ 457	+ 288	− 752
− 0.03 687	− 0.03 969	41 287	41 972	+ 85	+ 282	− 685
− 0.03 699	− 0.04 011	41 285	41 984	+ 101	+ 312	− 699
− 0.03 759	− 0.04 124	41 220	42 030	+ 564	+ 365	− 810
− 0.03 796	− 0.04 170	41 300	42 070	+ 572	+ 374	− 770
− 0.03 504	− 0.03 803	41 278	42 010	+ 513	+ 299	− 732

Die vorstehenden Betrachtungen lassen also zunächst erkennen, daß der neue magnetische Reisetheodolit den Anforderungen, welche man an solche Instrumente stellen muß, völlig Genüge leistet, so daß damit die Deklination und Inklination auf mindestens $\pm 1'$ und die Horizontalintensität auf $\pm 10\,\gamma$ erhalten werden kann, eine Genauigkeit, die auch durchgehend erreicht worden ist.

Für die Aufnahmen im Feld dienten die Registrierungen des Münchener Observatoriums als Ausgangspunkt. Die Zusammenstellung der für München gültigen Elemente in den letzten Jahren zeigt, daß die Abnahme der westlichen Deklination jetzt durchschnittlich nicht ganz 5′ beträgt, also kleiner geworden ist als die Variation im Mittel aus dem letzten halben Jahrhundert. Die Variation der Horizontalintensität hat sich noch mehr geändert, indem sie in den letzten Jahren fast ganz verschwunden ist, während noch vor wenigen Jahren eine beträchtliche Zunahme vorhanden war. Auch die Inklination nimmt jetzt nur sehr wenig ab. Ein Vergleich dieses Verhaltens der magnetischen Elemente in München mit demjenigen an den benachbarten Observatorien, insbesondere von Pola und Potsdam, bestätigen dieses Resultat. Diese Änderungen in den jährlichen Variationen rühren zum Teil daher, daß der Erdmagnetismus, parallel der Sonnenfleckentätigkeit, sich jetzt in einer Periode größerer Unruhe befindet, zu welchen Zeiten beispielsweise für die Horizontalintensität die Tendenz zur Abnahme besteht. Zum anderen Teil beruht aber auch die Abnahme der Variationen in Vorgängen säkularer Natur.

Die neuen Messungen sind über das ganze Königreich ziemlich gleichmäßig verteilt. Die mittlere Entfernung der einzelnen Punkte beträgt 40 km, genügt also vollständig, um den normalen Verlauf der magnetischen Elemente ableiten zu können. In einigen Gegenden sind sogar die Stationen schon etwas dichter genommen worden, um über die daselbst vermuteten Störungen einigen Anhalt zu bekommen. Dagegen wurden die beiden großen Störungsgebiete im Ries und im Bayerischen Wald nahe ganz gemieden, da das erstere Gebiet bereits neuerdings eingehend

studiert, letzteres aber, soweit es nötig, im Zusammenhang untersucht werden soll.

Um die bayerischen Messungen mit denjenigen der benachbarten Staaten sicher vergleichbar zu machen, sind bereits mit den preußischen Beobachtern Anschlußmessungen ausgeführt worden; einige weitere Anschlüsse sind noch in Aussicht genommen.

Von ganz besonderer Bedeutung werden die neuen Messungen durch einen Vergleich mit den vor 50 Jahren durch Lamont ausgeführten magnetischen Ortsbestimmungen. Da das Netz von Lamont etwa nochmal so dicht war als das neue, so können daraus allein bereits manche wichtige Schlüsse gezogen werden, wenn es sich herausstellt, daß diese Messungen den entsprechenden Grad der Genauigkeit erreichen. In der Tat bestätigen nun die Vergleichungen der beiderseitigen Messungen die große Genauigkeit, welche bereits Lamont bei seinen Beobachtungen erhalten hat. Bei der Horizontalintensität und der Inklination lassen sich zunächst konstante Unterschiede zwischen dem neuen und alten System ableiten, die hauptsächlich die Instrumentalkorrektionen des Lamontschen Reisetheodoliten darstellen und nichts Auffälliges bieten; wegen der Sicherheit aber, mit der sie aus den Vergleichungen bestimmt werden können, das beste Zeugnis für die Güte der Beobachtungen selbst liefern. Die Deklinationsvergleichung gibt keinen Unterschied, so daß also innerhalb des Genauigkeitsgrades beider Reihen die Deklinationssysteme gleich sind.

Obwohl nun das untersuchte Gebiet eine verhältnismäßig kleine Fläche der Erde umspannt, erkennt man doch nach Berücksichtigung der konstanten Abweichungen deutlich, daß alle magnetischen Linien in den letzten 50 Jahren nicht nur eine Parallelverschiebung sondern auch eine kleine Drehung erlitten haben. Man kann daher die Verschiedenheit der säkularen Variationen bereits recht genau berechnen.

Bekanntlich hat Lamont die Inklination aus dem in weiches Eisen induzierten Magnetismus abgeleitet. Er fand dabei in den späteren Jahren Anomalien, indem offenbar das

von ihm benutzte weiche Eisen mit der Zeit unkontrollierbare Änderungen erlitten hatte. Es dürfte diese wohl hauptsächlich auf Strukturänderungen zurückzuführen sein. Bei anderen weichen Eisen trat hingegen diese Veränderung nicht ein, wie eine Vergleichung von Beobachtungen von Theodoliten, die Lamont an andere Institute und Gelehrte geliefert hat, dartut. In den ersten Jahren der Lamontschen Messungsreihe besteht diese Unsicherheit jedoch noch nicht und es verdienen, wie eben der Vergleich mit den neuen Beobachtungen lehrt, diese Inklinationsmessungen volles Vertrauen. Die Beobachtungen der späteren Jahre können dagegen nur zum Teil, nach eingehender Diskussion und Vergleichung mit Neumessungen, weitere Verwendung finden.

Aus den Beobachtungen von Lamont wurde nun der mittlere Verlauf des Erdmagnetismus, die sogenannten terrestrisch isomagnetischen Linien, abgeleitet und mit dem wahren verglichen. Ebenso fand ein Vergleich der neuen Beobachtungen mit den aus der Theorie folgenden Werten statt. Beide Wege ergeben einen Überblick über die in Bayern vorkommenden magnetischen Störungsgebiete, die aus der beiliegenden Karte noch deutlicher zu erkennen sind.

Es ist vor allem das Gebirge, welches den Verlauf der magnetischen Linien beeinflußt. Die Störungen machen sich daselbst besonders dadurch geltend, daß eine Verminderung der normalen Horizontalintensität gefunden wird.

Im Süden erscheinen die Alpen als wichtigstes Störungsgebiet, das besonders in dem östlichen Teile von der Linie Tölz-Holzkirchen bis zur Salzach deutlich hervortritt. Die bayerische Hochebene gibt mehr normale Werte bis in die Nähe der Donau, wo durch das Zusammenstoßen der verschiedenen Gebirgssysteme große geologische Störungen auftreten, die sich auch im Erdmagnetismus bemerklich machen.

Das vulkanische Riesgebiet zeigt ganz besondere magnetische Verhältnisse, die durch die basaltischen Lakkolithe ihre Erklärung finden. Dieses Störungsgebiet setzt sich aber längs dem ganzen Jura fort. Hier hebt sich noch das Gebiet in der

Gegend von Ingolstadt vor allem heraus, wo sich die Isodynamen der Horizontalintensität und die Isogonen besonders eng aufeinander drängen, ein Verhalten, das noch wichtiger wird, weil in dieser Gegend auch die Intensität der Schwere starke Abweichungen erkennen läßt. Es ist klar, daß die geologischen Verhältnisse dieses Gebietes, die freilich zum Teil nicht offen daliegen, eine Erklärung geben können.

Die Störungen im Bayerischen Wald dagegen sind leichter aus den sichtbaren Gebirgsmassen zu erklären, aber auch hier erstreckt sich die Wirkung noch weiter südlich über das rechte Ufer der Donau hinaus.

Auch die Gegend von Amberg und Neumarkt in der Oberpfalz zeigt eine zu geringe Intensität des Magnetismus, besonders dort, wo der Jura sich an den Bayerischen Wald anschließt, ein Verhalten, das auch die Schweremessungen erkennen lassen.

Das Fichtelgebirge tritt magnetisch weniger hervor, dagegen kommen die vulkanischen Durchbrüche in der Rhön besonders in Betracht. Manche Kuppen zeigen so starke magnetische Störungen, daß Aufnahmen, die ein ganz enges Netz bilden, die Lage der Störungsmassen recht genau zu bestimmen erlauben.

Im Spessart erleidet besonders die Deklination ganz außergewöhnliche Ablenkungen und zwar in dem Sinne, daß die Mißweisung kleiner als ihr normaler Wert ist. Diese Anomalie setzt sich noch weit außerhalb Bayern fort und erstreckt sich bis an den Rhein.

Die vorliegenden Beobachtungen lassen also genau erkennen, wo die Detailuntersuchungen einzusetzen haben, die dann im Verein mit anderen geophysikalischen Messungen, insbesondere der Richtung und Intensität der Schwerkraft und den geologischen Verhältnissen, manche wichtige Frage klären und ihrer Lösung näher bringen können und damit allgemeinere Bedeutung gewinnen.

Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten.

Von **G. Faber** in Karlsruhe.

(*Eingelaufen 3. November.*)

Überwiegen in einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius die Koeffizienten vom Werte Null in genügend starkem Maße über die übrigen, so läßt sich unter geeigneten einfachen Zusatzbedingungen nachweisen, daß der Konvergenzkreis eine natürliche Grenze der betreffenden Funktion ist. Herr Fabry hat diese Fragen zuerst auf das gründlichste untersucht;[1]) einen Teil seiner Sätze habe ich dann einfacher bewiesen.[2])

Wenn man mit $n(\nu)$ die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten bezeichnet, die zu Potenzen mit Exponenten $\leq \nu$ gehören, so ist z. B. $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe. Andrerseits ist, wie Herr Fabry[3]) ausdrücklich hervorhebt, das Vorhandensein unendlich vieler und schließlich beliebig viele aufeinanderfolgende Koeffizienten umfassender Lücken in der Koeffizientenreihe für sich allein nicht hinreichend dafür, daß der Konvergenzradius sich als natürliche Grenze ergibt; ja es kann $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{n(\nu)}{\nu} = 0$

---

[1]) Ann. éc. norm. (3) 13 (1896) und acta math. 22 (1899).

[2]) Münchener Berichte 34 (1904).

[3]) Acta math. 22 (1899), p. 87 u. Journ. de Math. (5) 4 (1898), p. 349.

und $\overline{\lim\limits_{r=\infty}} \frac{n(r)}{r}$ beliebig klein (aber > 0) sein, ohne daß auf dem Konvergenzkreise mehr als eine einzige singuläre Stelle zu liegen braucht.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese von Herrn Fabry konstatierte interessante Möglichkeit durch Konstruktion einfacherer Beispiele als derjenigen des Herrn Fabry aufs neue darzutun.

Wenn $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$ ist, konvergiert die Reihe

$$(1) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_{m_\nu} \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^{m_\nu}$$

in dem Gebiete, in welchem $\frac{1}{2}|x|\cdot|x+1| < 1$ ist, d. i. im Innern einer Lemniskate (ohne Doppelpunkt) mit den Brennpunkten 0 und -1. Vom Kreise $|x| = 1$ liegt der eine Punkt $x = 1$ auf dieser Lemniskate, alle übrigen aber innerhalb derselben; denn für diese übrigen Punkte des Einheitskreises ist $\frac{1}{2}|x^2+x| < \frac{1}{2}(|x^2|+|x|)$ mit Ausschluß des Gleichheitszeichens, also < 1.

Wählt man nun

$$(2) \qquad m_{\nu+1} > 2\, m_\nu$$

und ordnet man (1) nach Potenzen von x:

$$(3) \qquad \sum^\infty{}^n b_n x^n,$$

so werden sämtliche b_n, deren Indices zwischen $2\, m_\nu$ und $m_{\nu+1}$ liegen, gleich Null; es lassen sich also auf diese Weise in der Koeffizientenreihe $b_0, b_1, b_2 \ldots$ beliebig viele und beliebig große Lücken herstellen. Trotzdem hat die Reihe (3), da sie ja die gleiche Funktion wie (1) darstellt, auf dem Einheitskreise keine singuläre Stelle als höchstens die Stelle $x = 1$; diese ist aber sicher singulär; denn auf Grund der Voraussetzung (2) und des eingangs erwähnten Fabryschen Satzes ist die Lemniskate $|x(x+1)| = 2$ natürliche Grenze der Funktion (1). Will man von jenem Satze keinen Gebrauch machen, so wähle man die

a_{m_ν} reell, dann werden es auch die b_μ und es wird, wie leicht zu sehen, $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|b_\mu|} = 1$, woraus ebenfalls folgt, daß der Punkt $x = 1$ ein singulärer für (3) ist.

Wählt man die m_ν so, daß $\lim_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ wird, so ergibt sich für die Reihe (3): $\underline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{m(\mu)}{\mu} = 0$ (speziell: $\lim_{\nu=\infty} \frac{n(m_\nu)}{m_\nu} = 0$), dagegen wird im allgemeinen $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2}$ werden, da ja zwischen $\mu = m_\nu$ und $\mu = 2\,m_\nu$ sämtliche Koeffizienten vorhanden sein können und dann $\lim \frac{n(2\,m_\nu)}{2\,m_\nu} = \frac{1}{2}$ ist; man kann aber den obern Limes beliebig verkleinern, wenn man statt von (1) von der im übrigen genau dasselbe leistenden Reihe $\sum_0^\infty a_{m_\nu} \left(\frac{x^l + x^{l+1}}{2}\right)^{m_\nu}$ ausgeht, wo l eine beliebige natürliche Zahl ist; es ergibt sich dann, wenn wieder $\lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$ angenommen wird, $\underline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = 0$, $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{n(\mu)}{\mu} = \frac{1}{l+1}$ (speziell: $\lim_{\nu=\infty} \frac{n(l \cdot m_\nu)}{l \cdot m_\nu} = 0$; $\lim_{\nu=\infty} \frac{n((l+1)\,m_\nu)}{(l+1)\,m_\nu} = \frac{1}{l+1}$).

In den so konstruierten Beispielen ist die einzige auf dem Konvergenzkreise gelegene singuläre Stelle keine isolierte Singularität der betreffenden Funktion, und es scheint in der Tat (obwohl hiefür ein Beweis nicht vorliegt) $\underline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{n(\nu)}{\nu}$ immer > 0 zu sein, sobald auf dem Konvergenzkreis nur eine endliche Anzahl isolierter Singularitäten auftritt.

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 17. November 1906.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. v. Heigel, eröffnete die Festsitzung mit der folgenden Ansprache:

Unauslöschbar wird sich jedem Teilnehmer an den soeben verrauschten Kaiserfesten das rührende und erhebende Bild eingeprägt haben: neben der kraftvollen Persönlichkeit des Reichsoberhaupts unser Regent, alt, doch nicht gealtert, ungebeugt von der Last seiner Jahre, ein Ehrfurcht gebietendes Beispiel von Pflichttreue. Der französische Akademiker Fontenelle sagte einmal: „Wenn ich vor einen Vornehmen treten muß, verbeuge ich mich, doch mein Geist macht den Bückling nicht mit!" Doch auch dem selbstbewußten Dichter würde, wenn er vor unseren Regenten getreten wäre, jede Ehrenbezeugung von Herzen gekommen sein, denn diesen Fürsten zeichnen nicht bloß Rang und Würde aus, sondern auch echte Menschlichkeit und Bürgertugend.

Längst ist der Beweis erbracht, daß er der Wissenschaft treue Fürsorge und jede mögliche Förderung angedeihen läßt. Auch im ablaufenden Jahre hat sich unsere Akademie mancher Beweise der Gunst der K. Staatsregierung zu erfreuen gehabt. Vor allem verdient unseren Dank die Einräumung des Nordflügels des Wilhelminums. Freilich mußte die westliche Hälfte des ersten Stockwerkes zunächst dem Ludwigsgymnasium ein-

geräumt werden, und ein Teil davon wird nach Errichtung des neuen Gymnasiums dem Staatsarchiv überlassen werden müssen. Immerhin bedeutet es einen Fortschritt, daß die östliche Hälfte des ersten Stockwerkes vom Münzkabinett und das zweite Stockwerk vom zoologischen Institut bezogen werden können; die erforderliche Adaptierung wird in wenigen Monaten durchgeführt sein. Wenn in absehbarer Zeit auch noch andere, gegenwärtig zu fremden Zwecken verwendete Räume im Erdgeschoß und im dritten Stockwerk an die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates abgegeben werden, ist dem empfindlichsten Mißstand im Wilhelminum abgeholfen. Denn nur wenn die Sammlungen in genügend geräumigen und hellen Räumen in übersichtlicher Ordnung aufgestellt sind, vermögen sie ihren Doppelzweck zu erfüllen: für den Unterricht in den Instituten das erforderliche Material und auch den breitesten Volksmassen Anregung und Belehrung zu bieten.

Zu wärmstem Danke sind wir der K. Staatsregierung und den beiden Kammern verpflichtet für Erhöhung des Etats der Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns, sowie der zoologischen Sammlung. Mit reicheren Mitteln ausgestattet, wird die genannte Kommission in Stand gesetzt sein, die Ausgrabungsarbeiten systematischer vornehmen zu lassen und in Wahrheit der Mittelpunkt der prähistorischen Studien in Bayern zu werden. Der zoologischen Sammlung aber ist durch die Aufbesserung ihres Etats die Möglichkeit gegeben, empfindliche Lücken ihrer Bestände auszufüllen und die wertvollen Erwerbungen der letzten Jahre durch zweckentsprechende Verarbeitung und Aufstellung fruchtbar zu machen.

Noch einem dringenden Bedürfnis aber ist in nächster Zeit abzuhelfen: es gilt, einen unseres Staates und unserer hohen Schulen würdigen neuen botanischen Garten zu schaffen.

Nahezu ein Jahrhundert ist verflossen, seit die Haupt- und Residenzstadt München ihren ersten botanischen Garten erhalten hat.

Während Berlin schon im 17. Jahrhundert einen „Apothekergarten“ und seit 1718 einen „Garten der Sozietät der Wissenschaften“ hatte, die Kaiserstadt Wien sich einer weltberühmten Pflanzenschule erfreute und sogar kleine Universitätsstädte, wie Altdorf, ihre Lehrgärten besaßen, fehlte es in München noch um die Wende des 18. Jahrhunderts an einem solchen Institut. Erst 1807 erhoben zwei Akademiker, der große Anatom und Physiker Sömmering und Medizinalrat Güthe, ihre Stimmen für Ausfüllung der empfindlichen Lücke in den trefflichen wissenschaftlichen Anstalten der kurbayerischen Akademie. Sömmering motivierte seinen Antrag galanter Weise u. a. auch damit, daß Botanik, von Alters her scientia amabilis, die liebenswürdige Wissenschaft, genannt, in jüngster Zeit ein Lieblingsstudium der Damen geworden sei. Die Akademie schloß sich dem Antrage an, und der gütige Max Joseph ging auf die Wünsche der Gelehrten ein; er schenkte zur Anlage eines botanischen Gartens eine Wiese von 6½ Tagwerken längs dem Herzogsgarten und dem Löwenwirtshause vor dem Karlstor; andere Grundstücke im Umfang von 8 Tagwerken wurden dazu gekauft. Hier wurde sodann in den nächsten Jahren ein anfänglich nur die Heimatsflora umfassender Garten von Hofgartenintendant v. Sckell und Professor v. Schrank, bisher Konservator des botanischen Universitätsgartens in Landshut, angelegt, also von Männern, die mit den einschlägigen Gesetzen der Natur, der Wissenschaft und der Kunst wohl vertraut waren.

Das neue Unternehmen fand jedoch viele Gegner. Im Publikum waren schlimme Gerüchte verbreitet über Beschaffenheit und Tauglichkeit des gewählten Platzes. Auch die alte Eifersucht zwischen Universität und Akademie spielte herein. Die Landshuter Professoren meinten, es wäre besser, das Geld, statt es im Münchener Kalkboden nutzlos zu vergraben, zur Erweiterung des herrlichen Universitätsgartens auf dem Hofberg zu verwenden. Allein Schrank, Güthe und Sckell, 1811 von der Regierung zu gründlicher Untersuchung der Frage aufgefordert, vertraten einstimmig und entschieden die Auffassung, daß gegen den gewählten Platz in München schwer-

wiegende Bedenken nicht zu erheben seien. Er sei gesichert gegen die im Isartal jährlich wiederkehrenden Überschwemmungen, habe die richtige Lage gegen den Sonnenlauf und genügenden Schutz gegen rauhe Bergwinde durch die nicht allzu hohen Gebäude des Herzog-Klemens-Palastes; dagegen sei genügend Vorsorge getroffen, daß dem Garten nicht durch bürgerliche Gebäude Licht und Luft und die nicht minder nötige Ruhe entzogen würden. Der Boden, vorwiegend Kalkerde mit Alaunerde und Eisenoxyd, sei zwar für den Anbau zärterer Pflanzen zur Zeit noch nicht sehr geeignet, könne aber von einem wissenschaftlich gebildeten Kultivateur nach Wunsch verbessert werden. Leichter könne die Universität eines botanischen Gartens entbehren, da die für den Unterricht notwendigen Pflanzen auch auf dem Handelswege erhältlich seien, als eine Akademie, welche das botanische Studium als reine Wissenschaft betrachte und betreibe. Auch in Paris sei der Jardin des plantes nicht mit der uralten Universität, sondern mit dem weit jüngeren Institut des sciences et des arts verbunden. Der Akademie des ersten Staates im konföderierten Deutschland dürfe ein so wichtiges Attribut nicht länger fehlen.

Diese Gründe schlugen durch: die Arbeiten für die geplante Schöpfung durften fortgesetzt werden.

Es wäre hier nicht am Platze und kann nicht meine Aufgabe sein, eingehend zu schildern, was in der Folge für innere Einrichtung des Gartens, Verbesserung des Bodens, Bau der Gewächshäuser, Ansiedlung der Pflanzen geleistet wurde. Dem praktischen Sinn, dem rastlosen Eifer und der wissenschaftlichen Erfahrung der Gründer und ihrer Nachfolger war es zu danken, daß sich der Münchener Garten zu einem der reichsten und bestgeordneten in Deutschland entwickelte. Pflanzen sind organische Wesen, die einer verständnis- und liebevollen Wartung bedürftig sind. Es kam unserem Garten zugute, daß seine Pfleger nicht bloß ausgezeichnete Floristen waren, sondern auch ein Herz für die lebende Pflanze hatten. Am nächsten, so meine ich als Laie, muß doch auch dem Botaniker das

jenige liegen, was noch lebt. Dekorativer Wirkung darf selbstverständlich in einem botanischen Garten nicht die Bedeutung eingeräumt werden, wie in einem Ziergarten, doch schon der Name Sckell bürgte dafür, daß auch auf anmutige Formen und Umrisse, auf harmonische Übergänge der Baumarten, auf Abstufung der Farbentöne von Blumen und Strauchwerk jede mögliche Rücksicht genommen wurde. Nicht minder wurde auf Einbürgerung seltener Arten aus allen Teilen der alten und neuen Welt, insbesondere unter der Leitung des berühmten Erforschers der brasilianischen Flora, Karl von Martius, rege Sorgfalt verwendet.

Einen schweren Schlag erlitt jedoch der Garten im Jahre 1854 durch den Beschluß der Regierung, den zur Aufnahme der Industrieausstellung bestimmten Glaspalast in den botanischen Garten zu verlegen und mitten durch eine öffentliche Straße zu ziehen. Es soll anfänglich geplant gewesen sein, den Glaspalast selbst nach Beendigung der Ausstellung als Gewächshaus zu benützen; der Gedanke konnte aber natürlich nicht verwirklicht werden, denn wie hätten so ungeheuere Räume erwärmt werden sollen? Martius verglich seinen geliebten Garten nach der Katastrophe des Jahres 1854 mit einem Menschenkörper, in welchem alle Sehnen entzwei geschnitten seien. Die Besorgnis war nicht unbegründet, aber übertrieben. Dem erhöhten Eifer der Beamten und Bediensteten gelang es, die Umwandlung des Gartens so glücklich durchzuführen, daß er nach wie vor zu wissenschaftlichen Untersuchungen reiches Material lieferte, den Künstlern zu mannigfaltigen Studienzwecken diente und zahlreiche Gäste zu harmloser Naturbeobachtung anregte.

In dieser Gestalt ist er unser aller Liebling gewesen, und es läßt sich wohl verstehen, daß der verehrte Kollege Radlkofer, der hier sein Leben lang „die Arbeit und das Wirken der Pflanzen" liebevoll beobachtet hat, die tröstliche Oase nicht aufgegeben wissen will.

Und doch muß ernstlich die Schöpfung eines neuen botanischen Gartens ins Auge gefaßt werden! Gerade der zart-

fühlende Freund der Pflanzenwelt darf sich dieser Forderung nicht länger verschließen. Wenn Sckell für verbürgt erachtete, daß der Garten niemals durch Umbauung geschädigt werden könnte, so ist dieser Erwartung nicht entsprochen worden; er ist heute auf allen Seiten von teilweise sehr hohen Gebäuden — es sei nur an den Justizpalast, die Töchterschule u. s. w. erinnert — eng umschlossen, so daß ihm nicht mehr soviel Luft und Licht vergönnt ist, als zum Fortkommen empfindlicher Pflanzenarten notwendig wäre. Noch schädlicher — ich bediene mich der Worte des sachkundigsten Gewährsmannes, unseres Kollegen Goebel selbst — wirkt die Rauchentwicklung, die hauptsächlich infolge der beständigen Erweiterung des nahen Bahnhofes unerträglich geworden ist und Hunderten von Pflanzen einen frühen Tod bringt. Die Gewächshäuser sind, obwohl auf ihre Reinigung jährlich große Summen verwendet werden, fast beständig mit einer Rußschichte bedeckt, die den Warmhauspflanzen das unentbehrliche Sonnenlicht entzieht oder doch verkümmert. Nadelholz kann überhaupt nicht am Leben erhalten werden, so daß den Schülern und dem Publikum die Gelegenheit benommen ist, sich mit den gewöhnlichsten Arten unserer Waldflora vertraut zu machen. Die Verhältnisse des Gartens sind überhaupt zu eng, zu kleinlich geworden; für die dringend wünschenswerte Ausbreitung des Alpinums, der biologischen Gruppen u. s. w. ist kein Raum mehr geboten. Die Gewächshäuser sind vor nahezu 50 Jahren gebaut worden; seither sind in Bezug auf Konstruktion, Heizung, Verglasung u. s. w. namhafte Fortschritte gemacht worden. Um einer größeren Anzahl Studierender mikroskopische Forschung zu ermöglichen, wurde 1891 das pflanzenphysiologische Institut errichtet; es reicht zur Zeit für Unterrichtszwecke gerade noch aus. Dagegen können die Räume für die Sammlungen nicht mehr genügen. Der riesig gesteigerte Weltverkehr, die Erschließung unbekannter Regionen in der alten und neuen Welt haben auch für die Botanik eine Fülle neuer Schätze und damit eine Fülle neuer Aufgaben gebracht. Unsere Herbarien können aber neue Bestände schlechterdings nicht mehr aufnehmen.

Und gänzlich fehlt es an Platz für ein wirkliches botanisches Museum, das den Studierenden und dem Publikum die Kenntnis aller pflanzlichen Rohstoffe für Medizin, Pharmazie, Industrie und Handel vermitteln könnte.

Allen diesen Übelständen kann nur durch Schöpfung eines neuen Gartens abgeholfen werden; deshalb hat sich das Generalkonservatorium in voller Übereinstimmung mit dem Konservatorium des botanischen Gartens und des pflanzenphysiologischen Instituts schon vor drei Jahren für möglichst baldige Verlegung ausgesprochen, und von der K. Staatsregierung wird die Angelegenheit mit ernster Sorgfalt behandelt.

Freilich ist ausgeschlossen, daß sich wieder ein Platz findet, der allen Besuchern so leicht zugänglich wäre, wie der jetzige. Die Studierenden werden nicht mehr so rasch und bequem in die botanischen Lehrgebäude gelangen; auch den Beamten und Lehrern wird ihre Tätigkeit erheblich erschwert werden. Und große Summen, darüber darf man sich nicht täuschen, werden, wenn man schon aus hygienischen Gründen den sogenannten kleinen Garten nicht der Privatspekulation überlassen will, aufgebracht werden müssen. Der botanische Garten in Dahlem bei Berlin hat mehrere Millionen gekostet. Minderwertiges darf auch in München nicht geschaffen werden.

Doch diese Gründe gegen die Verlegung des alten Gartens werden durch die wichtigeren Vorteile einer neuen Schöpfung aufgewogen.

Daß der botanische Unterricht der studierenden Jugend auch an einem von der Universität, ja sogar von der Universitätsstadt weit entfernten Platze erteilt werden kann, ist eine bereits erwiesene Tatsache; der Garten in Dahlem ist viel weiter von Berlin entfernt, als z. B. Nymphenburg von München. Und der erste Zweck eines botanischen Gartens, der mächtig fortschreitenden Wissenschaft einen der Entwicklung förderlichen Boden zu unterbreiten, kann eben nur durch Anlage eines geräumigeren, mit allen Errungenschaften der Wissenschaft und der Technik ausgestatteten Pflanzengartens erfüllt werden.

Glücklicherweise fallen in dieser Frage die Interessen der Wissenschaft und der Kunst, des Staates und der Stadt zusammen.

Die Künstlerschaft Münchens wird ihre Ausstellungen nicht mehr lange in dem baufälligen Glaspalast abhalten können; die Errichtung eines neuen Ausstellungsgebäudes ist unabweisbares Bedürfnis.

Der Staat Bayern und die Stadt München haben, was mühelos nachzuweisen wäre, ebenso ein wirtschaftliches wie ein geistiges Interesse an Erfüllung berechtigter Wünsche der Vertreter von Kunst und Wissenschaft. Welche Schwierigkeiten auch immer dem großen Unternehmen sich entgegenstellen mögen: wenn alle beteiligten Faktoren einmütig, eifrig und opferwillig zusammenwirken, ist eine würdige Lösung der Aufgabe mit Sicherheit zu erhoffen. Möge der holde Genius der scientia amabilis zu fröhlichem Gelingen seinen Segen spenden!

Aus den Zinsen der Adolf v. Baeyer-Jubiläums-Stiftung wurden bewilligt:

1. dem Privatdozenten für Chemie Dr. Heinrich Wieland in München zur Beschaffung von Chemikalien 300 M.;
2. dem Professor Dr. Karl Hofmann in München zur Beschaffung radioaktiver Schwermetalle 300 M.;
3. dem Privatdozenten Dr. Julius Sand in München zur Beschaffung von Apparaten für physikalisch-chemische Messungen 200 M.

Hierauf verkündigte der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, die Wahlen der mathematisch-physikalischen Klasse. Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zum außerordentlichen Mitgliede:

Dr. Karl Hofmann, außerordentlicher Professor für anorganische Chemie an der hiesigen Universität;

zu korrespondierenden Mitgliedern:

1. Dr. Wilhelm Fiedler, Professor für darstellende und synthetische Geometrie an der eidgenössischen technischen Hochschule in Zürich;
2. Dr. August Froriep, ordentlicher Professor der Anatomie an der Universität in Tübingen;
3. Dr. Karl Rabl, ordentlicher Professor der Anatomie an der Universität in Leipzig;
4. Dr. Ernst Stahl, Professor der Botanik an der Universität in Jena;
5. Dr. Hermann Carl Vogel, Geheimer Regierungsrat, Professor und Direktor des astrophysikalischen Laboratoriums in Potsdam;
6. Dr. Veit Brecher Wittrock, Professor der Botanik an der Universität und Direktor des botanischen Gartens in Stockholm.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 1. Dezember 1906.

Herr Hugo v. Seeliger hält einen Vortrag über: „**Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung des inneren Planeten.**"

Nur in ganz wenigen Fällen reicht das Newtonsche Anziehungsgesetz scheinbar nicht aus, die beobachteten Bewegungen im Planetensystem vollständig zu erklären. Die größte dieser Anomalien ist eine von Leverrier entdeckte Bewegung des Perihels der Merkurbahn von etwa 40 Sekunden im Jahrhundert, welche die Theorie nicht ergibt, die aber durch die Beobachtungen zweifellos festgestellt ist. Der Vortragende erblickt den Grund des Widerspruchs zwischen Theorie und Beobachtung darin, daß bisher die Einwirkung fein verstreuter Materie innerhalb des Planetensystems auf die Planeten nicht genügend berücksichtigt worden ist. Diese fein verstreute Materie bietet den Anblick des Zodiakallichts dar. Bei nahe liegenden Annahmen über die Flächen gleicher Dichtigkeit in dem Gebilde des Zodiakallichts gelingt es in der Tat alle bisher bemerkten Widersprüche zu beseitigen. Die Dichtigkeit der Massenverteilung kann dabei äußerst gering sein. Selbst im Maximum braucht nur in jedem Kubikkilometer sich eine Masse vorzufinden, gleich der eines Würfels Wasser, dessen Seitenlänge kaum 1/3 Meter beträgt.

Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der innern Planeten.

Von **H. Seeliger.**

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Nur in ganz wenigen Fällen ist es bisher der Astronomie nicht gelungen, die beobachteten Bewegungen, der erlangten Genauigkeit entsprechend, als reine Folge der Newtonschen Gravitation darzustellen. Beschränkt man sich auf die Bewegungen der großen Planeten, so ist insbesondere in einem Fall eine allerdings erhebliche Differenz zwischen Theorie und Beobachtung hervorgetreten. Auf ihn bezieht sich die vielbesprochene Entdeckung Leverriers, der vor mehr als 40 Jahren fand, daß die Perihellänge der Merkurbahn sich im Jahrhundert um rund 40'' schneller vorwärts bewegt, als die allein auf die gegenseitige Anziehung der Planeten gegründete Theorie ergibt. Diese Leverriersche Entdeckung ist von vielen Seiten nachgeprüft worden. Stets ergab sich eine Bestätigung auch in quantitativer Beziehung, so daß man das tatsächliche Vorhandensein dieser Anomalie als absolut feststehend bezeichnen muß. Die eingehendsten Nachforschungen in dieser Richtung verdankt man S. Newcomb, der über Leverrier hinausgehend, bei allen vier inneren Planeten und zwar in allen Bahnelementen nach etwaigen anderen empirischen Gliedern suchte, indem er die Säkularveränderungen der Bahnelemente einerseits empirisch bestimmte, andererseits nach der Newtonschen Theorie berechnete. Die so gefundenen Differenzen in den hundertjährigen

Veränderungen im Sinne Beobachtung — Theorie, nebst ihren wahrscheinlichen Fehlern sind folgende:[1])

	Merkur	Venus	Erde	Mars
$\frac{de}{dt} =$	$-0''.88 \pm 0''.50$	$+0''.21 \pm 0''.31$	$+0''.02 \pm 0''.10$	$+0''.29 \pm 0$[illegible]
$e\frac{d\pi}{dt} =$	$+8.48 \pm 0.43$	-0.05 ± 0.25	$+0.10 \pm 0.13$	$+0.75 \pm 0.$[illegible]
$\frac{di}{dt} =$	$+0.38 \pm 0.80$	$+0.38 \pm 0.33$	—	$-0.01 \pm 0.$[illegible]
$\sin i \frac{d\Omega}{dt} =$	$+0.61 \pm 0.52$	$+0.60 \pm 0.17$	—	$+0.03 \pm 0.$[illegible]

Die angeführten wahrscheinlichen Fehler mögen vielleicht nicht die ganze Unsicherheit der Resultate angeben. Immerhin wird man doch zugeben müssen, daß einige dieser Glieder nicht ohne weiteres als nicht reell angesehen werden dürfen. In jedem Falle werden solche Annahmen, welche etwa zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels gemacht werden, den Vorzug verdienen, welche auch die anderen Newcombschen Glieder ihren Fehlern entsprechend miterklären. Nur das Glied in der Exzentrizität der Merkurbahn und ebenso der anderen Planetenbahnen muß zunächst unberücksichtigt bleiben, da zu seiner Erklärung andere Annahmen, als bis jetzt gebraucht worden sind, nötig wären. Newcomb selbst ist der Meinung, daß bei Merkur der wahrscheinliche Fehler zu klein herausgekommen ist und dieses Glied, zunächst wenigstens, als nicht reell angesehen werden darf.

2.

Die Zahl der Hypothesen, welche zur Erklärung der Bewegung des Merkurperihels aufgestellt worden sind, ist nicht klein. Sie sind zum Teil von Newcomb a. a. O. erwähnt und in einer Weise kritisiert worden, der man in den meisten Punkten beistimmen wird können. Lange Zeit wurde, namentlich im

[1]) S. Newcomb, the Elements of the four inner Planets etc. Washington 1895, S. 108.

Anschluß an Leverrier selbst, die Annahme intramerkurieller Planeten in kleiner oder größerer Zahl oder selbst in volle Planetenringe aufgelöst, bevorzugt. Die formale Seite der Frage wurde öfters, so von Newcomb und Bauschinger,[1]) untersucht. In dieser Beziehung genügt die erwähnte Annahme den zu stellenden Anforderungen ziemlich befriedigend, wenn man sie in Verbindung mit einer säkularen Drehung des empirischen, in der Astronomie gebrauchten Koordinatensystems zur Anwendung bringt. Sie rechnet aber, abgesehen vielleicht noch von anderen Bedenken, mit Verhältnissen, wenigstens wenn man den allerdings negativen Aussagen der Beobachtung entsprechend die Anzahl der einzelnen Massen des Ringes groß annimmt, welche sich zunächst weder erweisen noch widerlegen lassen, und die also zu derjenigen Klasse von Hypothesen gerechnet werden muß, die man als unnötige bezeichnen kann. Vorausgesetzt natürlich, daß man eine mehr ansprechende Annahme machen kann.

Nicht so gut entspricht in formaler Beziehung die Annahme ungleicher Hauptträgheitsmomente des Sonnenkörpers, die ebenfalls vielfach, besonders eingehend von P. Harzer[2]) untersucht worden ist, da der Sonnenäquator seiner Lage nach ziemlich sicher bekannt ist und man doch wohl annehmen muß, daß die Hauptachsen im Äquator und in der Rotationsachse liegen. Aber dieser Annahme wird durch die Beobachtungen an der Sonne entschieden widersprochen, denen zufolge die in verschiedenen Richtungen gemessenen Durchmesser sich kaum um mehr als etwa 0."1 voneinander unterscheiden können. Dagegen erfordert die obige Annahme, daß der äquatoriale Sonnendurchmesser um etwas mehr als 1" größer als der polare sein muß. Dieses Resultat läßt sich streng aus gewissen Voraussetzungen mit wenigen Worten ableiten, weshalb ich kurz darauf eingehe, obwohl ja die Frage durch die Rechnungen des Herrn Harzer

[1]) J. Bauschinger, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur. München 1884.

[2]) Paul Harzer, Über die Bewegung des Merkurperihels. Astron. Nachr. Nr. 3030 (1891).

als erledigt betrachtet werden darf. Sind C und A die beiden Hauptträgheitsmomente der Sonne in Bezug auf die Drehachse und in Bezug eine im Äquator gelegene Achse, wobei das dritte Trägheitsmoment dem A gleich angenommen wird, M die Sonnenmasse, n, a, π die mittlere Bewegung, mittlere Entfernung von der Sonne und Länge des Perihels eines Planeten, so ist für hinreichend kleine Exzentrizitäten und Neigungen bekanntlich die säkulare Veränderung von π gegeben durch:

$$\frac{d\pi}{dt} = \tfrac{3}{2}(C - A) \cdot \frac{n}{a^2 M}.$$

Die Abplattung ε der Sonnenoberfläche ist andererseits nach einem vielgebrauchten Satze der Himmelsmechanik gegeben durch:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\Phi + \tfrac{3}{2}\,\frac{C - A}{R^2 M},$$

wo R der Sonnenradius und Φ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Anziehung im Äquator ist. Diese Formel setzt nichts über die Dichtigkeitszunahme in der Richtung zum Zentrum des Sonnenkörpers voraus, nur wird angenommen, daß sich das Innere der rotierenden flüssigen Masse im Gleichgewicht befindet. Daraus folgt aber für die Abplattung des Sonnenkörpers:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\Phi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{d\pi}{dt}.$$

Soll demnach die Bewegung des Merkurperihels durch eine Verschiedenheit der Trägheitsmomente der Sonne erklärt werden, so muß $\frac{d\pi}{dt} = 40''$ im Jahrhundert gesetzt werden und da $\Phi = 0.000020$ ist, folgt $\varepsilon = 0.000525$. Danach muß der äquatoriale Sonnendurchmesser (α) 1.″01 größer sein als der polare (β), was mit den Angaben des Herrn Harzer gut stimmt. Die Messungen an der Sonne geben sicherlich kaum $\alpha - \beta = 0.''1$.

Wird die Sonne als homogen betrachtet, so gibt bekanntlich die Gleichgewichtstheorie $\alpha - \beta = 0.''05$. Nimmt man andererseits das andere Extrem an, nämlich, daß die Masse

unendlich zusammendrückbar ist, daß also die ganze übrige Sonnenmasse gegenüber der in der Nähe des Zentrums befindlichen zu vernachlässigen ist, so ergibt sich leicht $\alpha - \beta = 0\rlap{.}''02$. Nach diesen Daten dürfte es jedenfalls aussichtslos sein, die Merkurperihelbewegung durch ungleiche Verteilung der Masse der Sonne in ihrem Innern zu erklären, selbst wenn man von den Bedingungen des Gleichgewichts absieht.

Von physikalischer Seite beeinflußt, hat man bald nach der Leverrierschen Entdeckung und seit jener Zeit in den verschiedensten Formen durch mehr oder weniger ansprechende Überlegungen eine Modifikation des Newtonschen Fernwirkungsgesetzes zu finden gesucht, welche die Anomalie in der Bewegung des Merkurperihels zu erklären imstande wäre. Der Erfolg ist in formaler Beziehung im ganzen ausgeblieben, d. h. es gelang in den meisten Fällen nicht, den festgestellten Betrag dieser Bewegung herzuleiten. Überdies hat man hierbei von vornherein darauf verzichtet oder verzichten müssen, die anderen Newcombschen empirischen Glieder zu erklären. Das letztere dürfte allerdings, in erster Annäherung, vielleicht als zulässig angesehen werden können. Wie dem auch sein möge, als besonders geeignet wurde in letzter Zeit eine Modifikation des Newtonschen Gesetzes betrachtet, derzufolge der Exponent 2 der reziproken Entfernung durch einen um eine sehr kleine Größe vermehrten $2 + \lambda$ zu ersetzen wäre. Schon in Newtons Prinzipien ist der Satz abgeleitet, daß hierdurch eine säkulare Bewegung des Perihels in positivem Sinne entsteht und die Mathematiker Green und Carl Neumann[1]) haben sich dieses Gesetzes angenommen und es im Gebiete der Elektrizität verwertet. Der Verwendung eines solchen Gesetzes in der Astronomie stehen indessen ernstliche Bedenken entgegen. Bleibt man auf dem Boden der Fernwirkungstheorie, so wird ein solches allerdings akzeptabel sein, da es in der Tat bei passender Wahl von λ die Bewegung des Merkurperihels in gewünschtem Betrage

[1]) Carl Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig 1896.

ergibt ohne bei den anderen Planeten Beträge für ähnliche Glieder zu erfordern, die den Beobachtungen widersprechen. Dagegen stellen sich Bedenken allgemeinerer Art ein. Ich habe zu wiederholten Malen[1]) darauf aufmerksam gemacht, daß das Newtonsche Gesetz kein strenger und unbedingt geltender Ausdruck für die im Weltall herrschenden Anziehungen sein kann, indem man auf lästige, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeiten stößt, wenn man dieses Gesetz auf beliebig große, mit Masse erfüllte Räume anwendet. Letzteres muß aber erlaubt sein, da das Newtonsche Gesetz ein Universalgesetz, d. h. unter allen Umständen genau gültig sein soll. Diese Bedenken sind, wie ich glaube, durch die dagegen erhobenen Einwände, nur gewichtiger geworden. Nach meiner Meinung müßte demnach, wenn man an eine solche rein formale Modifikation des Ausdrucks für die Newtonsche Fernwirkung denken will, diesen Bedenken Rechnung getragen werden. Das Greensche Gesetz ist aber, wie ich nachgewiesen habe, nicht geeignet, dies zu leisten.

Verläßt man aber den Boden der Fernwirkungstheorie, so wird man kaum erwarten dürfen, durch irgendwelche physikalische Überlegungen oder Annahmen zu einem ähnlich einfachen Gesetze zu gelangen, wie das Greensche. Ich kann mich deshalb nicht der Meinung anschließen, wonach durch die Annahme dieses Gesetzes eine brauchbare oder befriedigende Erklärung der Bewegung des Merkurperihels angebahnt sein soll.

3.

Die theoretische Astronomie hat die Bewegungen im Planetensystem mit Berücksichtigung aller vorhandenen Massen zu erklären und in dieser Beziehung alles zu versuchen, ehe sie zu einer Modifikation ihrer Grundlagen oder zur Annahme unsichtbarer Massen oder dergleichen greift. Zu diesen jedenfalls vorhandenen, weil sichtbaren Massen gehören aber die Massen,

---

[1]) Über das Newtonsche Gravitationsgesetz. Astron. Nachrichten Nr. 3273 und Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1896.

welche das Zodikallicht erzeugen oder kurz gesagt das Zodiakallicht.

Ich hatte bei verschiedenen Gelegenheiten[1]) Veranlassung, mich der Ansicht anzuschließen, nach der die Erscheinung des Zodiakallichts auf fein zerstreute Materie zurückzuführen ist, die um die Sonne herumgelagert ist und nachweisbar über die Erdbahn hinausreicht. Über die Dichtigkeitsverteilung in dieser Masse läßt sich zur Zeit Genaueres nicht aussagen; aber nichts spricht dagegen, daß die Flächen gleicher Dichtigkeit scheibenförmige Rotationsflächen sind und die Dichtigkeit mit der Entfernung von der Sonne abnimmt. Früher nahm man den Äquator dieser Flächen als nahezu in der Ekliptik liegend an, neuere Beobachter dagegen sind geneigt, ihn mit größerer Annäherung mit dem Sonnenäquator zusammenfallen zu lassen. Damit soll nicht gesagt sein, daß alle Flächen gleicher Dichtigkeit genau dieselbe Rotationsachse haben, denn wie sich die der Sonne nächsten Teile des Zodiakallichts in dieser Richtung verhalten, wird sich wohl schwerlich feststellen lassen, ist jedenfalls bisher völlig unaufgeklärt geblieben, da man die Erscheinung des Zodiakallichtes sicher nicht bis zu kleineren Winkelabständen von der Sonne, als 20 oder 30 Grad, verfolgen kann. Zudem kann die Massendichtigkeit aus der beobachteten Lichtverteilung keineswegs hypothesenfrei abgeleitet werden, denn die letztere ist nicht nur von der Dichtigkeit der Massenverteilung sondern auch von dem Volumen der einzelnen Teilchen, welche das Zodiakallicht bilden, abhängig. Je größer die Anzahl der Teilchen ist, in welche dieselbe Masse zerteilt ist, desto größer ist unter sonst gleichen Umständen die Flächenhelligkeit des zurückgeworfenen Sonnenlichts.

Man hat demnach eigentlich kein anderes Mittel zur Bestimmung der Massendichtigkeit im Zodiakallicht, als das Studium der von ihm ausgehenden Anziehungskräfte. Daß solche vor-

[1]) U. A. a) Über allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Verlag der Münchener Akademie, 1892.

b) Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1901.

handen sein und die Bewegungen der Planeten beeinflussen müssen, ist selbstverständlich zweifellos und nur über die Größe dieser Einwirkung können die Meinungen auseinandergehen.

Mit einiger Sicherheit darf behauptet werden, daß sich die Masse des Zodiakallichts symmetrisch um eine Ebene gruppiert, von der wir allerdings nicht wissen, ob sie der Ekliptik oder dem Sonnenäquator näher liegt. Es ist ferner ziemlich sicher, daß in der Erscheinung des Zodiakallichts die Jahreszeit so gut wie keine Rolle spielt. Man wird danach die Dichtigkeit q als Funktion nur von der Entfernung von der Sonne (ϱ) und des Winkelabstandes ϑ von dem Pole der Symmetrieebene ansehen dürfen. Es kann also q als eine Kugelfunktionsreihe:

$$q = {}_n\sum_0^\infty A_n P^n(\cos\vartheta)$$

angenommen werden, in der die Koeffizienten A_n Funktionen von ϱ sind. Wegen der erwähnten Symmetrie wird ferner n eine gerade ganze Zahl sein. Nimmt man nun an, daß die genannte Reihenentwicklung für q so aufgestellt werden kann, daß sie für alle innerhalb einer Kugel vom Radius r_1 liegenden Punkte gilt, wo also r_1 die Maximalausdehnung des Zodiakallichts ist, dann läßt sich die Störungsfunktion Ω, welche bei der Bewegung des inneren Planeten in Betracht zu ziehen ist, sehr einfach darstellen. Denn es ist zunächst:

$$\Omega = k^2 \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{r_1} \varrho^2 q\, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta}\,.$$

wo Δ die Entfernung des Planeten ($r\,\vartheta_1\,\varphi_1$) und eines Massenteilchens ($\varrho\,\vartheta\,\varphi$) ist und k die Gaußsche Konstante bedeutet. Ist noch γ der Winkel zwischen ϱ und r, so hat man:

$$\frac{1}{\Delta} = {}_n\sum_0^\infty \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P^n(\cos\gamma) \quad \ldots \quad \varrho < r$$

$$\frac{1}{\Delta} = {}_n\sum_0^\infty \frac{r^n}{\varrho^{n+1}} P^n(\cos\gamma) \quad \ldots \quad \varrho > r.$$

Setzt man dies und die Reihe für q in den Ausdruck für Ω ein, so ergibt die Anwendung sehr bekannter Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen:

$$\Omega = 4\pi k^2 \cdot {}_n\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} P^n(\cos\vartheta) \left\{ \int_0^r \frac{\varrho^{n+2}}{r^{n+1}} A_n \, d\varrho + \int_r^{r_1} \frac{r^n}{\varrho^{n-1}} A_n \, d\varrho \right\}.$$

Die weitere Entwicklung hängt von der Form ab, welche die A_n als Funktionen von ϱ haben. Man könnte gegebenenfalls sich die A_n stets als Potenzreihen, welche nach ganzen positiven und negativen Potenzen von ϱ fortschreiten (da die Umgebung des Punktes $\varrho = 0$ ausgeschlossen erscheint), denken, und da man nur den säkularen Teil von Ω brauchen wird, wären die säkularen Teile von:

$$r^m P^n(\cos\vartheta), \quad \log r \cdot P^n(\cos\vartheta),$$

wo m positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, zu entwickeln. Das ist leicht in der gewöhnlichen Weise durch Rechenentwicklungen und in mathematisch annehmbarerer Form durch Einführung von Funktionen, die den Kugelfunktionen verwandt sind, auszuführen. Doch hätte die Mitteilung der betreffenden Formeln für die vorliegenden Fragen keine Bedeutung, denn es ist gegenwärtig unmöglich die Entwicklung von q etwa anderswoher zu nehmen und andererseits ist die Einwirkung des Zodiakallichts auf die Bewegung der Planeten so klein und dergestalt, daß eine Bestimmung der wirksamen Koeffizienten durch diese Störungen nicht wohl auszuführen wäre. Man wird vielmehr nur zu einem befriedigenden Ziele gelangen, wenn man von vornherein über die Gestalt der Flächen gewisse Annahmen macht, die man natürlich, dem Gesagten zufolge, als mehr oder weniger plausibel ansehen mag. Hält man daran fest, daß die genannten Flächen ähnlich plattgedrückten Scheiben aussehen müssen, dann kann man die näheren Bestimmungsstücke innerhalb gewisser Grenzen variieren, ohne einen schlechteren Anschluß an die Beobachtungsdaten befürchten zu müssen. Man wird deshalb die spezielleren Daten so wählen können, daß die auszuführende Rechnung verhältnismäßig einfach wird.

Da bietet sich nun zunächst die Annahme dar, daß man das Zodiakallicht aus lauter Schichten, welche zwischen zwei Umdrehungsellipsoiden mit großen Abplattungen liegen, bestehen läßt. Man kann jedenfalls eine, vielleicht auch mehrere stetige Dichtigkeitsänderungen von Schicht zu Schicht so wählen, daß das Potential der ganzen Masse auf innere Punkte durch weitere Entwicklung auch für die numerische Rechnung brauchbar zum Ausdrucke gebracht wird. Indessen wird man in gewissem Sinne allgemeiner und zweckmäßiger so verfahren, daß man eine endliche Zahl beliebiger homogener Ellipsoide mit gleichem Mittelpunkt in der Sonne übereinanderlegt und die Dichtigkeit dieser Ellipsoide ebenso wie ihre Lage und Größenverhältnisse so wählt, wie den darzustellenden Anomalien in den Bewegungen der inneren Planeten angemessen ist. Die einzelnen Ellipsoide müssen so gelegt werden, daß ihre Oberflächen von keiner Planetenbahn geschnitten werden. Diesen Weg habe ich vor 13 Jahren beschritten, mußte damals aber den Abschluß meiner Rechnungen aufgeben, da die Newcombschen Zahlen noch nicht vorlagen, somit irgendwelche Handhabe zu einer Prüfung nicht vorhanden war.

4.

Man muß also die säkularen Störungen, denn diese kommen allein in Betracht, in angemessener Form berechnen, welche ein homogenes Rotationsellipsoid auf innere und äußere planetarisch bewegte Punkte ausübt. Zu diesem Zwecke ist der säkulare Teil des Potentiales eines homogenen aber beliebig stark abgeplatteten Ellipsoides abzuleiten. Bei dieser Rechnung kann man von den Potentialen V_a und V_i eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit den Axen a, a und b und der homogenen Dichtigkeit q auf äußere und innere Punkte in der integrierten Form ausgehen. Viel einfacher ist es aber, wenn man zuerst die Ausdrücke unter dem Integral entwickelt und dann erst die Integration ausführt, wobei nur bekannte Formeln anzuwenden sind. Beide Methoden geben selbstverständlich übereinstimmende Resultate.

Ist noch k die Gaußsche Konstante und setzt man:

$$\frac{V}{k^2 \pi q a^2 b} = \Omega,$$

so ist bekanntlich für äußere Punkte:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2}{b^2 + \sigma}\right) \cdot \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}},$$

wo λ_1 bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda_1} = 1.$$

Für innere Punkte ergibt sich Ω_i, wenn in Ω_a $\lambda_1 = 0$ gesetzt wird. Setzt man hierin noch:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so wird also:

$$\Omega_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right) \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)(\sqrt{b^2 + \sigma})} \quad (1)$$

und:

$$\frac{r^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{z^2 \cdot (a^2 - b^2)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)} = 1. \quad (2)$$

Für innere Punkte ist dagegen das zugehörige Potential:

$$\Omega_i = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{r^2}{a^2 + \sigma} - \frac{z^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)}\right] \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}}.$$

Die Berechnung der säkularen Störungen, welche die inneren Planeten durch diese Potentiale erleiden, kann nun dadurch ausgeführt werden, daß man die in den bekannten Ausdrücken für diese Störungen vorkommenden Differentialquotienten von Ω nach den Elementen bildet und dann die Integrale in Bezug auf den ganzen Umkreis der mittleren Anomalie auf mechanischem Wege ermittelt. In einem gegebenen speziellen Falle wäre dies[illegible] rechnerisch vielleicht das einfachere. W[illegible] [illegible]olt ähnliche

Rechnungen mit abgeänderten Daten ausführen, dann ist es angemessen, die Unbequemlichkeit einer allgemeinen analytischen Entwicklung nicht zu scheuen.

Im vorliegenden Falle, wo es sich um die inneren Planeten handelt, dürfen nun die Bahnexzentrizitäten und die Bahnneigungen gegen die Ekliptik oder andere gegen sie nicht beträchtlich geneigte Ebenen als kleine Größen betrachtet werden, nach deren Potenzen brauchbare Entwicklungen von Ω fortschreiten werden. Für die Planeten Venus, Erde und Mars wird man dann, da es sich doch nur um mäßig genaue Entwicklungen handelt, bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben können. Es ist leicht einzusehen, daß die Endresultate kaum wesentlich sich ändern werden, wenn man auch in Bezug auf die Merkurbahn dieselbe Einschränkung der Entwicklung gelten läßt und ich habe vorläufige Rechnungen tatsächlich so ausgeführt. Jetzt soll die Entwicklung auf breiterer Grundlage ausgeführt werden und zwar so, daß auch für Merkur die größten Glieder bis auf 3 bis 4 Stellen genau herauskommen.

Im folgenden wird die sogenannte Elliptizität λ:

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad (3)$$

eingeführt. Damit bestimmt sich der hier in Frage kommende Wert von λ_1 nach (2):

$$\lambda_1 + b^2 = \frac{r^2 - \lambda^2 b^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - \lambda^2 b^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2 b^2}\,.$$

Bezeichnet man mit a_1 die mittlere Entfernung des in Betracht zu ziehenden Planeten und setzt man:

$$r = \varrho = a_1 + u,$$

so wird u eine kleine Größe sein und es soll also das Potential Ω nach Potenzen und Produkten von u und $\zeta^2 = Z$ entwickelt werden.

Bezeichnet man die Werte der Differentialquotienten für $u = 0$ und $Z = 0$ durch Hinzufügung des Index 0, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega = \Omega_0 &+ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}\right)_0 u + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_0 \cdot z^2 \\
&+ \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 u^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho \partial \zeta}\right)_0 u z^2 + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2}\right)_0 z^4\right] \frac{1}{1 \cdot 2} \\
&+ \left\{\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^3}\right)_0 u^3 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho^2 \partial \zeta}\right)_0 u^2 z^2 + 3\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \varrho \partial \zeta^2}\right)_0 u z^4 \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \zeta^3}\right) \cdot z^6\right\} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
&+ - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Bei der Differentiation des Integrals für Ω_a kann man die Grenze λ_1 konstant halten, weil für $\sigma = \lambda_1$ der Ausdruck unter dem Integral nach (2) verschwindet, wodurch die weitere Ausrechnung wesentlich vereinfacht wird. Das Glied:

$$\Omega_0 = \mathrm{I} - a_1^2 \,\mathrm{II},$$

wo:

$$\mathrm{I} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)\sqrt{b^2 + \sigma}}; \quad \mathrm{II} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)^2 \sqrt{b^2 + \sigma}},$$

kann man ganz fortlassen, da es nur vom Bahnelement a_1 abhängt und Differentialquotienten nach a_1 im folgenden nicht vorkommen. Es tritt noch das Integral:

$$\mathrm{III} = \int_{\lambda_1^0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(a^2 + \sigma)^2 (b^2 + \sigma)^{\frac{1}{2}}}$$

auf. Hier ist λ_1^0 der Wert von λ_1 für $u = z^2 = 0$, also:

$$(\lambda_1^0)^2 + b^2 = a_1^2 - a^2 + b^2 = a_1^2 - \lambda^2 b^2.$$

Am einfachsten für die numerische Rechnung scheinen sich die Formeln zu gestalten, wenn man:

$$\xi^2 = \frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2 - \lambda^2 b^2} \quad (5)$$

einführt, woraus u. a. folgt:

$$a_1^2 = \lambda^2 b^2 \cdot \frac{1+\xi^2}{\xi^2}.$$

Die oben erwähnten Integrale I, II und III sind bekanntlich leicht ausführbar und man findet:

$$\mathrm{I} = \frac{2}{b\lambda} \operatorname{arctg} \xi; \quad \mathrm{II} = \frac{1}{b^3 \lambda^3}\left[\operatorname{arctg} \xi - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right]$$

$$(a^2 - b^2)\ \mathrm{III} = -\frac{3}{b^3 \lambda^3} \operatorname{arctg} \xi + \frac{1}{b^3 \lambda^3} \cdot \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2}.$$

Ich habe im folgenden noch die Bezeichnung benutzt:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\xi) &= 3 \operatorname{arctg} \xi - \frac{3\xi + 2\xi^3}{1+\xi^2} \\ \Psi_1(\lambda) &= 3\left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Berechnung des Differentialquotienten in (4) bietet nun höchstens einige Umständlichkeiten, aber keine Schwierigkeiten dar. Es wird genügen, ihre Werte in der definitiven Form anzuführen.

$$\left(\frac{\partial^1 \Omega_a}{\partial \varrho}\right)_0 = -\frac{1}{3 b^3 \lambda^3}\left[\Psi(\xi) + 2\xi \frac{\lambda^2 b^2}{a_1^2}\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_a}{\partial \varrho^2}\right)_0 = \quad \frac{\xi}{\lambda b a_1^4}$$

$$\left(\frac{\partial^3 \Omega_a}{\partial \varrho^3}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^6}\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\xi^2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Omega_a}{\partial \varrho^4}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^8}\left[\frac{35}{4} + \frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^2\right]$$

$$\left(\frac{\partial^5 \Omega_a}{\partial \varrho^5}\right)_0 = -\frac{\xi}{\lambda b a_1^{10}}\left[\frac{315}{8} + \frac{189}{8}\xi^2 + \frac{81}{8}\xi^4 + \frac{15}{8}\xi^6\right]$$

$$\left(\frac{\partial^6 \Omega_a}{\partial \varrho^6}\right)_0 = +\frac{\xi}{\lambda b a_1^{12}}\left[\frac{3465}{16} + \frac{693}{4}\xi^2 + \frac{891}{8}\xi^4 + \frac{165}{4}\xi^6 + \frac{105}{16}\xi^8\right].$$

Für die Differentialquotienten nach ζ findet man:

$$\left(\frac{\partial\,\Omega_a}{\partial\,\zeta}\right)_0 = \frac{1}{b^3\,\lambda^3}\,\Psi(\xi)$$

$$\left(\frac{\partial^2\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2}\right)_0 = +\frac{1}{b\,\lambda\,a_1^4}\,\xi^5$$

$$\frac{\partial^2\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho} = +\frac{1}{b\,\lambda\,a_1^4}\,\xi^3$$

$$\frac{\partial^3\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^2} = -\frac{\xi^3}{b\,\lambda\,a_1^6}\left[\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\,\xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^3\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2\,\partial\,\varrho} = -\frac{\xi^5}{\lambda\,b\,a_1^6}\left[\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\,\xi^2\right]$$

$$\frac{\partial^4\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^3} = +\frac{\xi^3}{b\,\lambda\,a_1^8}\left[\frac{63}{4}+\frac{27}{2}\,\xi^2+\frac{15}{4}\,\xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^4\,\Omega_a}{\partial\,\zeta^2\,\partial\,\varrho^2} = +\frac{\xi^5}{\lambda\,b\,a_1^8}\left[\frac{99}{4}+\frac{55}{2}\,\xi^2+\frac{35}{4}\,\xi^4\right]$$

$$\frac{\partial^5\,\Omega_a}{\partial\,\zeta\,\partial\,\varrho^4} = -\frac{\xi^3}{\lambda\,b\,a_1^{10}}\left[\frac{693}{4}+\frac{891}{8}\,\xi^2+\frac{495}{8}\,\xi^4+\frac{105}{8}\,\xi^6\right].$$

— — — — — — — — — — —

In Rücksicht auf die im Folgenden auftretenden Verhältnisse, denen zufolge bei Merkur zwar u beträchtlich, dagegen aber ζ sehr klein und bei den übrigen inneren Planeten, wo ζ merkbarer als u ist, reichen die angegebenen Werte zu einer für die vorliegenden Zwecke genügend sicheren Berechnung der säkularen Störungen sicherlich aus. Es sind nunmehr die **säkularen** Teile der Potenzen und Produkte von u und ζ zu berechnen. Ich bezeichne diese durch ein vorgesetztes S. Am einfachsten gewinnt man in den vorliegenden Fällen den säkularen Teil einer Funktion f von u und ζ durch Ausführung des Integrals:

$$S f(u,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u,\zeta)\cdot(1-e\cos E)\,dE,$$

worin selbstverständlich:

$$u = r^2 - a_1^2 \text{ und } \zeta$$

durch die exzentrische Anomalie E auszudrücken sind.

Auf diesem Wege findet man:

$$S(u) = \frac{3}{2} a_1^2 e^2$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} S(u^2) = a_1^4 \left(e^2 + \frac{15}{16} e^4\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} S(u^3) = a_1^6 \left(\frac{5}{4} e^4 + \frac{35}{96} e^6\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} S(u^4) = a_1^8 \left(\frac{1}{4} e^4 + \frac{35}{48} e^6 + \frac{105}{1024} e^8\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} S(u^5) = a_1^{10} \left(\frac{7}{24} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} S(u^6) = a_1^{12} \left(\frac{1}{36} e^6 \ldots\right).$$

Bei der Entwicklung der säkularen Teile von Größen, welche mit Potenzen von z^2 behaftet sind, soll bis zu Gliedern 6. Ordnung gegangen werden, wobei indessen Glieder von der Ordnung $z^4 e^2$ und z^6 und kleinere als unmerklich fortzulassen sind. Man kann nun weiter z in die Form bringen:

$$z = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v,$$

wo v die wahre Anomalie bedeutet. Man kann dann sofort z als Funktion der exzentrischen Anomalie darstellen und die obigen Integrale für $f(u\, z) = u^m z^n$ entwickeln. Bis zum angegebenen Genauigkeitsgrad findet sich dann:

$$S(z) = a_1 \left[B_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e [illegible] \right) + C_1 \left(\frac{1}{2} + 2 e [illegible] \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} S(z^2) = a_1^2 \cdot \frac{3}{16} (B_1^2 + C_1^2) [illegible]$$

$$S(z\, u) = [illegible] B_1 \frac{3}{8} + C_1 \frac{25}{8} [illegible] B_1 \frac{3}{8} + [illegible] C_1 \cdot \frac{9}{4}]$$

$$\frac{1}{2} S(z\, u^2) = [illegible] \left[B_1 \frac{1}{4} + C_1 \frac{3}{4} [illegible] B_1 \frac{3}{32} + [illegible] C_1 \frac{153}{32} \right]$$

$$\frac{1}{6} S(\varepsilon^2 u^3) = a_1^8 e^4 \left[B_1^2 \frac{5}{24} + C_1^2 \frac{49}{24}\right]$$

$$\frac{1}{24} S(\varepsilon^2 u^4) = a_1^{10} e^4 \left[B_1^2 \frac{1}{24} + C_1^2 \frac{5}{24}\right].$$

Bei der Zusammenfassung des Resultats für Ω_a nach Formel (4) empfiehlt sich folgende Schreibweise. Es sei q_0 die mittlere Dichtigkeit der Sonnenkugel, ϱ ihr Radius, n_1 die mittlere Bewegung des Planeten und $\mu = k^2$ die Anziehungskonstante, c eine passend zu wählende ganze Zahl derart, daß nicht zu große und nicht zu kleine Werte für die Koeffizienten hervorgehen. Ich setze dann:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{3}{4} \cdot \frac{q}{q_0} \cdot \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} 10^c \ldots \\ A_1 &= \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^3 \cdot \beta \cdot 10^{-c} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Dann ergibt sich für die in den Störungsformeln für die Elemente vorkommende Größe $\frac{a_1 n_1}{\mu} V_a$ folgender Ausdruck, wobei, wie schon erwähnt, die Glieder, welche nur das Element a_1 enthalten, der Einfachheit wegen fortgelassen worden sind:

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{a_1 n}{\mu} V_a\right) = A_1 n_1 \Big\{ & \Psi(\xi)\left[-\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2) + \left(2C_1^2 - \frac{1}{2}B_1^2\right)e^2\right]\Big\} \\ & + A_1 n_1 \frac{\xi^5}{1+\xi^2}\Big\{\frac{e^4}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\xi^2\right) + e^6\left[\frac{7}{24} + \frac{11}{16}\xi^2 + \frac{115}{192}\xi^4 \right. \\ & \left. + \frac{35}{192}\xi^6\right] + (B_1^2 + C_1^2)^2 \cdot \frac{3}{16}\xi^2 \\ & - e^2 B_1^2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\xi^2\right) + e^2 C_1^2\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\xi^2\right) \\ & - \frac{e^4 B_1^2}{64}(24 + 108\,\xi^2 + 115\,\xi^4 + 35\,\xi^6) \\ & - \frac{e^4 C_1^2}{64}(24 + 180\,\xi^2 + 335\,\xi^4 + 175\,\xi^6)\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für innere Punkte stellt sich die Endformel völlig streng in sehr viel einfacherer Gestalt dar. Man findet sofort:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1 n}{\mu} S(V_i) = A_1 n_1 \Big\{ -\tfrac{1}{2} e^2 \Psi_1(\lambda) + \tfrac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2)\Psi(\lambda) \\ + e^2 (2 C_1^2 - \tfrac{1}{2} B_1^2) \Psi(\lambda) \Big\} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Um alles beisammen zu haben sind nun noch die Größen B_1 und C_1 und ihre Differentialquotienten nach den Elementen: Länge des Perihels π, Länge des aufsteigenden Knoten Ω, Neigung der Bahnebene i zu berechnen, welche Elemente sich in üblicher Weise auf die Ekliptik und den Widderpunkt beziehen. Da sich z auf die Äquatorebene des Ellipsoids bezieht, ist:

$$z = r \sin i_1 \sin(v + \pi - \Omega - \delta) = B_1 r \sin v + C_1 r \cos v.$$

Hierbei bedeutet i_1 die Neigung der Ebene der Planetenbahn gegen den Äquator des Ellipsoids, δ ist die Winkeldistanz des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Äquatorebene von dem aufsteigenden Knoten derselben Bahnebene auf der Ekliptik in demselben Sinne wie π und Ω gezählt. Nennt man [illegible] J die Neigung des Äquators [illegible] die Länge [illegible] Knotens in Bezug auf die Ekliptik [illegible] W[illegible] Frage [illegible] Kreisen gebildeten sphärischen Dreieck: i_1, J [illegible] ersten Winkeln gegenüberliegenden Seiten [illegible] $\Omega - \Phi$ [illegible] δ. Man hat demnach:

$$\left.\begin{aligned} \sin i_1 \sin \delta &= \sin J \sin(\Omega - \Phi) \\ \sin i_1 \cos \delta &= \cos J \sin i - \sin J \cos i \cos(\Omega - \Phi) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und daraus ergibt sich sofort:

$$B_1 = \sin i_1 \cos(\pi - \Omega - \delta); \quad C_1 = \sin i_1 \sin(\pi - \Omega - \delta) \quad (11)$$

Die zweite Formel (10) wird für kleine Werte von J [illegible] und $\Omega - \Phi$, wie solche in der Tat bei Merkur vorkommen, praktisch unbrauchbar. Sie ist dann durch:

$$\sin i_1 \cos \delta = \sin(i - J) + 2 \sin J \cos i \sin^2 \frac{\Omega - \Phi}{2}$$

zu ersetzen.

Aus (11) ergibt sich nun sehr einfach:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \pi} = -C_1; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \pi} = +B_1$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial i} = \cos i_1 \cos(\pi - \Omega); \quad \frac{\partial C_1}{\partial i} = \cos i_1 \sin(\pi - \Omega)$$

und, was auch zur Kontrolle benutzt werden kann:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial i} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \cos \delta.$$

Ferner ergibt eine einfache Rechnung:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \Omega} = + C_1 + \sin J \sin(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \cos(\pi - \Omega)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \Omega} = - B_1 - \sin J \cos(\pi - \Phi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin i_1 \sin \delta \sin(\pi - \Omega).$$

Als Kontrollformel wird man die sehr einfache Relation zu verwenden haben:

$$\frac{\partial (B_1^2 + C_1^2)}{\partial \Omega} = 2 \sin i_1 \cos i_1 \sin i \cdot \sin \delta.$$

Nunmehr sind alle im Folgenden benutzten Formeln abgeleitet.

Es sei gleich bemerkt, daß für die innern Planeten folgende Daten benutzt worden sind, wobei das Jahrhundert als Zeiteinheit angesetzt ist:

	i	π	Ω	$\log e$	$\log \left(\frac{a_1}{\varrho}\right)^3 n_1$
Merkur	7°003	75°896	47°147	9.3131	14.4912
Venus	3.394	130.164	75.780	7.8320	14.8984
Erde	—	101.219	—	8.2241	15.1095
Mars	1.850	334.218	48.786	8.9699	15.3841.

Die in Frage kommenden Säkularänderungen der Planetenbahnelemente ergeben sich aus den bekannten Gleichungen:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = +\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\partial}{\partial e} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1}{\mu}\right.$$

$$\sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} = + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial i} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial}{\partial \pi} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial}{\partial \Omega} S\left(\frac{a_1 n_1 V}{\mu}\right.$$

5.

Will man nun die angegebenen Formeln zur Darstellu[ng] der empirischen Glieder in den säkularen Bewegungen d[er] Bahnelemente der inneren Planeten benutzen, so hat man, d[en] früheren Bemerkungen gemäß, eine Anzahl konzentrisch[er] Ellipsoide, die mit 1, 2, 3 etc. bezeichnet werden mögen, pa[s]send zu wählen. Unbekannt sind zunächst die Dichtigkeit[en] innerhalb der einzelnen Ellipsoide q_1, q_2, q_3 etc., ebenso d[ie] Elliptizitäten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ etc., die Neigungen $J_1, J_2, \ldots$ die Kn[oten]längen Φ_1, Φ_2 etc. ihrer Äquatorebenen. Selbstverständlich w[ird] man die Zahl der Unbekannten möglichst klein wählen, d[enn] eine durch eine genügend große Anzahl von Unbekannten [er]zwungene Darstellung der empirisch gegebenen Daten h[at] keine Bedeutung. Sind die einzelnen q bekannt, so mu[ß] Gesamtdichtigkeit innerhalb des ersten Ellipsoids $q_1 + q_2 + q_3 +$ angenommen werden. Zwischen dem ersten und zweiten E[llip]soid herrscht die Dichtigkeit $q_2 + q_3 + \cdots$, zwischen dem zw[eiten] und dritten $q_3 + q_4 + \cdots$ u. s. f. Zu bemerken ist noch, d[aß] die Massen innerhalb der Sonnenkugel eigentlich nicht in Be[]tracht gezogen werden sollten. Indessen tritt, wenn hiera[uf] nicht Rücksicht genommen wird, nur eine Vergrößerung de[r] Sonnenmasse ein, was natürlich umsomehr gleichgültig ist, a[ls] sich die einzelnen q gegenüber der Sonnendichtigkeit q_0 ver[]schwindend klein ergeben.

Ursprünglich hatte ich fünf Ellipsoide mit den großen Halbachsen:

$$a_1 = 0.10, \quad 0.17, \quad 0.24, \quad 0.60, \quad 1.20$$

angenommen. Die Rechnung ergibt aber, daß die Koeffizienten, welche die den drei ersten Ellipsoiden entsprechenden Beiträge zu den säkularen Veränderungen bestimmen, so nahe proportional verlaufen, daß gar nicht daran gedacht werden kann, die einzelnen $q_1\ q_2\ q_3$ zu bestimmen. Es ist demnach so gut wie ganz gleichgültig, wie die Dichtigkeit der Massenverteilung in der Nähe der Sonne bis zu etwa $^2/_3$ der Merkurentfernung verläuft. Man wird deshalb in jedem Falle mit der Annahme nur eines Ellipsoides, das zwischen Sonne und Merkurbahn liegt, auskommen müssen und es ist dabei ziemlich gleichgültig, wie groß man das zugehörige a wählt. Ich habe im Folgenden nur das Ellipsoid 3 beibehalten. Ebenso zeigt der Verlauf der Koeffizienten, daß das Ellipsoid 4 keinen nennenswerten Beitrag zur Darstellung der empirischen Glieder liefern kann und es fast ganz gleichgültig ist, ob man dieses beibehält oder nicht. Ich habe es schließlich fortgelassen, so daß nur die beiden Ellipsoide 3 und 5 übrig bleiben. Jedenfalls ergibt sich aus dem Gesagten, daß die Massenverteilung im Zodiakallicht nur in ganz allgemeinen Umrissen bestimmbar ist, was in jedem Falle nicht zu Ungunsten der ganzen Hypothese zu sprechen scheint. —

Was die Elliptizitäten λ betrifft, so zeigt sich ebenfalls, daß dieselben innerhalb weiter Grenzen willkürlich angenommen werden dürfen, ohne eine wesentliche Änderung in der Darstellung der empirischen Glieder zu veranlassen; nicht einmal die Werte der Unbekannten ändern sich sehr merklich. Da zunächst über die Dichtigkeitsflächen im Zodiakallicht nichts näheres angegeben werden kann und nur die Annahme, daß die Abplattungen sehr beträchtlich sind, einige Sicherheit hat, ist man tatsächlich zu diesen willkürlichen Annahmen gezwungen. Wichtig ist es, daß eine solche Willkür keine große Bedeutung hat. Ich habe nun für das Ellipsoid 3 $\lambda = 10$, für das Ellipsoid 5 dagegen $\lambda = 5$ gewählt. Auf diese Weise ist

erreicht, daß die Erdbahn ganz innerhalb des Ellipsoids 5 liegt, was bei der Aufstellung der Formeln angenommen worden ist.

Die Lage der Äquatorebenen der Ellipsoide ist, wie von vornherein zu erwarten, nicht so unbestimmt, wie die andern Daten. Es zeigt sich, daß die Lage des Ellipsoids 3 in ziemlich bestimmter Weise angenommen werden muß, dagegen die von 5, wegen des geringen Einflusses der hieraus hervorgehenden Störungen, ziemlich gleichgültig ist. Wichtig und nötig ist zu einer befriedigenden Darstellung der empirisch gefundenen Newcombschen Glieder die Einführung einer Drehung des in der Astronomie üblichen Koordinatensystems gegen ein im Sinne der Mechanik sogenanntes absolutes oder besser gesagt, gegen ein Inertialsystem im Sinne der Untersuchungen Herrn E. Andings[1]) und meiner eigenen.[2])

Ich hatte mich bei einer provisorischen Rechnung, deren Resultate ich in der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Jena[3]) vortrug, damit begnügt, die Störungsfunktion V_s bis auf Glieder zweiter Ordnung inklusive in Bezug auf Neigung und Exzentrizitäten zu benutzen, ein Verfahren, dessen Z[illegible] Anfang an [illegible] werden [illegible] Messungen aber unzweifelhaft [illegible] Nachweis über diese Rechnung [illegible] Interesse mehr, da sie jetzt [illegible] für das Folgende benutzt worden [illegible] deshalb hier nur die damals erhaltenen [illegible] anzugeben.

[illegible] befriedigende Darstellung [illegible] nämlich: Neigung J und K[illegible] Φ des Äquators des Ellipsoids 3 in Bezug auf die Ekliptik, die zwei Drehungen φ [illegible] und φ und schließlich der Rotation[illegible]

1) [illegible] der mathematischen Wissenschaften [illegible]

2) [illegible] Bewegung. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1906.

3) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 41.

komponente r, welche sich auf die Orientierung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie bezieht und die hundertjährige Drehung dieses Systems um eine auf der Ekliptik senkrechten Achse bedeutet. Es ist von vornherein nach der Art, wie sich die Orientierung des astronomischen Koordinatensystems mit der Zeit entwickelt hat, recht wenig wahrscheinlich, daß die beiden anderen Rotationskomponenten p und q außer r einen nennenswerten Betrag haben könnten. Deshalb wurden die p und q gar nicht eingeführt, weil sonst die Zahl der Unbekannten größer als wünschenswert geworden wäre. So handelte es sich um die Bestimmung von fünf Unbekannten aus zehn Bedingungsgleichungen und das Überwiegen der letzteren ist durchaus genügend. Bei der Beurteilung dieses Überschusses ist es bekanntlich ganz gleichgültig, ob die darzustellenden empirischen Glieder groß oder klein sind. Eine säkulare Veränderung der Exzentrizitäten wird erst durch die höheren Potenzen von Exzentrizität und Neigung, als in Betracht gezogen worden sind, erzeugt und man muß sich auf die obige Bemerkung beziehen, daß diese ebenfalls von Newcomb abgeleiteten Veränderungen zunächst wenigstens unberücksichtigt bleiben können.

Für die fünf genannten Unbekannten nebst ihren mittleren Fehlern ergab sich nun:

$$J = 6^\circ\!.95 \pm 0^\circ\!.97 \qquad \Phi = 40^\circ\!.03 \pm 7^\circ\!.3$$

$$\frac{q_3}{q_0} = (2.52 \pm 0.15)\, 10^{-11} \qquad \frac{q_5}{q_0} = (2.60 \pm 2.19)\, 10^{-15}$$

$$r = 5''\!.693 \pm 1''\!.68.$$

Hierbei wurde angenommen, daß der Äquator des Ellipsoids 5 mit dem Sonnenäquator zusammenfällt.

Für die Rechnung mit den im Vorigen gegebenen genaueren Formeln habe ich nun für J und Φ, sowie für die Lage des Ellipsoids 5 dieselben Annahmen gemacht, die eben erwähnt worden sind, da schon so ein guter Anschluß an die empirischen Daten in Aussicht stand. Als zu bestimmende Unbekannte wurde statt q_3 und q_5 eingeführt:

$$\beta_3 = \tfrac{3}{4}\frac{q_3}{q_0}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^4}\,10^{12};\quad \lambda = 10$$

$$\beta_5 = \tfrac{5}{4}\frac{q_5}{q_0}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^6}\,10^{14};\quad \lambda = \;5.$$

Für das Ellipsoid 3, d. h. $a = 0.24$, ergibt sich nun:

	ξ	$\log \Psi(\xi)$
Merkur	0.7839	$8.7692_n - 10$
Venus	0.3498	$7.2360_n - 10$
Erde	0.2459	$6.5196_n - 10$
Mars	0.1587	$5.5894_n - 10$.

Ferner ist:

$$\log \Psi(10) = 1.1955_n, \quad \log \Psi_1(10) = 0.6145.$$

Für das Ellipsoid 5 habe ich aus äußeren Gründen, weil die früheren Rechnungen beim Mars mit einem Näherungswert für ξ ausgeführt worden waren und ich wegen der Kontrolle denselben Wert für ξ benutzen wollte, angenommen $a = 1.2235$ (früher 1.20). Hiermit ergibt sich für Mars:

$$\xi = 1.2773;\quad \log \Psi(\xi) = 9.5057_n$$

und:

$$\log \Psi(5) = 0.7833_n;\quad \log \Psi_1(\lambda) = 0.5494.$$

Mit diesen Daten kann nun an die Ausrechnung der im Artikel 4 gegebenen Formeln geschritten werden. Diese Ausrechnung ist nicht ganz einfach. Ich hoffe indessen mich durch wiederholte Kontrollen und wo solche nur auf diesem Wege zu erhalten waren, durch doppelte Rechnung vor Rechenfehlern geschützt zu haben, so daß ich die Sicherheit des Endergebnisses einigermaßen verbürgen kann. Die Mitteilung der Einzelheiten der Rechnung wäre danach wohl überflüssig und ich führe nur das Endresultat an. Zunächst ist zu bemerken, daß auch jetzt die Säkularstörungen in den Exzentrizitäten vollständig unmerklich sind. Das Weitere kann in die zehn Bedingungsgleichungen für die drei Unbekannten β_3, β_5, r zusammengefaßt werden, wobei die in Klammern gesetzten Zahlen

Logarithmen bedeuten und der Strich über der Kennziffer eine Verminderung um 10 andeutet:

		β_3	β_5	r		$\sqrt{g}$
$e\frac{d\pi}{dt}$	Merkur	[0.6505] β_3 +	[0.3538$_n$] β_5 +	[9.3131] r	$= +8{''}48$	3
	Venus	[7.9629]	[9.2878$_n$]	[7.8338]	$= -0.05$	4
	Erde	[7.8418]	[9.8834$_n$]	[8.2240]	$= +0.10$	7
	Mars	[7.9369]	[9.8403]	[8.9699]	$= +0.75$	3
$\sin i\frac{d\Omega}{dt}$	Merkur	[8.4728$_n$]	[9.5147$_n$]	[9.0861]	$= +0.61$	2
	Venus	[8.7263]	[0.4791]	[8.7723]	$= +0.60$	6
	Mars	[7.9285]	[9.7993]	[8.5091]	$= +0.30$	5
$\frac{di}{dt}$	Merkur	[9.5404]	[0.0809$_n$]		$= +0.38$	1
	Venus	[8.9815]	[9.2588]		$= +0.38$	3
	Mars	[7.2369]	[9.6137$_n$]		$= -0.01$	5.

Die Gewichte g sind den von Newcomb angegebenen wahrscheinlichen Fehlern entsprechend auf ganze Quadratzahlen abgerundet worden.

Von einer weiteren Verbesserung der Größen J und Φ habe ich abgesehen, denn es ergibt sich, daß man eine fast genau gleiche Darstellung wie früher erhält, wenn man β_3 der Perihelbewegung des Merkurs und β_5 dem Glied im Venusknoten entsprechend annimmt:

$$\log \beta_3 = 0.2207, \quad \log \beta_5 = 8.7084.$$

Es ist nun weiter nicht möglich die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler merkbar, d. h. die Genauigkeit der vierstelligen Rechnung wesentlich übersteigend, zu verkleinern und man könnte also mit dem erhaltenen Resultat sich begnügen. Indessen schien es mir wünschenswert die mittleren Fehler der Unbekannten zu ermitteln. Aus diesem Grunde wurde eine Ausgleichung der zehn Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten ausgeführt. Diese ergab die folgenden Werte nebst ihren mittleren Fehlern:

$$\beta_3 = 1.654 \pm 0.077; \quad \beta_5 = 0.0477 \pm 0.0263$$

$$r = 5{''}85 \pm 1{''}22$$

und nunmehr ergibt sich folgende Darstellung, wobei ich der Übersichtlichkeit wegen die einzelnen, von β_3, β_5 und r herrührenden Glieder anführe und ihrer Summe die Newcombschen Daten gegenüberstelle:

		β_3	β_5	r	Rechnung	Newcomb		$N-R$	
$e\frac{d\pi}{dt}$	Merkur	+7.″396	−0.108	+1.203	+8.″49	+8.″48	±0.″43	−0.″01	-0
	Venus	+0.015	−0.009	+0.040	+0.05	−0.05	0.25	−0.10	-0
	Erde	+0.012	−0.037	+0.098	+0.07	+0.10	0.13	+0.03	+0
	Mars	+0.014	+0.033	+0.546	+0.59	+0.75	0.35	+0.16	+0
$\sin i\frac{d\Omega}{dt}$	Merkur	−0.049	−0.016	+0.713	+0.65	+0.61	0.52	−0.04	-0
	Venus	+0.088	+0.144	+0.346	+0.58	+0.60	0.17	+0.02	0
	Mars	+0.014	+0.030	+0.189	+0.23	+0.03	0.22	−0.20	-0
$\frac{di}{dt}$	Merkur	+0.574	−0.057	—	+0.52	+0.38	0.80	−0.14	-0
	Venus	+0.159	+0.009	—	+0.17	+0.38	0.33	+0.21	+0
	Mars	+0.003	−0.020	—	−0.02	−0.01	0.20	+0.01	0

In der letzten Rubrik steht noch die Darstellung, wie sie die provisorische Rechnung geliefert hat. Ein irgendwelcher in Betracht zu ziehender Unterschied ist nicht vorhanden und der Umstand, daß die frühere Darstellung ein wenig besser ist, hat keine Bedeutung, weil er sofort verschwinden würde, wenn eine Neubestimmung von λ und Φ unternommen würde, was natürlich gegenwärtig ein ganz unnötiges Unternehmen wäre.

Aus den obigen Zahlen β_3 und β_5 ergibt sich noch:

$$\frac{q_3}{q_5} = -2.18 \cdot 10^{-\text{[illegible]}}; \quad \frac{q_5}{q_0} = 0.31 \cdot 10^{-\text{[illegible]}}.$$

Die Gesamtmasse der ganzen Massenverteilung ist hiernach gleich $3.1 \cdot 10^{-7}$ Sonnenmassen.

Die Dichtigkeit der Massenverteilung ist also selbst in den der Sonne am nächsten liegenden Partien ganz außerordentlich klein. Sie entspricht der Massenverteilung, die man erhält, wenn man einen Würfel Wasser von weniger als $1/3$ Meter Seitenlänge in einem Raum von 1 Kubikkilometer verteilt.

Was die Darstellung der Newcombschen empirischen Glieder betrifft, so ist dieselbe geradezu überraschend gut. Sämtliche Glieder werden innerhalb ihres wahrscheinlichen Fehlers durch die Rechnung dargestellt und mit Ausnahme des Gliedes in $\sin i \frac{d\Omega}{dt}$ bei Mars weit innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers. Bedenkt man nun weiter, daß diese Darstellung gleich beim ersten Versuche gelungen ist, so wird man den erreichten Erfolg wohl kaum nur einem glücklichen Zufall zuschreiben. Die Sache liegt eben so, daß die gemachten allgemeinen Annahmen einen weiten Spielraum für die speziellen Zahlenangaben, die zu Grunde gelegt wurden, gestatten. Da eine Einwirkung der das Zodiakallicht bildenden Massen auf die Bewegung der inneren Planeten unter allen Umständen stattfinden muß und man, wie schon oben erwähnt, nur über die Größe und Art dieses Einflusses im Zweifel sein kann, da weiter in der durchgeführten Rechnung nirgends Zahlen auftreten, die nach irgend einer Richtung Bedenken erregen können, so ist mit einiger Sicherheit anzunehmen, daß die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten tatsächlich auf die Massen des Zodiakallichts zurückzuführen sind.

Wesentlich für die gewonnene Darstellung ist die Lage des innersten Ellipsoides, die durch J und Φ bestimmt ist, während das Charakteristische in der Dichtigkeitsverteilung die schnelle Abnahme der Massendichtigkeit ist, die bereits in den Gegenden, wo sich die Merkurbahn befindet, eingetreten ist. Als ebenso wesentlich für die Darstellung der empirischen Glieder, mit Ausnahme des die Perihelbewegung des Merkur bestimmenden, hat sich die Einführung der Rotationsgröße r bewährt. Es war dies übrigens von vornherein zu erwarten. Was dieses r betrifft, wonach also eine säkulare Drehung des empirischen Koordinatensystems der Astronomie um das der Mechanik zu Grunde liegende im Betrag von $5\overset{''}{.}8 \pm 1\overset{''}{.}2$ im Jahrhundert stattfindet, so ist nicht uninteressant, daß sich sein Betrag gegen die früheren Darstellungen mit Ausschluß der Perihelbewegung und ohne Rücksicht auf die Einwirkungen der Massen

des Zodiakallichts nicht unwesentlich verkleinert hat. Ich habe a. a. O. darauf hingewiesen, daß eine Verkleinerung des früher gefundenen Wertes $r = 7{,}5$ angemessen zu sein scheint. Eine solche Verkleinerung ist jetzt schon eingetreten; es wäre aber vielleicht möglich diese Verkleinerung noch weiter zu treiben durch abgeänderte Anfangsdaten, die ja doch mehr oder weniger willkürlich waren, was eben als ein günstiges Zeichen für die Zulässigkeit der Grundlagen dieser Arbeit angesehen werden darf.

Die empirischen Glieder in den Exzentrizitäten konnten nicht in gleichem Maße, wie die übrigen, dargestellt werden. Wollte man dieses erreichen, so müßte wohl eine andere und voraussichtlich weniger einfache Anordnung der Massen des Zodiakallichts, wie hier angenommen worden, in Betracht gezogen werden. Daß namentlich in der Nähe der Planeten so einfache Verhältnisse gar nicht bestehen können, dürfte insoweit feststehen, als das Zodiakallicht als eine Massenanhäufung von stabiler Dichtigkeitsverteilung angesehen wird. Damit werden indessen Fragen berührt, zu deren Behandlung bisher noch kein Versuch gemacht worden ist.

Namen-Register.

Sach-Register.

Verzeichnis der im Jahre 1906 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. 27. 1905.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Bd. 31. 1905.

Société d'Émulation in Abbeville:

Bulletin trimestriel 1903/05. 1906, No. 1 et 2. 1903—06.
Mémoires. Tome 21. 1906.
Mémoires. 4e Série, tome 5, partie 1 et Table générale 1707—1904. 1904.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Memoirs. Vol. I, part 3. 1905. 4⁰.
Transactions and Proceedings. Vol. XXIX. 1905.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations of the years 1902/04. 1905—06. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. 1905. 1906.
Rad. Bd. 161—164. 1905—06.
Zbornik. Bd. X, 2; XI, 1. 1905—06.
Źivota Biskupa. Strossmayora I. 1906.
Codex diplomaticus regni Croatiae. Vol. III. 1905. gr. 8⁰.
Rječnik Svezak 25, 2. 1905. 4⁰.

K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. VIII, Heft 1—4. 1906. 4⁰.

Kroatische Ar[illegible]nische Gesellschaft in Agram:

[illegible] 4⁰.

Faculté de droit et des lettres in Aix:

Annales. Tome 1, No. 4; tome 2, No. 1, 2. Paris 1905—06.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F., Bd. 12. 1906.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Album archéologique. Fasc. 14. 1906. fol.
Documents inédits concernant la Province. Tome 40, fasc. 2. 1905. 4
Bulletin. Année 1905, trimestre 1—3. 1905—06.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde, I. Sectie, Deel IX, No. 2, 3; II. Secti
    Deel XII, No. 3, 4. 1906. 4°.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde, Deel VI, No. 2—5; Deel VIII, No. 1,
    1906. 4°.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde, Teil XIV. 1906.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde, Deel VII. 1906.
Jaarboek voor 1905. 1906.
Prijvers: Licinus tonsor. 1906.

Historischer Verein in Ansbach:

53. Jahresbericht. 1906.

Stadt Antwerpen:

Paedologisch Jaarboek. Jahrg. VI, afl. 1. 1906.

Académie des sciences in Arras:

Mémoires. 2e Série, tome 35. 1905.
Congrès des Sociétés savantes tenu à Arras les 7—10 Juillet 1904. 190

Naturwissenschaftlicher Verein in Aschaffenburg:

Mitteilungen. V. Herausgegeben 1906.

Redaktion der Zeitschrift „Athena" in Athen:

Athena. Tome 18, Heft 1. 1906.

École française in Athen:

Bulletin de Correspondance hellénique. 30e année. No. 1—4. Paris 1906

Congrès international d'archéologie in Athen:

Compte rendu. 1re session. 1905.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Die Herrschaftsgebiete im heutigen Regierungsbezirk Schwaben [illegible]
    Neuburg nach dem Stand von 1801. Historische Karte. 1906.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in historical and political Science. Series XXIII, No. 11—12
    Series XXIV, No. 1, 2. 1905—06.
The Johns Hopkins University Circulars. 1905, No. 9; 1906, No. 1—3.
    1905—06.
American Journal of Mathematics. Vol. 27, No. 4; vol. 28, No. 1.
    1905—06. 4°.
The American Journal of Philology. Vol. 26, No. 3, 4. 1905.
American Chemical Journal. Vol. 34, No. 3—6; vol. 35, No. 1—4. 1905—06.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. 17, No. 178—189. 1906. 4°.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. XI, No. 12. 1903—04. 4°.

Peabody Institute in Baltimore:

Second Catalogue of the Library. Part VII S—T; part VIII V—Z. 1904—05. 4⁰.

39th annual Report, June 1. 1906.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. Vol. 5. 1905.

K. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. I, Abt. I, Lief. 5; Bd. I, Abt. II, Lief. 4, 5. 1906.

Historischer Verein in Bamberg:

64. Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. 18, Heft 2, 3. 1906.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Bd. V, Heft 2; Bd. VI, Heft 1. 1906.

Universität in Basel:

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitäten 1904—05. 1905.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Société des sciences in Bastia:

Bulletin. Année 24, trimestre 1, 4. 1905—06.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 48, afl. 2—6. 1905—06.

Verhandelingen. Deel 55, stuk 2; Deel 56, stuk 2—4. 1905—06. 4⁰.

Notulen. Deel 43, afl. 1—4; Deel 44, afl. 1. 1905—06.

Die Orchideen von Ambon von J. J. Smith. 1905. 4⁰.

De Java-Oorlog von 1825—30. Deel IV. 1905. gr. 8⁰.

Rapporten van de Commissie in Nederlandsch-Indie voor oudheidkundig onderzoek 1904. 1906. 4⁰.

R. Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 27. 1904—06. fol.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. 26. Jahrg. 1904. 1905. 4⁰.

K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel LXV. Weltevreden 1905.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte. Bd. 23, Heft 1. 1906.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. Vol. 70, 71. 1906.

Spomenik. Vol. 42, 43. 1906. 4⁰.

Godišnjak. Vol. 19 (1905). 1906.

Etnografski Zbornik. Atlas VI. 1905. 4⁰.

Pripowetka o dewojci bez ruku. 1905.

Srpski Dijalektol Zbornik kniga I. 1905.

L'Activité de l'Académie Royale Serbe en 1905. 1906.

J. Cvijić, Osnove za geograph i geolog. Tom. I, II. 1906. 4⁰.

Sperlić, Omladina. 1906.

Bulletin. No. 99. 100. 1906. 4°.

K. Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berli

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. 13. pars 3. fasc. 2.
Acta Borussica. Die Behördenorganisation. Bd. VIII. 1906
Abhandlungen aus dem Jahre 1905. 4°.
Sitzungsberichte. 1905. Nr. 39–53; 1906. Nr. 1–38. gr. 8
Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen. Bd. 31.

K. Preuß. Geologische Landesanstalt in Berlin

Abhandlungen. N. F., Heft 41. 45. 47. 49. 1905–06. 4°.
H. Potonié, Abbildungen und Beschreibungen fossiler
Lief. III. 1905. 4°.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in B

Veröffentlichungen. N. F., Nr. 12, 13. 1906. 4°.

Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 38. Jahrg., Nr. 18; 39. Jahrg., Nr. 1–15, 17. 190

Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 57, Heft 3, 4 (1905); Bd. 58, Heft 1 (1906).

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 36. 1906.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1905. 3 Bde. Brauns
Verhandlungen. Jahrg. 6, Nr. 24, 1904; Jahrg. 7, Nr.
Jahrg. 8, Nr. 1–23. Braunschweig 1906.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. 1905, Bd. XIX, Nr. 21–26; 1
Nr. 1–19.
Verhandlungen. Jahrg. 1905–06, Nr. 1–13.
Bibliographia physiologica. 3. Serie, 1905, Bd. 1, Nr. 3; Bd

K. Technische Hochschule in Berlin:

Kolonial-Abteilung des auswärtigen Amts in Berlin:

Bericht über die Grenzvermessung zwischen Deutsch-Südwestafrika und Britisch-Betchuanaland. 1905. fol.

K. Preuß. Meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1904 und 1905. Heft 1: Preußen und benachbarte Staaten. Jahrg. 1905, 1906. 4°.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1902. 1905. 4°.

Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1901. 1905. 4°.

Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1902 von G. Hellmann. 1905. 4°.

Die Niederschläge in den norddeutschen Stromgebieten von G. Hellmann. 3 Voll. 1906. gr. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1900. 1906. 4°.

Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" in Berlin

Jahrbuch. Bd. 34, Heft 3; Bd. 35, Heft 1, 2. 1906.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1906, Nr. 1—24.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preußischen Geschichte. Bd. XIX, 1. und 2. Hälfte. Leipzig 1906.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 26. Jahrg., Nr. 1—12. 1906. 4°.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen in Luzern 10.—13. September 1905. Luzern 1906.

Schweizerische Geodätische Kommission in Bern:

Bericht der Abteilung für Landestopographie über die Arbeiten 1893—1903. Zürich 1905. 4°.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Memorie. Serie VI, tomo 2. 1905. 4°.

Rendiconto. N. Serie, vol. 9 (1904—05). 1905.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, vol. 23, fasc. 4—6; vol. 24, fasc. 1—3. 1905—06.

Osservatorio astronomico e meteorologico in Bologna:

Osservazioni meteorologiche dell' annata 1904. 1905. 4°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte. 1905, 2. Hälfte; 1906, 1. Hälfte.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux

Bulletin. 1906, No. 1—6, 9—22.

American Academy of Arts and Sciences in Bost

Proceedings. Vol. 41, No. 14—35; vol. 42, No. 1—12. 190
Memoirs. Vol. XIII, No. 3. 1906. 4°.

Massachusetts General Hospital in Boston:

Publications. Vol. 1, No. 2. 1906.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 32, No. 3—12; vol. 33, No. 1, 2. 1905—
Occasional Papers. VII Fauna of New England. No. 4—7.

Geschichtsverein in Braunschweig:

Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1905. 4°.
Jahrbuch. 4. Jahrg. Wolfenbüttel 1905.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

14. Jahresbericht über die Jahre 1903/04 und 1904/05. 190

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch 1905. Freie Hansast
1906. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVIII, Heft 2. 1906.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in B

83. Jahresbericht im Jahre 1905. 1906.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesien

Zeitschrift. X. Jahrg., Heft 1—4. 1906.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen der meteorologischen Kommission im Jahre

Académie Royale des sciences in Brüssel:

La Chronique de Saint-Hubert publiée par Karl Hanquet. 1906.
Recueil de Documents rel. à l'histoire de l'Industrie drapière au Flandre. 1906. 4⁰.
Biographie nationale. Tome XVIII, fasc. 2. 1905.
Annuaire 1906.
Bulletin. a) Classe des lettres 1905, No. 9—12; 1906, No. 1—8.
b) Classe des sciences 1906, No. 9—12; 1907, No. 1—8.
Mémoires. Classe des lettres. Collection in 8⁰, tome 1, fasc. 6.
Cartulaire de l'Abbaye du Val-Benoit publié par J. Cuvelier. 1906. 4⁰.
Biographie nationale. Tome 18, fasc. 2.
Inventaire analytique des chartes de la collégiale de Saint-Pierre à Liège par Ed. Poncelet. 1906.
Inventaire de la „Librairie" de Philippe le Bon (1420) par Georges Doutrepont. 1906.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Catalogue des manuscrits. Tome IV, V. 1904—05.

Observatoire Royale in Brüssel:

Annales. N. Série. Physique du globe. Tome 3, fasc. 1. 1905. 4⁰.
Résultats du Voyage de S. Y. Belgica au 1897—99. Rapports scientifiques. Zoologie 13 fasc. — Botanique 3 fasc. — Météorologie 3 fasc. — Hydrographie 1 fasc. avec cartes, publ. par G. Lecointe, Directeur scientifique. Anvers 1903—05. 4⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 25, fasc. 1—4. 1906.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 49. 1905.
Mémoires. XII, XIII, partie 1 und 2. 1906.

Société géologique de Belgique in Brüssel:

Bulletin. Tome XIX, fasc. 3—5; tome XX, fasc. 1, 2. 1906.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Die im Jahre 1905/06 erschienenen Schriften der Akademie in 4⁰ und 8⁰.

K. Ungarische Geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen. Bd. XIV, Heft 4 u. 5; Bd. XV, Heft 2. 1905—06.
Földtani Közlöny. Bd. 35, Heft 8—12; Bd. 36, Heft 1—5. 1905—06. 4⁰.
Jahresbericht für 1903 und 1904. 1905—06. 4⁰.
Erläuterungen zur agrogeologischen Karte. Sektionsblatt $\frac{\text{Zone 20}}{\text{Kol. XXII}}$. 1905. 4⁰.
A Magyar Kir. földtani intézet évkönyve. Bd. XIV, 5. 1905.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXXIV u. XXXVI. 1905—06. 4⁰.
Statistisches Jahrbuch. VII. Jahrg. 1904. 1906. 4⁰.

K. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Természettudományi Könyvkiadó-vállarat. No. LXXV, LXXVI. 1905.
Otto Herman, Recensio critica of the doctrine of Bird-migration. 1905. 4⁰.
Nuricsán József, Utmutató a chemiai Kisérletezésben. 1906.

Museo nacional in Buenos Aires:

Annales. Series III, tome 5. 1905. 4°.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Bulletin de l'Institut botanique. No. 19, 22. 1904–05. 4.

Departement de l'agriculture in Buitenzorg (Java):

Bulletin. No. 1, 2. 1906. 4°.
Verslag 1905. 1906. 4°.
Tweede Verslag van de Selectie-Proeven met de Natal-Indigoplant, door G. Wilbrink. 1906.
Mededeelingen. No. 2. 1906. 4.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Parte a administrativa. Serie II, tome 27, 1904–05. 1905. 4°.
" Memoriile sectiunii literare. Serie II, tome 27, 1904–05. 1905. 4°.
" " " ştiinţifice. Ser. II, tom. 27, 1904–05. 1905. 4°.
" " " istorice. Serie II, tome 27, 1904–05. 1905. 4°.
Bibliografia Românéasca. Tome 2, fasc. 1. 1905. 4°.
Discursuri de receptiune. XXVII. 1905. 4°.
Istoria romana de Titus Livius. Tome 3, fasc. 1. 1904.
Finatele Romaniei 1831–1905 de Th. C. Aslan. 1905.
Basme Aromâne de Per Papahagi. 1905.
L'activité de l'Académie Roumaine de 1884 à 1905. 1905.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 5e Série, vol. 8, année 1904. 1905.

Institut Égyptien in Cairo:

[illegible] N[illegible] 1, 2. 1904. [illegible]

Me[illegible] Department [illegible] the Government [illegible] India [illegible]

[illegible] XX [illegible] 1906. 4.
[illegible] 1905. [illegible]
[illegible] 1904. 1906. [illegible]
[illegible] 1904. 1906. [illegible]
[illegible] 1905. 1906. 1906. [illegible]

Department [illegible] Agriculture in Calcutta:

Memoirs. Vol. 1, No. 1–4. 1906. 4°.

Royal Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

[illegible] New Series. No. 1128–1138, 1140, 1141, 1142, [illegible] 1905–06.
Memoirs. Vol. 1, No. 1–9. 1905–06. 4°.
Journal and Proceedings. Vol. 1, No. 5–10 and Extra Number [illegible] No. 1–5. 1905.

Office of Superintendent of Government Printing in Calcutta:

Annual Report of the Imperial Department of Agriculture for the year 1904–05. 1906. 4°.
Memorandum on the Age Tables and Rates of Mortality of the Indian Census of 1901. 1905. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXXII, part 4; vol. XXXIII, part 1—4; vol. XXXIV, part 1, 2. 1905—06. 4⁰.
Paläontologica Indica. Serie XV, vol. V; Memoir No. 1. 1906. fol.

Board of scientific advice for India in Calcutta:

Annual Report for the year 1904/05. 1906. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 43, No. 4; vol. 46, No. 12—14; vol. 48, No. 2, 3; vol. 49, Nr. 3, 4; vol. 50, No. 1—5. 1906.
Memoirs. Vol. 30, No. 3; vol. 33. 1906. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

60th annual Report 1904/05. 1905.
Annals. Vol. 39, part 2; vol. 53, No. 10; vol. 58, part 2; vol. 60, part 1, 2.
Edw. C. Pickering, Oration on the Aimes of an Astronomer. 1906.
An international Southern Telescope. By Edw. C. Pickering. 1906.
Circular. No. 105—118.
Telegraphic Cipher Code. 1906.

Harvard University in Cambridge, Mass.:

Harvard Oriental Series. Vol. VII, VIII. 1905. 4⁰.

Observatory in Cambridge:

Annual Report for 1905/06. 1906. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. 13, part 4—6. 1906.
Transactions. Vol 22, No. 7—10. 4⁰.

Geological Commission in Capetown:

Map. Sheet 1. 1906.

British South Africa Company in Capetown:

Geological Survey of South Africa. Vol. III. 1905. fol.
Report for 1905. 1906. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, vol. 18. 1905. 4⁰.
Bollettino mensile. Nuova Serie, fasc. 87—91. 1906.

Società di storia patria per la Sicilia Orientale in Catania:

Archivio. Anno II, fasc. 3, 1905; anno III, fasc. 1—3. 1906.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Tätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1905. Berlin 1906. 4⁰.

K. Sächsisches Meteorologisches Institut in Chemnitz:

Dekaden-Monatsberichte 1904; Jahrg. VII. 1905 fol.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1901. 1905. 4⁰.
Paul Schreiber, Studien über Erdbodenwärme. 1905. 4⁰.

John Crerar Library in Chicago:

11. annual Report for the year 1905. 1906.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 102, 104, 106—114, 116. 1905—06.

University in Chicago:

The Decennial Publications. G. B. Foster, The Finality of the christian religion. 1906.

Videnskabsselskabet in Christiania:

Forhandlinger. Aar 1905. 1906.
Skrifter. 1905, I. math.-naturwiss. Klasse; II. histor.-filos. Klasse. 1906. 4⁰.

The Norwegian North Polar Expedition in Christiania:

Scientific Results. Vol. 5. 1906. 4⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXXV. Jahresbericht. Jahrg. 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft für Graubünden in Chur:

Jahresbericht. N. F., Bd. 48, Jahrg. 1905—06. 1906.

Lloyd Library in Cincinnati:

Mycological Notes. No. 19—23.
Index of the Mycological Writings of C. G. Lloyd. Vol. I. 1898—1905.
C. G. Lloyd, The Tylostomeae. 1906.

University of Cincinnati:

Record. Series I, vol. 2, No. 4—16; Series II, vol. 2, No. 2. 1905—06.
University Studies. Series II, vol. 1, No. 4; vol. 2, No. 1. 1905.

University of Missouri in Columbia:

Bulletin of Laws Observatory. No. 7. 1905. 4⁰.

Società storica in Como:

Periodico. No. 61—64 und 2 Hefte. Indici 1904. gr. 8⁰.
„ Vol. 1—17. 1906. 4⁰.
Raccolta. Vol. 1—5. 1906. 4⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletín. Tome 18, centr. 1, 2. Buenos Aires 1905.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F., Bd. 11, Heft 4. 1906.

Westpreußischer Geschichtsverein in Danzig:

Quellen und Darstellungen zur Geschichte Westpreußens. Nr. 5. 1906.
Mitteilungen. 5. Jahrg. 1906, Nr. 1—4.

K. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 2, Heft 7 u. 8; Bd. 3, Heft 1. Heidelberg 1906.

Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für hessische Geschichte. N. F., Bd. IV, Heft 2 u. Ergänzungsband II, 4; III, 1. 1906.
Quartalblätter. Bd. III, Nr. 17—20; Bd. IV, Nr. 1, 2. 1905—06.

Commission géodésique néerlandaise in Delft:

Détermination de longitude et d'azimut dans les Pays-Bas. 1904. 4⁰.
Détermination de la longitude de la latitude et d'un azimut à Ubagsberg en 1893. 1905. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. VIII, p. 71—182. 1906.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. X, Heft 3. 1906.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome 31, trimestre 1, 2. 1905.

K. Sächsicher Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XXVII. 1906.

K. Sächsisches Meteorologisches Institut in Dresden:

Deutsches Meteorolog. Jahrbuch für 1902. Königreich Sachsen. 1906. 4⁰.
Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. VIII, 1905. 1906. fol.

Verein für Erdkunde in Dresden:

Mitteilungen. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1, 2.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Vol. XXVI, Section A, part 1; Section B, part 1—5; Section C, part 5—9. 1906.
Transactions. Vol. XXXIII, Section A, part 1; Section B, part 1, 2; Section C, part 1—4. 1906. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 7, 8. 1906.
The scientific Proceedings. Vol. XI, No. 6—12. 1906.
The scientific Transactions. Series II, vol. IX, part 2, 3. 1906. 4⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Festschrift zum 80. Geburtstage des Geheimrats Georg von Neumayer. 1906.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 28, No. 1—12.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 24; vol. 25, part 1, 2; vol. 26, part 1—5. 1903-06.
Transactions. Vol. 40, part 3, 4; vol. 41, part 1, 2; vol. 43. 1903-05. 4⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. 8, part 3. 1905.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 4, No. 2, 3. 1906.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 16, No. 4—7. 1906.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 20. Jahrg. 1906.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 18. 1905.

Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt

Abhandlungen. Bd. 30, Heft 1, 2. 1906. 4⁰.
Bericht. 1906.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a

Geschichte der Musik in Frankfurt a. M. Von Carolina Valent

Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:

Jahresbericht für 1904/05. 1906.

Naturwisssenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. Bd. 23. Berlin 1906.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." 32. Jahrlauf 1905; 33. Jahrlauf 1906, I. u.
band. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. VII. 1906.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Observatoire in Genf:

L'éclipse totale de soleil du 30. Août 1905.
Résumé météorologique de l'année 1904. 1905.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Mémoires et Documents. IIe Série, tome 9 et 10. 1906.
Mémoires et Documents. Série in 4⁰, tome 3. 1906. 4⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Gießen:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Gießen:

Mitteilungen. N. F., Bd. 14. 1906.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:

Abhandlungen. Bd. XXV, Heft 1. 1906.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 81 u. 82. 1905—06.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. III. Bd., 1. u. 2. Heft. 1906.
Fritz Randa, Die mittelalterliche Baukunst Bautzens. 1905. 4⁰.
Felix Möschler, Gutsherrlich-bäuerliche Verhältnisse in der Oberlausitz. 1906.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1905, Nr. 12; 1906, Nr. 1—11. Berlin. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F. a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VI, Nr. 4.
b) Math.-phys. Klasse. Bd. IV, Nr. 5. Berl. 1906. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1905, Heft 4 Beiheft; 1906, Heft 1—3.
b) Math.-phys. Klasse. 1905, Heft 4, 5; 1906, Heft 1—4. Berlin. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1. Berlin. 4⁰.
Karl Friedrich Gauß-Werke. Bd. VII. 1906. 4⁰.

Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik in Göttingen:

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Leipzig 1906. 4⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XIII, p. 35—130. 1905—06.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Steirische Zeitschrift. 1. Jahrg., Heft 1—4, 1903; 3. Jahrg., Heft 1—4, 1905.
Urkundenbuch des Herzogtums Steiermark. Bd. III. 1903.
Beiträge zur Erforschung steirischer Geschichte. 33. u. 34. Jahrg. 1904—05.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 32. Jahrg. 1903.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1905, Heft 42. 1906.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 7. 1906.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 37. Jahrg. 1905. Berlin 1906.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. VII. Reeks, Deel 5, afl. 1—4. 1906.

Departement van Kolonien im Haag:

Description géologique de l'île d'Ambon par R. D. M. Verbeek. Text und Atlas. Batavia 1905. (Atlas in fol.)

The Proceedings and Transactions. Vol. XI, part 1 u. 2. 1!

Historischer Verein für Württembergisch-Franken in Schwä

Württembergisch-Franken. N. F., IX. 1906.

K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Nat in Halle:

Leopoldina. Heft 41, Nr. 12, 1905; Heft 42, Nr. 1—10, 1906.
Nova Acta. Bd. 82—84. 1904—05. 4⁰.
Katalog der Bibliothek. Bd. 3, Lief. 1. 1905.

Deutsche Morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 59, Heft 4; Bd. 60, Heft 1—3. Leipzig 1905-
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XII, Nr. 2. I

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen

Zeitschrift für Naturwissenschaften. 78. Bd., Heft 1—3. Stu

Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterlä Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. 22, Heft 3. 1906.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. IV, Heft 6. Leipzig 1906.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

27. u. 28. Jahresbericht für 1904 u. 1905. 1905—06. gr. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. Nr. 8, 10. 1905.

Verein für hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 25. Jahrg. 1905. 1906.

Universität Heidelberg:

Theodor Curtius, Robert Bunsen als Lehrer in Heidelberg. 1906. 4⁰.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.
Aus alter u. neuer Zeit der Heidelberger Bibliothek. Rede von J. Wille. 1906.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. XIV, Heft 2. 1906.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:

Verhandlungen. N. F., Bd. VIII, Heft 2. 1905. gr. 8⁰.

Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches. Lief. 26 u. 27. 1906. 4⁰.

Astronomisches Institut in Heidelberg:

Bestimmung der Längendifferenz der Großherzoglichen Sternwarte bei Heidelberg und der Universitäts-Sternwarte in Straßburg i. E. Karlsruhe 1906. 4⁰.

Commission géologique de Finnlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 16. 1905.

Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta. Vol. 32. 1906. 4⁰.
Öfversigt 47. 1905.
Bidrag till kännedom af Finnlands Natur och Folk. Heft 63. 1905.

Institut météorologique central in Helsingfors:

Observations météorologiques 1895/96. 1906. fol.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Acta. Vol. 6 (1889), 21–23, 25, 27, 28. 1902–06.
Meddelanden. Vol. 28, 29, 31, 32. 1902–06.

Société de géographie de Finnlande in Helsingfors:

Fennia. Vol. 19–22. 1903–05.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. XXXIII, 1–4. 1905–06.

Siebenburgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. Bd. 54, Jahrg. 1904. 1906.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. Heft 52. 1906. gr. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Iglö:

Jahrbuch. 33. Jahrg. 1906.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. Heft 29. 1905.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 29. Jahrg. 1903/04 u. 1904/05. 1906.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N. Y.:

The Journal. Vol. 10, No. 1—8. 1906. gr. 8⁰.

Imperial Central Agricultural Experiment Station in Japan:

Bulletin. Vol. I, No. 1. Nishigahara, Tokio 1905.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tome III, fasc. 4; tome IV, fasc. 1. 1906.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 41, Heft 1—4. 1906.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F., Bd. XVI, 2; XVII, 1. 1906.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1905. 1906.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Archiv für Naturkunde. Serie II, Bd. XIII, 1. 1905.
Sitzungsberichte. Bd. XIV, 1, 2; XV, 1 u. Register zu Bd. 8—14. 1905—06.
Schriften. Bd. XVI u. XVII. 1905—06. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Oberrheinische Städterechte. I. Abt., Heft 7. 1906.
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. XXI, 1—4. Heidelberg 1906.
Neujahrsblätter 1906. Heidelberg.

Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie in Karlsruhe:

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Berlin 1905. 4⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906. fol.

Großherzoglich Technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1906.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. Bd. 19. 1905—06. 1906.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, tome 15, No. 2. 1906.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 73, No. 1—10. 1906.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F., Bd. 29. 1905.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht L. 1906.

Université Impériale in Kharkow:

Annales. 1905, Heft 2; 1906, Heft 1, 2. 1906.

Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 36. 1906.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F., Bd. 7 (Abteilung Helgoland, Heft 2); Bd. 9 (Abteilung Kiel). Kiel u. Leipzig 1906. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 45, Nr. 11; Bd. 46, Nr. 1—8. 1905—06.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1904. 1905.
Carinthia I. 95. Jahrg., Nr. 1—6. 1905.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 95. Jahrg. 1905, Nr. 5, 6; 96. Jahrg. 1906, Nr. 1—4.

Siebenbürgisches Museum in Klausenburg:

Sitzungsberichte. I. Med. Abteilung, Bd. 26, Heft 2, 3; Bd. 27, Heft 1—3. II. Naturw. Abteilung, Bd. 27, Nr. 1—3. 1905—06.
Erdélyi Múzeum. Bd. XXIII, No. 1—4. 1906. 4⁰.
Az Erdélyi Múzeum Egyesület . . . Emlékkönyve. 1906. 4⁰.

Regierung des Kongostaates:

Annales du Musée du Congo. Botanique, vol. I, fasc. 3; Zoologie, Série V, tome I, fasc. 1. Bruxelles 1906. fol.
Notices sur les plantes utiles de la Flore du Congo. Vol. 2, fasc. 1. Bruxelles 1906.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 46. Jahrg. 1905. 1906.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Dansk Ordbog, udgiven under Videnskabernes Selskabs Bestyrelse. Ottende Tome V—Z. 1905. 4⁰.
Oversigt. 1905, No. 6; 1906, No. 1—6.
Mémoires. 1. Section des Lettres, 6ᵉ Série, tome 5, No. 3; 2. Section des Sciences, 7ᵉ Série, tome I, No. 5, 6, tome II, No. 5, 6, tome III, No. 1. 1906. 4⁰.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Rapports et Procès-verbaux. Vol. IV—VI. 1905—06. 4⁰.
Bulletin trimestriel. Année 1904—05, No. 4; 1905—06, No. 1—3.
Publications de circonstance. No. 28—34 u. 13c. 1905—06.
Bulletin statistique des pêches maritimes. Vol. I. 1906. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarbøger. II. Raekke, Bd. 20. 1905.
Mémoires. Nouv. Série 1904/06. 1905—06.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Max Grohshennig, Legatfamilien Aagaard. 1905.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. (Bulletin international) 1. Classe de philologie, 1905, No. 1–1
2. Classe des sciences mathématiques, 1905, No. 8—10; 1906, No. 1–
Rocznik. Rok 1904/05. 1905.
Monumenta medii aevi historica. Tome 17. 1905. 4°.
Bibliografia historyi Polskiej. Bd. III, zesz. 3. 1906.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzny. Tome 39 mit Tafeln. 1906. 8° u. fo
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 17, Karte u. Text. 1906. 8° u. fol.
Katalog rekopisów. Akad. Um. 1906.
" literatury. Tome 5, Heft 1–4. 1906.
Zapatowicz, Conspectus florae Galiciae. Tome 1. 1906.
Rozprawy filolog. Serie II, tome 26, 28; histor., Serie II, tome 23. 190
" mathem. Tome 44, A. B. Spis rzeczy. 1904–05.
Uście solne. 1906.
Jan Czubek, Pisma polityczne. 1906.
Materyaly jezyk. Tome 3, zeszyt 1 i 2. 1905.
" antropol. archeolog. Tome 8. 1906.
Wybrane pisma Lukiana. Tome 1. 1906.
Karlowicz, Slownik gwar. Tome 4. 1906.

Imperial University in Kyōto:

The Kyōto Imperial University Calendar 1905–06.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Bd. 42. 1906.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 5e Série, tome 41. No. 154; vol. 42, No. 155. 1905–06.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. IIe Série, tome 7. 1906.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie Deel XXIII, 3, 4; Deel XXIV, 1–3. 1904–05.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. XXIV, 4–6; Bd. XXV, 1.
1905. 4°.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. XXIX, 5–8. 1906. 4°.
Berichte der philol.-hist. Klasse. Bd. 57, 1905, Nr. 5, 6; Bd. 58, 1906,
Nr. 1, 2.
Berichte der math.-phys. Klasse. Bd. 57, 1905, Nr. 5, 6; Bd. 58, 1906,
Nr. 1–5.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht 1905 u. 1906.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1905. 1906.
Katalog der Bibliothek. Heft II der Mitteilungen. 1905.

Cuerpo de ingenieros de minas del Perú in **Lima:**

Boletín. Nr 26–35, 37–39, 40, 42, 43. 1905–06.
Segunda Memoria del Director del cuerpo. 1906.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the agricultural Experiment Station. Nr. 76—80, 84. 1905.

Aeronautisches Observatorium bei Lindenberg:

Ergebnisse der Arbeiten im Jahre 1905. I. Bd. Braunschweig 1906. 4⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

64. Jahresbericht. 1906.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 1905, No. 11, 12; 1906, No. 1—10.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. 49th Session, No. 58, 1904—05. 1905.

Université Catholique in Loewen:

Publications académiques de l'année 1904/05.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XXII, fasc. 2. 1905. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 17, part 3; vol. 18, part 1. 1906.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XXI, No. 81—84. 1906.

Royal Society in London:

Report on the Perl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Part III, IV. 1905. 4⁰.
Year-Book. 1906.
Proceedings. Series A, vol. 77, No. A 515—520; vol. 78, No. A 521—525, 1906; Series B, vol. 77, No. B 516—521; vol. 78, No. B 522—527, 1906.
Philosophical Transactions. Series A, vol. 205, 206; Series B, vol. 198. 1906. 4⁰.
Reports of the Commission for the investigation of Mediterranean Fever. Part IV. 1906.
Reports to the Evolution Committee. Report III. 1906.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 66, No. 2—9. 1905—06.
Memoirs. Vol. 56. 1906. 4⁰.

Chemical Society in London:

Journal 1905. Supplementary number cont. Indexes, No. 519—530 (January—December). 1906.
Proceedings. Vol. 21, No. 301, 302; vol. 22, No. 303—317. 1905—06.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 61, part 1—4; vol. 62, part 1—4. 1905—06.
List. Nov. 15th 1905.
Geological Literature for the year ended Dec. 31st 1904. 1905.

Linnean Society in London:

Proceedings. 118th Session 1905/06. 1906.
The Journal. a) Botany, vol. 37, No. 260—262; b) Zoology, vol. 29, No. 193, 194. 1906.
List of the Linnean Society 1906/07. 1906.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 88, 89. 1905—06.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1906, part 1—6.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1905, vol. II, part 1, 2. 1906.
Transactions. Vol. XVII, part 3—5. 1904—05. 4°.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. No. 1888—1940. 4°.

Secretary of State for India in Council in London:

G. A. Grierson, The Piśāca Languages of North-Western India. 1906.

India Office in London:

42 Bände und einige Faszikel sprachlichen, geographischen und technologischen Inhalts über Ostindien.
Agra, a Gazetteer. Vol. 8. Allahabad 1905.
Madras District Gazetteers. Guntúr, vol. 2; Gódávari, vol. 2. Appendix for Kistna District. Madras 1906.
District Gazetteers of the provinces of Agra and Oudh. Vol. 42—44. Allahabad 1905.
Technical Art Series. Plates I—XIII. Illustrations of Indian Industrial Art. Calcutta 1905. fol.

Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:

Lüneburger Museumsblätter. Heft 3. 1906.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 30, livr. 3; tome 32, livr. 4; tome 33, livr. 1—3. 1902—06.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. IIIe Série, tome 6. Bruxelles 1906.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tome XL. 1904, in 2 Teilen.
Acta. Nova Series II, Afdelningen I. 1905. 1905—06. 4°.
Sveriges offentliga Bibliotek. Accessions-Katalog 18—19. 1903—04. 2 Teile. Stockholm 1905—06.

Institut Grand Ducal in Luxemburg:

Archives trimestrielles de la section des sciences naturelles. Fasc. 1, 2. Janvier—Juin 1906. 4°.

Section historique de l'Institut Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 50. 1905.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 61. Stans 1906.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Série I, No. 14—16; Nouv. Série II, No. 15. 1905—06.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. 14, with an Atlas. 1906.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. V, No. 2. 1906.

Kodaikanal and Madras Observatories in Madras:

Annual Report for 1905. 1906. fol.
Bulletin. No. IV—VII. 1906. 4⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Revista. Tomo 3, No. 3—6; tomo 4, No. 1—6. 1905—06.
Memorias. Tomo 23 u. 24. 1905—06. 4⁰.
Anuario. 1906.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletín. Tomo 48, cuad. 1—6; Tomo 49, cuad. 1—6. 1906.

Museum für Natur- und Heimatkunde in Magdeburg:

Abhandlungen und Berichte. Bd 1, Heft 2, 3. 1906.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II, vol. 38, fasc. 17—20; vol. 39, fasc. 1—16. 1906.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. XX, fasc. 7, 8. 1906. 4⁰.
Atti della fondazione Cagnola. Vol. 20. 1906.

Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo 4. 1906. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Elenco dei soci e Indice generale. 1906.
Museo mineralogico Borromeo. 1906.
Atti. Vol. 44, fasc. 3, 4; vol. 45, fasc. 1, 2. 1906.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie IV, anno 32, fasc. 8; anno 33, fasc. 9—11. 1905—06.

Altertumsverein in Mainz:

Mainzer Zeitschrift. Jahrg. I. 1906. 4⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 50, part 1—3. 1905—06.

Philippine Weather Bureau in Manila:

Bulletin for July—December 1905. 1905—06. 4⁰.
Annual Report for the year 1903. Part I—III. 1905. 4⁰.

Ethnological Survey for the Philippine Islands in Manila:

Publications. Vol. II, parts 2, 3; vol. IV, part 1. 1905.

Altertumsverein in Mannheim:

Mannheimer Geschichtsblätter. 1906, Nr. 2—11, VII. Jahrg. 4⁰.

Verein für Naturkunde in Mannheim:

71. u. 72. Jahresbericht für 1904/05. 1906.

Schwäbischer Schiller-Verein in Marbach:

X. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1905/06. 1906.
Das Schiller-Museum in Marbach. Stuttgart 1906.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

Abbaye de Maredsous:

Revue Bénédictine. Année 23, No. 2–4. 1906.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tome XV. Paris 1904. 4°.

Hennebergischer altertumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums. Lief. 20. 1906. 4°.

Verein für Geschichte der Stadt Meißen in Meißen:

Mitteilungen. Heft 25. 1906.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. New Series, vol. 18, part 2; vol. 19, part 1. 1906.

Accademia Peloritana in Messina:

Atti. Vol. XX, fasc. 2; vol. XXI, fasc. 1. 1906.
Resoconti. April–Giugno 1906. 1906.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XVII. Jahrg., 1. u. 2. Hälfte, 1905. 1906. 4°.

Instituto geológico in Mexico:

Parergones. Tomo I, No. 9, 10. 1905–06.
Boletín. No. 21. 1905. 4°.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletín mensual. Octubre u. Noviembre 1902, Junio 1904. 4°.

Sociedad científica „Antonio Alzate" in Mexico

Memorias y revista. Tomo 21, No. 9–12; tomo 22, No. 1–8; [illegible] 2 No. 1–4. 1904–05.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie III, vol. 5. 1905. 4°.

Musée océanographique in Monaco:

Bulletin. No. 56–86. 1905–06.

Observatoire météorologique du Mont Blanc

Annales. Tome VI. Paris 1905. 4°.

Bureau de Dépôt, Distribution et d'Échange de Publications in Montevideo:

Anuario estadístico de la República O. del Uruguay. Tomo II [illegible]

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Serie II, entrega 2 u. [Sección histórico-filosófica, tomo II [illegible] 1905. 4°.

Öffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg. 1905. 1906.

Lazarewsches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Heft 13, 14. 1905.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1905, No. 1–3. 1906.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:
Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXV, 3. 1905.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:
Bulletin. No. 88—97 u. 99—103. 1906.

Statistisches Amt der Stadt München:
Münchener Jahresübersichten für 1905. Teil I u. II. 4⁰.
Die Erhebung der Wohnverhältnisse in München 1904—07. I.—III. Teil. 4⁰.
Ergebnisse der Wohnungszählung vom 1. Dezember 1905. 4⁰.
Die Bevölkerung Münchens 1905. 1906. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Korrespondenzblatt. 37. Jahrg. 1906, Nr. 1—4, 6—12. Braunschweig 1906. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:
Verzeichnis der Flächeninhalte der Bach- und Flußgebiete. Heft VII, Teil 1. 1906. 4⁰.
Jahrbuch. 1905, Heft 4, 5; 1906, Heft 1 u. 2. fol.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:
Verzeichnis der erscheinenden Zeitungen für 1907. I. Abt. 1906. fol.

K. Ludwigs-Kreisrealschule in München:
Geschichte der K. Ludwigs-Kreisrealschule in München v. G. Widenbauer. 1906.

K. Bayer. Technische Hochschule in München:
Darstellungen aus der Geschichte der Tecknik, der Industrie und Landwirtschaft in Bayern. 1906. 4⁰.
Schriften aus dem Jahre 1903—06.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1906.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1906, Nr. 1—31.

K. Oberbergamt in München:
Geognostische Jahreshefte. XVII. Jahrg. 1904. 1906. 4⁰.

Universität in München:
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Ärztlicher Verein in München:
Sitzungsberichte. Bd. XV. 1905.

Historischer Verein in München:
Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. 6, Nr. 3—5. 1906. 4⁰.

Verein für Luftschiffahrt in München:
16. Jahresbericht für 1905.

Ornithologische Gesellschaft in München:
Verhandlungen. 1904, Bd. V. 1905.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:
Hochschul-Nachrichten. Nr. 184—195. 1906.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Bd. 63, Abt. 2 und Register zu Bd. 1—50. 1905.

Rendiconto. Serie 3, vol. 11, fasc. 8—12; vol. 12, fasc. 1—8. 19

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. 17, Heft 4. Berlin 1906.

Historischer Verein in Neuburg a. D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 68. Jahrg. 1904. 1906.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tome 31, année 1902—03; tome 32, année 1903 – 04

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 55, part 5, 6; vol. 56, part 1—3. 1906.
Annual Report for the year 1904/05 und 1905/06. 1905—06.
Report of the Committee upon mechanical Coalcutting. Part

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. 4. Series, No. 121—126, 128—132. 1906.

Astronomical Observatory of the Yale University in New-

Transactions. Vol. 2, part 1.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. 26, second half; vol. 27, first half. 1906.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 13, 14. 1905 –06.

American Museum of Natural History in New-York

International Congress of Americanists. 13th Session, held in
in 1902. 1905.
Journal. Vol. VI, No. 1—4. 1906.
Annual Report for the year 1905. 1906.
Bulletin. Vol. XVII, part 4; vol. XXI. 1905.
Memoirs. Vol. IV, 5; vol. V, 3; VIII, 1; IX, 1—3; X, 1; XI,
1906. 4°.
Aboriginal Myths of Titicaca (Bolivia). By Adolph F. Bande

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. XV. Bd., 3. Heft. 1905.
Jahresbericht für 1904. 1905.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1905 in 4 Heften. 1905. 4°.

Stadtmagistrat Nürnberg:

Katalog der historischen Ausstellung der Stadt Nürnberg. 1906.

Neurussische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. 28, 29. 1905—06.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 30. Bd. und Beiheft zum 30. Bd., 1905. 1906.

Department of the Interior in Ottawa:

Mounted Police Polar Expedition Maps. 1906.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Palaeozoic Fossils. Vol. III, part IV. 1906.
Annual Report. New Series, vol. XIV, 1901 mit Maps; vol. XV (1902—03) mit Maps. 1905—06.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Seris, vol. 11. 1906.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Catalogue of Stars for 1900. 1906. 4°.

Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana in Padova:

Atti. N. Serie, anno II, fasc. 1, 2. 1905.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie, anno 364, 1904—05; n. Serie, vol. 21. 1905.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

Rivista. N. Serie, anno 10, fasc. 2—4. 1906.

Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:

Bullettino. Anni 1899—1902. 1906. 4°.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario 1905.
Rendiconti. Tomo XXI, fasc. 1—3; tomo XXI, fasc. 1, 2. 1906.
Supplemento ai Rendiconti. No. 1. 1906. 4°.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1905, Luglio—Dicembre; 1906, Gennaio—Giugno. 4°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1906, No. 1—44.

Académie des Sciences in Paris:

Oeuvres d'Augustin Cauchy. Série II, tome 1. 1905. 4°.
Comptes rendus. Tome 142, No. 1—26; tome 143, No. 1—27.

Nouvelles Archives. Série IV, tome VII, 1, 2. 1905. 4°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. Ve Série, tome 6, fasc. 3—6. 1905.

Société des études historiques in Paris:

Revue. 72e année, Janvier—Août 1906.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. XII. année 1905, No. 3—6; XIII. année 1906, N

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 34, fasc. 1—3. 1906.

Western Australia Geological Survey in Perth:

Bulletin. No. 21, 22. 1906.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Comptes rendus de la commission sismique. Tome II, livr. 2
Mémoires. a) Classe historico-philologique, Série VIII, tome VI
b) Classe physico-mathémat., Série VIII, tome XVI,
tome XVII, No. 1—6. 1905. 4°.
Annuaire du Musée zoologique. 1905, No. 1, 2, 1906; B
Annuaire, Bd. 11, 1906.

Kaiserl. Bibliothek in St. Petersburg:

Ottschet 1900/01. 1905.
Gallerie Peters des Großen in der K. öffentlichen Bibliothek.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. XXIII, No. 7—10. 1904.
Mémoires. Nouv. Série, livr. 3, 18—20. 1905. 4°.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tome 24, fasc. 3; tome 25, fasc. 1

Kaiserl. Mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien. Bd. XXIII, Lief. 1. 1906.
Verhandlungen. II. Serie, Bd. 43, Lief. 1, 2. 1905.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kaiserl. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Bd. 37, Heft 8, 9; Bd. 38, Heft 1. 1905—06.

Physikalisches Zentral-Observatorium Nicolas in St. Petersburg:

Publications. Série II, vol. III, vol. XIV, vol. XVII, No. II. 1905. fol.
Annales. Année 1903, partie I, II, fasc. 1, 2. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Second Series, vol. XIII, part 2. 1905. 4⁰.
Proceedings. Vol. 57, part 3; vol. 58, part 1. 1906.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXX, No. 117—119. 1906.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol 44, No. 181; vol. 45, No. 182. 1906.
Transactions. New Series, vol. XXI, part 2, 3. 1906. 4⁰.

R Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. 19, 20. 1906—07.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali, vol. 14, No. 9, 10; vol. 15, No. 1—5. 1905—06. 4⁰.
Atti. Memorie, vol. XXI. 1905. gr. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, tomo 10, Ottobre—Dicembre 1905, tomo 11, Gennajo—Giugno 1906, tomo 12, Luglio—Settembre 1906.

Altertumsverein in Plauen:

Mitteilungen. 17. Jahresschrift 1905—06. 1906.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 20. Jahg., 1. u. 2. Halbband. 1905.
Historische Monatsblätter. Jahrg. VI, 1905, Nr. 1—12.

K. Geodätisches Institut in Potsdam:

Veröffentlichung. N. F., Nr. 25—29. Berlin 1906. 4⁰.
F. R. Helmert, Die Größe der Erde. 1. Mitteilung. Berlin 1906. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Bd. XV, 3—6; Bd. XVI; Bd. XVIII, 1. 1905—06. 4⁰.

Landesarchiv in Prag:

Archiv Český. Bd. XXII. 1905. 4⁰.

Sitzungsberichte 1905. a) Klasse für Philosophie.
b) Math.-naturw. Klasse, 1905, und (
zu 1884 – 1904. 1905.

St. Kostlivy, Untersuchungen über die klimatischen Verhältni
1905.

Václav Müller, Svobodníci. 1905.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Pra

Časopis. Band XXXV, No. 1—3. 1905—06.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in

57. Bericht über das Jahr 1905. 1906.

K. Böhmisches Museum in Prag:

Bericht für das Jahr 1905. 1906.

Časopis. Bd. 80, Heft 1 – 4. 1906.

Památky. Bd. XXI, Heft 5 – 8, Inhaltsverzeichnis zu Bd. 21; I
1, 2. 1905 – 06. 4⁰.

Starožitnosti země české. Del II, svazek 3. 1905. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 19
1906. fol.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag

Die feierliche Installation des Rektors für das Jahr 1905/0

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Časopis. Tome 35, No. 4, 5. 1906.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in

Mitteilungen. 44. Jahrg., Nr. 1—4. 1905 – 06.

*Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Bö
in Prag:*

Sitzungsberichte. Jahrg. 1905, N. F., Bd. 25. 1905.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. 10. Heft, 1903 u. 1904 und Beilage dazu. 1905.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. Nr. 48. 1905.

Bibliothèque nationale in Rio de Janeiro:

Annaes da Bibliotheca nacional do Rio de Janeiro. Vol. 26, 1904. 1905. 4⁰.
A Bibliotheca Nacional em 1893. Relatorio. 1905.
A Conferencia Internacional de Copenhague sobre a Tuberculose. Paris 1904. 4⁰.
J. P. Calogeras, As minas do Brasil e sua legislação II, III. 1905.
Brazil at the Louisiana Purchase Exposition. St. Louis 1904.

Museu nacional in Rio de Janeiro:

Archivos. Vol. XII. 1903. 4⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. 1906, anno 32.
Boletim mensal. Jan. - Decembro de 1905. 4⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 16. 1905.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario. 1906.
Memorie. Classe di scienze fisiche. Serie V, vol. 6, fasc. 1, 2. 1906. 4⁰.
Atti. Serie V. Notizie degli scavi di antichità. Vol. 2, fasc. 8—12. 1905. 4⁰.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 14, semestre 2, fasc. 12 e Indice; vol. XV, semestre 1, fasc. 1 - 12; vol. XV, semestre 2, fasc. 1—10. 1905—06. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, vol. 14, fasc. 7—12; vol. 15, fasc. 1—4. 1905—06.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 3 Giugno. 1906. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e Testi 16. Initia patrum. Vol. I. 1906.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1905, No. 3, 4; anno 1906, No. 1, 2.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno LVIII (1904—05), Sessione I—VII. 1905. 4⁰.

Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XX, Nr. 3, 4; Bd. XXI, Nr. 1, 2. 1906.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Le opere di Galileo Galilei. Vol. 17, 18. 1906. 4⁰.

R. Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Serie II, vol. XVI, parte 2 e 3. 1906. fol.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 28, fasc. 3, 4; vol 29, fasc. 1, 2. 1905—06.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, vol. XI, fasc. 3, 4; vol. XII, fasc. 1, 2. 1905–06.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tome 5, No. 3, 4. Hanoi 1905. 4°.

Essex Institute in Salem:

J. H. Sears, The physical Geography, Geology etc. of Essex County, Ma
1905. 4°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mitteilungen. 46. Vereinsjahr. 1906.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Jahrbuch 1904 und 1905.

Academy of science in St. Louis:

Transactions. Vol. XIV, No. 7, 8 und Register zu Vol. 1–14; vol. X
No. 1–5. 1904–05.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Annales. Seccion 2a, año 1904 und 1905. 1905. fol.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1901. Wi
1905. fol.

Universität in Sassari (Sardinien):

Studi Sassaresi. Anno IV, sez. I, fasc. 2; sez. II, fasc. 1. Supp[illegible]
No. 2–5. 1905–06.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 71. Jahrg. 1906.

Nord-China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:

Journal. Vol. 37. 1906.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, vol. 17, fasc. 5–10; vol. 18, fasc. 1–5. 1905–06.

Universität in Sophia:

Annuaire I, 1904–05. 1905.

K. K. Archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 28, No. 9–12; anno 29, No. 1-
1905–06.

K. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademie in Stockholm:

Oscar Almgren, Kung Björns Hög. 1905. 4°.
Antiqvarisk Tidskrift. Bd. 9, No. 4; Bd. 11, No. 6; Bd. 13, No. 4; Bd 1
No. 3; Bd. 17, No. 4, 5; Bd. 18, No. 1. 1905.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Årsbok. År 1905. Upsala 1905.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Bd. 46, 47. Upsala 1905–06. 4⁰.
Handlingar. N. F., Bd. 39, No. 6; Bd. 40, No. 1, 5; Bd. 41, No. 1–3, 5. 1904–06.
Arkiv för Zoologi. Bd. 2, Heft 4; Bd. 3, Heft 1, 2. 1906.
Arkiv för Kemi. Bd. II, 2, 3. 1906.
Arkiv för Botanik. Bd. V, 1–4; Bd. VI, 1, 2. 1905–06.
Arkiv för Matematik. Bd. II, 3, 4; Bd. III, 1. 1905–06.
Les prix Nobel en 1903. 1906.
Nobelinstitut Meddelanden. Bd. 1, 2–5. 1906.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 27, Heft 7; Bd. 28, Heft 1–6. 1905–06.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska Undersökning. 12 Hefte mit Karten. 1906.

Commission Royale Suédoise pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg in Stockholm:

Mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. S II B, S V, S VII A, S VIII A, S VIII B, S VIII B^1, S VIII B^2, S VIII B^3, S VIII B^4, S VIII B^5, S VIII C, S X. 1904–05. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Straßburg:

Monatsbericht. Bd. 40, Nr. 1–7. 1906.

Kaiserl. Universität Straßburg:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. N. F., XV. Jahrg. 1906, Heft 1–4.

K. Württemberg. Statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1905, Heft 1, 2. 1905. 4⁰.
Statistisches Handbuch für das Königreich Württemberg. Jahrg. 1904 u. 1905. 1906. gr. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1905. 1906. fol.
Mineral Resources. No. 11. 1906.
Records of the Geological Survey. Vol. 8, part 2. Mit einer Karte. 1905. 4⁰.
Palaeontology. No. 5. 1906. 4⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. 30, part 3, part 4 and Supplement; vol. 31, part 1, 2. 1905–06.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Anuario. Año de 1906, año XXVI.

National Physical Laboratory in Teddington:

Report for the year 1905. 1906. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

F. Omari, Note on the San Francisco Earthquake of April 18. 1906. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. 10, Heft 3. 1906.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar 1905/06.
The Journal of the College of Science. Vol. 20, article 8—12; vol. 21, article 1. 1905—06. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. VI, No. 4. 1905. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. VII, No. 1, 2. 1906. 4⁰.

Université in Toulouse:

L'oeuvre antialcoolique par Doumergue. 1906.
Bulletin de la station de pisciculture. No. 2 1905.
Annales du Midi. No. 68, 69. 1905—06.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série, tome VII, fasc. 3, 4; tome VIII, fasc. 1. 1905 - 06. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XX, fasc. 2; anno XXI, fasc. 1—3. 1905—06.

Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:

Jahresbericht für die Jahre 1904 und 1905. 1906.

Tufts College Mass.:

Studies. Vol. 2, No. 1. 1905.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologische. Anno 1905. 1906.
Atti. Vol. 41, disp. 1—15 und Indici generali zu Vol. 31—40. 1905—06.
Memorie. Serie II, tomo 55. 1905. 4⁰.

R. Accademia d'agricoltura in Turin:

Annali. Vol. 48, 1905. 1906.

Humanisk. Vetenskaps Samfund in Upsala:

Skrifter. Bd. IX. 1906.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 37. 1905—06. fol.

K. Universität in Upsala:

Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt 1901, part II. 1905.
Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4⁰ u. 8⁰.
Botaniska Studier tillägnade F. R. Kjellman den 4. Nov. 1906. 1906. gr. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Bd. XXVI (1905). Amsterdam 1905.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Naamlijst en Registers.
Aanteekeningen. 5. Juni 1906.
Verslag. 6. Juni 1906.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Annuaire 1904. 1906. 4⁰.
Mededeelingen en Verhandelingen 1a, b, II—IV. 1906.

Ateneo Veneto in Venedig:

Atti. Vol. 27, No. 1, 2; vol. 28, No. 1, 2. 1904–05.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Vol. 63, No. 1–10; vol. 64, No. 1–10. 1904–05.
Memorie. Vol. XXVII, No. 3–5. 1904–05. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace. Tomo 17. 1906.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. IX. 1905. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

Bulletin. No. 28, 29, Haida Texts 32. 1904–06.
23ᵈ annual Report. 1904. 4⁰.

Commissioner of Education in Washington:

Report for the year ending June 30, 1904. Vol. 1. 1906.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Yearbook 1905. 1906.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 34.
Carl Barus, A continuous Record of Atmospheric Nurleation 1905. 4⁰.
Annual Report for the year ending June 30, 1904. 1905.
Miscellaneous Collections. No. 1585. 1905.
Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 10, part 1, 2; vol. 11. 1906.

U. S. National-Museum in Washington:

Annual Report for the year 1904. 1906.
Proceedings. Vol. 28–30. 1905–06.
Bulletin. No. 54. 55. 1905.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. II. Series, vol. IV, part I–IV. 1906. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XIV, p. 317–336, 339–450. 1906.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Report for the year 1905. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 247, 251, 256, 263, 265, 266, 268, 274–278, 280–282, 288, 291. 1905–06.
Monograph. No. XXXII. Atlas. Yellowstone National Park XLV, XLVII, XLIX, 45, 47. 49. XLVIII. 2 parts. 1904–06. 4⁰.
Annual Report XXVI. 1904–05. 1905. 4⁰.
Professional Paper. No. 34, 36–38, 40–44, 48, 50. 1904–05. 4⁰.
Mineral Resources. 1904. 1905.
Water-Supply Paper. No. 123, 125, 127, 129–131, 133–158, 163, 165 bis 171, 176, 178. 1905–06.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 38. Jahrg., 2. Heft, 1905; 39. Jahrg., 1. u. 2. Heft, 1906, und Register zu Jahrg. 25—30, Bd. II. 1906.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse, Bd. 150, 151, 152 und Register zu 141—150. 1905.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.
Abt. I, Bd. 114, Heft 6—10; Bd. 115, Heft 1—5.
„ IIa, Bd. 114, Heft 8—10; Bd. 115, Heft 1—5.
„ IIb, „ 114, „ 7—10; „ 115, „ 1—6.
„ III, Bd. 114, Heft 5—10; Bd. 115, Heft 1—5.
Denkschriften. Philos.-hist. Klasse, Bd. 51, 52. 1906. 4⁰.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse, Bd. 78. 1906. 4⁰.
Anzeiger der mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1906, Nr. I—XXVII.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 94, 1. Hälfte. 1906.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abt., Bd. 58 u. II. Abt., Bd. 59. 1906.
Almanach. Jahrg. 1906, Bd. 56, Heft 1 u. 2. 1906. 4⁰.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., Heft 30. 1906.

K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1905, Nr. 13—18; 1906, No. 1—10. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XX, Heft 2. 1906. fol.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Bd. 49, I u. II. 1906. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1906, Nr. 1—52. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 55, Heft 9, 10; Bd. 56, Heft 1—7. 1905—06.
Abhandlungen. Bd. III, Heft 3, 4. 1906. 4⁰.

Comité für die Lieben-Feier in Wien:

Festschrift Adolf Lieben zum 50jährigen Doktorjubiläum und zum 70. Geburtstage gewidmet. Leipzig 1906.

Österr. Kommission für die internationale Erdmessung in Wien:

Verhandlungen. Protokoll über die am 29. Dez. 1904 abgehaltene Sitzung.

K. K. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XX, Nr. 1—3. 1905. 4⁰.

Geologisches und paläontologisches Institut der Universität Wien:

Beiträge zur Paläontologie und Geologie Österreich-Ungarns. Bd. XIX, Heft 2 u. 3. 1906. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Schriften aus dem Jahre 1906.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 46, Jahrg. 1905/06. 1906.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 35. Bd., 1905. 1906. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 59. 1906.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 38, Nr. 2—12. 1905—06.
Sitzungsberichte. 1905, Nr. 3—9.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 47. 1905.
Jahresbericht für 1904. 1905.

Polytechnisches Zentralbureau in Würzburg:

Festgabe zur Jahrhundertfeier. 1906. 4°.

Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:

Annalen 1904. 41. Jahrg. 1906. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 31. Bd. 1906.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. 26, Heft 4. 1906. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1906. 1906. 4°.
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 50, Heft 3, 4; Jahrg. 51, Heft 1. 1905—06. 4°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F., Bd. VII, Nr. 4; Bd. VIII, Nr. 1, 2. 1906. 4°.
14. Jahresbericht 1905. 1906.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. Nr. 97. 1906.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1905/06 in 4° u. 8°.

Nachtrag:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 35, Heft 2.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 41, No. 14, 15. 1905.

Australasian Association for the advancement of science in Dunedin:

Report of the 10th Meeting held at Dunedin 1904.

Von folgenden Privatpersonen:

Prince Albert I. von Monaco:

Resultats des Campagnes scientifiques. Fasc. 32. 1906. fol.

V. Avramoff in Sofia:

Description Résumée des Monnaies de la collection de Avramoff. 1906.

Concetto Barreca in Syrakus:

Le Catacombe di S. Giovanni in Siracusa. 1906.
Sopra un giudizio del Prof. Paolo Orsi a proposito delle Catacombe di S. Giovanni. 1906.

Verlagsbuchhandlung Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1906, Nr. 1—23 u. Bd. 30, Heft 13.
Journal für praktische Chemie. N. F., Bd. 71, Heft 5—7; Bd. 72, Heft 6, 11, 12; Bd. 73, Heft 1—9; Bd. 74, Heft 1—4, 10. 1905—06.

Buchhandlung Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Die Gesetze der Angelsachsen. Herausgegeben im Auftrage der Savigny-Stiftung von F. Liebermann. Bd. II, 1. Hälfte. Halle 1906. 4°.
Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte. 27. Bd. der romanist. und der germanist. Abteilung. Weimar 1906.

Ludwig Curtius in Athen:

Samiaca I. (Sep.-Abdr.) 1906.

H. Diels in Berlin:

Die Handschriften der antiken Ärzte. Berlin 1906. 4°.

Franz Doflein in München:

Ostasienfahrt. Leipzig 1906.

Erich von Drygalski in München:

Ferdinand Freiherr von Richthofen. Leipzig 1906.

Leopold Engel in Blasewitz bei Dresden:

Geschichte des Illuminaten-Ordens. Berlin 1906

Joh. Ev. Engl in Salzburg:

Hyrtls Mozart-Schädel. I. Die geschichtliche Schilderung. 1906.

Artur J. Evans in Oxford:

The Palace of Knossos. Athen 1904—05. 4°.

R. Fick in Prag:

Betrachtungen über die Chromosomen, ihre Individualität, Reduktion und Vererbung. 1905.

Emil Fischer in Berlin:

Untersuchungen über Aminosäuren. 1906.

Verlagsbuchhandlung von Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1906, Nr. 1—52.
Zoologische Forschungsreisen in Australien von R. Semon. Bd. IV, Lief. 4 = Lief. 26. 1905. fol.

Henri Fischer in Paris:

3 opuscules d'Édouard Piette, et un nécrologe d'Éd. Piette par Henri Fischer. 1906.

Hermann Fischer in Tübingen:

Schwäbisches Wörterbuch. Lief. 13—16. 1906. 4⁰.

R. Forrer in Straßburg i. E.

Die Schwerter und Dolche in ihrer Formenentwicklung. Leipzig 1905. fol.
Keltische Numismatik der Rhein- und Donaulande. (5. Fortsetzung.)

Henri Gaidoz in Paris:

Pour le centenaire de Gaspar Zeuss. 1906.

Mme Vve J. B. André Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tome 29, Décembre 1905; tome 30, Janvier-Décembre 1906.
Documents pour une biographie complète de Jean-Baptiste-André Godin. Vol. I. 1897—1901.

Lucien Graux in Paris:

Proportionnalité direct entre le point cryoscopique d'une eau minérale et la composition de cette eau. 1906. 4⁰.

S. Gundelfinger in Darmstadt:

O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. 4. Aufl., revidiert und ergänzt. Leipzig 1906.

Ernst Haeckel in Jena:

Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen. Berlin 1906.

B. Hagen in Frankfurt:

Kopf- und Gesichtstypen ostasiatischer und melanesischer Völker. Stuttgart 1906. fol.

Hermine Hartleben in Berlin:

Champollion. Sein Leben und sein Werk. 2 Bde. 1906.

F. R. Helmert in Potsdam:

Generalleutnant Dr. Oskar Schreiber. Leipzig 1905.

Hermann von Ihering in São Paulo:

The Anthropology of the State of S. Paulo, Brazil. 1906.

Wilhelm Knapp in Halle:

Chemische Zeitschrift. 1906, Nr. 1, 2, 4—18.

A. Köllikers Relikten in Würzburg:

Die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. Leipzig 1905.

P. Kokowzoff in Petersburg:

Nouveaux fragments Syropalert. 1906. fol.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XV, Heft 1—4. Leipzig 1906.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. 3. Fortsetzung. 1906.

Die Südbayerische Drei

längs des 48. Breitenparal

48° 40'

48° 30'

Stauffersberg

48° 20'

Roggenburg

2

Bussen

Kirchhei

48°10'

+ y

Württembergischer Anschluß

1a

48°00'

1

47°50'

Waldburg

Änger

47°40'

Grünten

47°30'

47°20'

Henry Charles Lea in Philadelphia:

A. History of the Inquisition of Spain. Vol. I u. II. New-York 1906

Joseph Levy in Grussenheim (Oberelsaß):

Geschichte des Dorfs Zimmerbach. Rixheim 1906.

F. und L. Lindemann in München:

Henri Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1906.
Vorlesungen über Geometrie. Bd. I, Teil I, Lief. 1. Leipzig 1906.

C. G. Lloyd in Cincinnati:

Mycological Notes. No. 19, 20. 1905.

Wilhelm Ludowici in Jockgrim:

Stempel-Bilder römischer Töpfer. 1899. 4°.

Basile Modestov in Rom:

Introduction à l'Histoire Romaine. Paris 1907. 4°.

Ernesto Monaci in Rom:

Archivio paleografico italiano. Fasc. 21–23. 1905–06. fol.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 90, No. II, Mars, Avril 1906; tome 91, No. I, Mai–Août 1906; tome 92, No. I, II, Sept.–Déc. 1906. Paris.

W. Moriell'sche Buchdruckerei und Verlagshandlung in Radolfzell:

„Vom Bodensee". Vergangenheit und Gegenwart mit besonderer Berü sichtigung von Reichenau, Mainau, Wollmatingen und Konsta Von B. Bauer. 1906.

Eugen Oberhummer in Wien:

Wolfgang Lazius, Karten der österreichischen Lande, herausgegeben E. Oberhummer und Franz R. von Wieser. Innsbruck 1906. fol.

Michele Rajna in Bologna:

Sulle condizioni dell' osservatorio della R. Università di Bologna. 19

S. Riefler in München:

Zeitübertragung durch das Telephon.
Elektrische Ferneinstellung von Uhren.

H. Rosenbusch in Heidelberg:

Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. 1906.

Heinrich Rudolf in Coblenz:

Erdmagnetismus und Luftelektrizität. 1906.

Giovanni Scardovelli in Sermide:

L'Ultimo Conquistatore. 1906.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1906, Nr. 1–24.

Stephan Kekule von Stradonitz in Berlin:

Ahnentafel-Atlas. 1898–1904. quer fol.

Philipp Straßer in Salzburg:

Fürst Otto von Bismarck, † 31. Juli 1898. 1906. fol.

Julius Tafel in Würzburg:

22 Separat-Abdrücke aus dem Gebiete der Chemie.

Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae Latinae. Vol. 2, fasc. 8—10; vol. 4, fasc. 1. 1905—06. fol.
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II, 1, Heft 6; Bd. III, 2, Heft 3; Bd. IV, 2, Heft 3; Bd. V, 1, Heft 3; Bd. VI, 1, Heft 1, und französische Ausgabe, tome I, vol. 3, fasc. 1; vol. 4, fasc. 1. 1906.
Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. 10, Heft 2—4; Bd. 11, Heft 1, 2. 1906.

A. Thieullen in Paris:

Les préjugés et les faits en industrie préhistorique. 1906. fol.

J. F. Thoene in Cöln:

Läßt sich unsere Zeitrechnung vereinfachen? 1906.

Heinrich Welzhofer in Rohrbach:

Das Büchlein vom Höchsten. Stuttgart 1906.

Vinzenz Wießner in Freiwaldau:

Die Leitung der mechanischen Energie. Dresden 1906.

Ludwig Wilser in Heidelberg:

Die Burgunder im Wonnegau. Worms 1906.

J. Cook Wilson in Oxford:

On the Traversing of Geometrical Figures. 1905.

Veit Brecher Wittrock in Bergen:

Acta Horti Bergiani. Vol. I, II, III, 1. Stockholm 1891—1903. 4⁰.
Catalogus illustratus Iconothecae botanicae. Pars II. Stockholm 1905. 4⁰.

Ed. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XIV, 4. Leipzig 1906.

Firma Karl Zeiß in Jena:

Gesammelte Abhandlungen von Ernst Abbe. Bd. 3. 1906.

---

eck

lels

Die Südbayerische Drei

längs des 48. Breitenparal

48° 40′
48° 30′
Stauffersberg
48° 20′
Roggenburg
2
Kirchhei
48° 10′ Bussen
+ y
Württembergischer Anschluß
1a
48° 00′
1
47° 50′
Waldburg
Änger
47° 40′
Grünten
47° 30′
47° 20′

Astronomische Azimute

ck

els

was

Fig. 1.
Die 41 Min.-Seiche.

Fig. 3.
Die 18 Min.-Seiche.

Fig. 4.
)ie 15½ Min.-Seiche.

Seebruck

Seebruck

Alz

II. STATION

Arlaching

6. Station

Schützing

St Johann

Stöttham

7. Station

Chieming

Weitsee

iemsee
on

Hagenau

8. Station

Grabenstätter Winkel

Achenzipfel

Achen

Grabenstätt

Baumgarten

1. Station

Feldwies

Übersee-Bach

Rothbach

10 mtr.

10
20
30
40
50
60
70

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

STANFORD LIBRARY

Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München

ischer Strahlengang, orthopische Augenstellung.

ischer Strahlengang, synopische Augenstellung

rischer Strahlengang chiastopische Augenstellung.

Fig. 2.
Die 28½ Min.-Seiche.

Fig. 5.
Die 8 Min.-Seiche.

STANFORD LIBRARY

Lith. Anst. v. Hubert Köhler München

Taf. V.

III₁ Hyperzentrischer Strahlengang

III₂ Hyperzentrischer Strahlengang, s.

III₃ Hyperzentrischer Strahlengang, chr

Hub. Köhler, Wien

STANFORD LIBRARY

Taf. VI.

des durch den Flammenkollektor.

72

lektors

Magnetische Karte von BAYERN.

—— Isogonen
– – – Isodynamen
······ Isoklinen

Druck von Hub. Köhler, München

Stanford University Libraries
3 6105 005 431 494

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-1493

All books may be recalled after 7 days

DATE DUE